

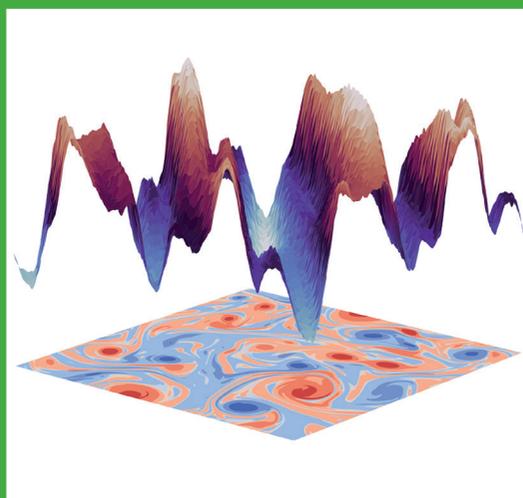
SAVOIRS

PHYSIQUE

ACTUELS

# PHYSIQUE DE LA TURBULENCE ●

## DES TOURBILLONS AUX ONDES



●

SÉBASTIEN GALTIER

PRÉFACE DE  
ANNICK POUQUET

CNRS ÉDITIONS



edp sciences

# PHYSIQUE DE LA TURBULENCE

SÉBASTIEN GALTIER

Depuis la première expérience historique de Reynolds sur les liquides en 1883, notre compréhension de la turbulence s'est considérablement étendue grâce aux avancées théoriques, numériques, expérimentales et observationnelles. De l'écoulement des fleuves aux plasmas astrophysiques en passant par les ailes d'avion et les ondes gravitationnelles, la turbulence intervient dans de nombreux systèmes physiques. Cet ouvrage se propose de faire découvrir au lecteur les principes fondamentaux qui régissent la physique de la turbulence.

La turbulence forte tourbillonnaire et la turbulence faible d'ondes sont les deux régimes que nous rencontrons dans la nature. L'attention des mécaniciens des fluides étant portée sur l'hydrodynamique, c'est généralement le premier régime qui est traité. Cependant, les physiciens s'intéressent à des systèmes bien plus variés où les ondes sont souvent présentes. L'originalité de cet ouvrage est de traiter, à parts égales, la turbulence forte et la turbulence d'ondes.

Ce livre offre un vaste tour d'horizon sur la turbulence qui devrait permettre aux chercheurs débutants d'acquérir une connaissance de base sur des sujets à la pointe de la recherche actuelle. Son contenu repose en partie sur un enseignement délivré depuis plusieurs années à l'École polytechnique à des étudiants de Master 2 (Master de Physique des Plasmas sous la tutelle de l'Université Paris-Saclay, l'Institut Polytechnique de Paris et Sorbonne-Université).

**Sébastien Galtier** est astrophysicien au Laboratoire de Physique des Plasmas à l'École polytechnique, Professeur à l'Université Paris-Saclay et membre sénior de l'Institut universitaire de France. Ses recherches portent sur la turbulence en hydrodynamique, magnétohydrodynamique et en relativité générale. Il est l'auteur de deux ouvrages sur la magnétohydrodynamique.

Série Physique dirigée par Michèle LEDUC et Michel LE BELLAC

**SAVOIRS ACTUELS**

Collection dirigée par Michèle LEDUC

CNRS ÉDITIONS

[www.cnrseditions.fr](http://www.cnrseditions.fr)



edp sciences  
[www.edpsciences.org](http://www.edpsciences.org)

Création graphique : Béatrice Couëdel



ISBN EDP Sciences 978-2-7598-2535-6  
ISBN CNRS ÉDITIONS 978-2-271-13783-8

Ces ouvrages, écrits par des chercheurs, reflètent des enseignements dispensés dans le cadre de la formation à la recherche. Ils s'adressent donc aux étudiants avancés, aux chercheurs désireux de perfectionner leurs connaissances ainsi qu'à tout lecteur passionné par la science contemporaine.

Sébastien Galtier

Physique  
de la Turbulence

Des tourbillons aux ondes

SAVOIRS ACTUELS

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

## Dans la même collection

*Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique ? 2<sup>e</sup> édition*

Franck Laloë

*Mécanique Quantique - Tomes 1, 2 et 3 - Nouvelle édition*

Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu et Franck Laloë

*La théorie statistique des champs*

François David

*Physique quantique, information et calcul*

Pascal Degiovanni, Natacha Portier, Clément Cabart, Alexandre Feller  
et Benjamin Roussel

*Le temps dans la géolocalisation par satellites*

Pierre Spagnou et Sébastien Trilles

Retrouvez tous nos ouvrages et nos collections sur  
<http://laboutique.edpsciences.fr>

Illustration de couverture : Simulations numériques directes de la turbulence forte en hydrodynamique 2D (bas) et de la turbulence faible d'ondes gravitationnelles (haut). Sont montrées respectivement la vorticité signée et les fluctuations d'une composante de la métrique espace-temps.

Imprimé en France

© 2021, **EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A

et

**CNRS Éditions**, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

EDP Sciences

ISBN (papier) : 978-2-7598-2535-6, ISBN (ebook) : 978-2-7598-2566-0

CNRS Éditions

ISBN (papier) : 978-2-271-13783-8, ISBN (ebook) : 978-2-271-13785-2

# Table des matières

Préface	vii
Avant-propos	ix
<b>Première partie : Turbulence forte</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>3</b>
1.1 Bref historique . . . . .	4
1.1.1 Premières avancées cognitives . . . . .	4
1.1.2 Loi de Kolmogorov et intermittence . . . . .	7
1.1.3 Théories spectrales et fermetures . . . . .	9
1.1.4 Cascade inverse . . . . .	10
1.1.5 Essor de la simulation numérique directe . . . . .	12
1.1.6 La turbulence aujourd'hui . . . . .	13
1.2 Chaos et imprédictibilité . . . . .	14
1.3 Transition vers la turbulence . . . . .	17
1.4 Outils statistiques et symétries . . . . .	19
1.4.1 Moyenne d'ensemble . . . . .	19
1.4.2 Autocorrélation . . . . .	19
1.4.3 Distribution et densité de probabilité . . . . .	21
1.4.4 Moments et cumulants . . . . .	21
1.4.5 Fonctions de structure . . . . .	21
1.4.6 Symétries . . . . .	21
Bibliographie . . . . .	22
<b>2 Lois de Kolmogorov en hydrodynamique</b>	<b>29</b>
2.1 Les équations de Navier-Stokes . . . . .	29
2.2 Turbulence et chauffage . . . . .	29
2.2.1 Expérience de Joule . . . . .	29
2.2.2 Taux moyen de dissipation d'énergie . . . . .	31
2.2.3 Brisure spontanée de symétrie . . . . .	33
2.3 Équation de Kármán-Howarth . . . . .	35
2.4 Hypothèse de localité et cascade . . . . .	37
2.5 Loi exacte de Kolmogorov . . . . .	39
2.6 Phénoménologie de Kolmogorov . . . . .	42
2.7 Dissipation inertielle . . . . .	43
2.7.1 Conjecture d'Onsager . . . . .	43
2.7.2 Formulation faible . . . . .	45
2.8 Intermittence . . . . .	48
2.8.1 Qu'est-ce que l'intermittence? . . . . .	49

2.8.2	Modèle fractal . . . . .	51
2.8.3	Modèle log-normal . . . . .	55
2.8.4	Modèle log-Poisson . . . . .	57
2.8.5	Contraintes exactes . . . . .	60
	Bibliographie . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Théorie spectrale en hydrodynamique</b>	<b>65</b>
3.1	Cinématique . . . . .	65
3.1.1	Tenseur spectral . . . . .	65
3.1.2	Spectre d'énergie . . . . .	67
3.2	Conservation détaillée de l'énergie . . . . .	67
3.3	Théorie statistique . . . . .	70
3.3.1	Flux et transfert . . . . .	70
3.3.2	Spectre de Kolmogorov . . . . .	72
3.3.3	Hiérarchie infinie d'équations . . . . .	74
3.3.4	Fermeture QN . . . . .	75
3.3.5	Fermetures EDQN et EDQNM . . . . .	76
3.3.6	Fermeture DIA . . . . .	77
3.4	Turbulence bi-dimensionnelle . . . . .	79
3.4.1	Phénoménologie de Fjørtoft . . . . .	80
3.4.2	Conservation détaillée . . . . .	82
3.4.3	Solutions en loi de puissance . . . . .	84
3.4.4	Flux d'énergie et d'énstrophie . . . . .	86
3.5	Cascade duale . . . . .	89
3.6	Modèle de diffusion non-linéaire . . . . .	90
	Bibliographie . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Application : la turbulence magnétohydrodynamique</b>	<b>97</b>
4.1	Turbulence du vent solaire . . . . .	98
4.2	La MHD incompressible . . . . .	100
4.3	Lois exactes des 4/3 . . . . .	101
4.4	Dissipation inertielle . . . . .	106
4.5	Intermittence . . . . .	108
4.6	Hélicité magnétique et cascade inverse . . . . .	110
4.7	Conjecture d'équilibre critique . . . . .	112
4.8	Perspectives . . . . .	116
	Bibliographie . . . . .	117
<b>5</b>	<b>Perspective : la turbulence compressible</b>	<b>121</b>
5.1	Turbulence supersonique du milieu interstellaire . . . . .	121
5.2	Loi exacte en turbulence compressible . . . . .	124
5.3	Phénoménologie compressible . . . . .	126
5.4	Perspectives . . . . .	127
	Bibliographie . . . . .	128

<b>Exercice et correction I</b>	<b>131</b>
1. Turbulence HD 1D : l'équation de Burgers . . . . .	131
2. Turbulence HD 2D : la conservation détaillée . . . . .	135
Bibliographie . . . . .	139
<b>Deuxième partie : Turbulence d'ondes</b>	<b>141</b>
<b>6 Introduction</b>	<b>143</b>
6.1 Bref historique . . . . .	144
6.1.1 Préhistoire . . . . .	144
6.1.2 Interactions d'ondes résonnantes . . . . .	145
6.1.3 Méthode des échelles multiples . . . . .	146
6.1.4 Spectre de Kolmogorov-Zakharov . . . . .	146
6.1.5 Applications de la turbulence d'ondes . . . . .	148
6.2 Méthode des échelles multiples . . . . .	151
6.2.1 Équation de Duffing . . . . .	151
6.3 Modèle faiblement non-linéaire . . . . .	155
6.3.1 Équation fondamentale . . . . .	155
6.3.2 Relation de dispersion et résonance . . . . .	156
6.3.3 Développement asymptotique uniforme . . . . .	157
Bibliographie . . . . .	162
<b>7 Théorie de la turbulence d'ondes capillaires</b>	<b>167</b>
7.1 Introduction . . . . .	167
7.2 Phénoménologie . . . . .	170
7.3 Théorie analytique : équation fondamentale . . . . .	173
7.4 Théorie analytique : approche statistique . . . . .	176
7.5 Conservation détaillée de l'énergie . . . . .	180
7.6 Solutions exactes et transformation de Zakharov . . . . .	181
7.7 Nature des solutions exactes . . . . .	185
7.8 Confrontation avec l'expérience . . . . .	186
7.9 Simulation numérique directe . . . . .	189
Bibliographie . . . . .	193
<b>8 Application : les ondes inertielles</b>	<b>197</b>
8.1 Introduction . . . . .	197
8.2 Que savons-nous sur la turbulence en rotation? . . . . .	199
8.2.1 Expériences de laboratoire . . . . .	199
8.2.2 Simulations numériques . . . . .	201
8.2.3 Théories . . . . .	202
8.3 Ondes inertielles hélicitaires . . . . .	204
8.4 Prédictions phénoménologiques . . . . .	205
8.5 Théorie de la turbulence d'ondes inertielles . . . . .	206
8.6 Interactions triadiques locales . . . . .	209
8.6.1 Équation de diffusion non-linéaire . . . . .	209
8.6.2 Solutions stationnaire et auto-similaire . . . . .	211

8.6.3	Étude numérique . . . . .	213
8.6.4	Universalité de l'anomalie spectrale . . . . .	215
8.7	Perspectives . . . . .	217
	Bibliographie . . . . .	218
<b>9</b>	<b>Application : les ondes d'Alfvén</b>	<b>223</b>
9.1	La MHD en variables d'Elsässer . . . . .	223
9.2	Phénoménologie d'Iroshnikov-Kraichnan . . . . .	225
9.2.1	Fondement de la phénoménologie triadique . . . . .	225
9.2.2	Phénoménologie anisotrope . . . . .	228
9.3	Théorie de la turbulence d'ondes d'Alfvén . . . . .	228
9.3.1	Variables canoniques . . . . .	228
9.3.2	Condition de résonance . . . . .	229
9.3.3	Équations cinétiques . . . . .	231
9.3.4	Traitement du mode 2D ( $k_{\parallel} = 0$ ) . . . . .	234
9.3.5	Autres résultats . . . . .	234
9.4	Simulation numérique directe . . . . .	236
9.5	Application : la couronne solaire . . . . .	237
9.6	Au-delà de la MHD standard . . . . .	240
9.7	Perspectives . . . . .	241
	Bibliographie . . . . .	242
<b>10</b>	<b>Perspective : la turbulence d'ondes gravitationnelles</b>	<b>249</b>
10.1	Turbulence d'ondes gravitationnelles . . . . .	249
10.2	Conclusion . . . . .	255
	Bibliographie . . . . .	255
	<b>Exercice et correction II</b>	<b>257</b>
1.	Modèle MHD de diffusion non-linéaire . . . . .	257
2.	Turbulence d'ondes gravitationnelles . . . . .	259
	Bibliographie . . . . .	262
	<b>Annexe : formulaire</b>	<b>263</b>
	<b>Index</b>	<b>267</b>

# Préface

C'est bien sûr avec grand plaisir que j'écris cette préface.

Sébastien Galtier est un spécialiste mondial des écoulements turbulents dans le contexte de la géophysique et de l'astrophysique, et il est l'auteur de plusieurs ouvrages sur différents aspects de ce vaste sujet. Ce nouveau manuel pédagogique sur la turbulence, rédigé en français, est tout à fait bienvenu même si, comme l'auteur le précise dans l'introduction, de nombreux livres, particulièrement en anglais mais aussi en russe, existent déjà, sans pour autant traiter des mêmes sujets dans le détail. Une particularité importante de ce livre est qu'il fait la part (à peu près) égale à la turbulence forte, pour laquelle nous n'avons toujours pas de solution complète, et à la turbulence faible en présence d'ondes, pour laquelle des progrès substantiels ont été réalisés dès les années 1960, en Union Soviétique en ce qui concerne en particulier la physique des plasmas, et aux U.S.A. où les recherches ont été plus centrées sur la physique de l'atmosphère et des océans, c'est-à-dire en présence de rotation et de gravité, et pour des paramètres d'interaction relativement faibles (rapport de la période des ondes aux temps caractéristiques des tourbillons non-linéaires). Cela lui permet de faire des analogies, loin d'être uniquement formelles, entre ces deux aspects de la turbulence, et c'est un des points forts du livre. Une autre particularité de ce manuel est que, dans le dernier chapitre, on trouve le traitement de la turbulence faible d'ondes gravitationnelles. De ce point de vue, ce texte pédagogique vient évidemment à point nommé 100 ans après la démonstration théorique de l'existence de telles ondes par Einstein.

L'expérience de l'auteur, depuis de nombreuses années, dans différents domaines de la turbulence, faible et forte, fluide ou en présence de champs magnétiques, l'a amené à un effort de synthèse qui est le bienvenu, et qui de plus rend la lecture fort agréable. Je ne peux attester les faits décrits dans la partie historique de l'introduction, mais ce que j'y lis correspond en effet à la geste traditionnelle sur ce sujet. Le livre s'appuie également sur les nombreux progrès réalisés à propos des écoulements fortement turbulents dans les trente dernières années. Il est donc utile pour se maintenir au courant de ces développements au niveau Master et au-delà, avec un large domaine d'applications pour ce qui est de l'ingénierie, de la géophysique et de l'astrophysique.

Sébastien Galtier discute avec un certain degré de détail plusieurs points délicats ou obscurs dans le traitement analytique de la turbulence faible, et

en faisant d'ailleurs des analogies avec la turbulence forte (par exemple pour ce qui est du spectre précurseur aux spectres auto-similaires exacts). Ceci devra s'avérer très utile aux juniors (et séniors) s'intéressant à la turbulence d'ondes, sujet qui suscite de nouveau beaucoup d'intérêt après les premiers succès des années 1960, ceci étant dû à une puissance accrue des ordinateurs, à des mesures de laboratoire plus précises et à un élargissement des domaines d'application. Enfin, je signale que quelques exercices ponctuent le livre.

En conclusion, Sébastien Galtier a rédigé un manuel intéressant et fort utile, donnant un tour d'horizon moderne et une ouverture sur la littérature actuelle concernant plusieurs aspects nouveaux des écoulements turbulents, omniprésents dans l'Univers.

Annick Pouquet

Laboratory for Atmospheric and Space Physics, Boulder (Research Scientist)  
National Center for Atmospheric Research (Emeritus)

# Avant-propos

*L'encre, cette noirceur d'où sort une lumière.*  
Dernière Gerbe – Victor Hugo, 1856.

Qui a pris l'avion sait définir une zone de turbulences : elle se caractérise par des secousses imprévisibles, parfois violentes, souvent désagréables, allant jusqu'à créer une certaine angoisse chez le passager. Pour le physicien, au contraire, la turbulence est un sujet à la fois agréable, fascinant et mystérieux. Cet ouvrage propose un voyage dans le monde de la turbulence au cours duquel nous dévoilerons, peu à peu, les principales lois fondamentales régissant la physique de la turbulence de divers systèmes. Nous verrons que depuis la première expérience historique de Reynolds en 1883 sur les liquides, la turbulence a été étudiée dans de très nombreux systèmes. De l'eau aux ondes gravitationnelles, en passant par les plaques métalliques vibrantes ou les plasmas astrophysiques, la turbulence est omniprésente en physique.

La turbulence forte et la turbulence d'ondes sont les deux régimes que nous pouvons rencontrer dans la nature. L'attention des mécaniciens des fluides étant focalisée avant tout sur l'hydrodynamique incompressible, c'est généralement le premier régime qui est traité dans les ouvrages sur la turbulence. Cependant, les physiciens s'intéressent à des systèmes bien plus variés, où des ondes sont souvent présentes. Dans ce cas, le second régime devient pertinent. Le parti pris dans cet ouvrage est de traiter, à parts égales, la turbulence forte (partie I) et la turbulence d'ondes (partie II). Le cadre théorique retenu sera celui de la turbulence statistiquement homogène pour laquelle un comportement universel est attendu. Chaque partie débute par un bref historique sur l'évolution des idées, et l'émergence des principaux concepts et résultats (chapitres 1 et 6). La première partie est consacrée aux lois fondamentales de la turbulence forte (chapitres 2 à 5). Nous nous limiterons aux résultats les plus importants, en commençant par l'hydrodynamique incompressible et les lois de Kolmogorov. Ondes et turbulence sont les deux piliers de la seconde partie. Nous verrons que le régime de turbulence d'ondes offre la possibilité de développer une théorie analytique (chapitres 7 à 10). Au-delà de sa beauté mathématique, cette théorie spectrale permet de comprendre en profondeur un système faiblement non-linéaire et de développer une intuition sur la physique de la turbulence forte d'ondes. Nous verrons que ces deux régimes de turbulence ne sont pas indépendants l'un de l'autre. Au contraire, l'un peut

émerger de l'autre au cours du processus de cascade ; les deux régimes peuvent également coexister et être en interaction permanente. Bien que non-exhaustif, ce livre offre un tour d'horizon relativement large sur la turbulence qui devrait permettre aux chercheurs débutants d'acquérir une connaissance fondamentale sur des sujets, parfois en plein développement.

Cet ouvrage s'est construit à partir d'un enseignement de turbulence que je délivre depuis plusieurs années à l'École polytechnique à des étudiants de Master 2 (Master de Physique des Plasmas d'Ile-de-France sous la tutelle de l'Université Paris-Saclay, l'Institut Polytechnique de Paris et Sorbonne-Université). Il est donc, en partie, le résultat d'interactions fructueuses avec mes étudiants que je tiens à remercier. Je remercie également Vincent David pour sa lecture attentive du manuscrit, et Cécile pour son aide dans la mise en forme finale. Enfin, je tiens à remercier tous mes collègues avec qui je partage ma passion sur ce sujet et qui ont contribué, à leur façon, à l'écriture du présent ouvrage ; je remercie, en particulier, Nahuel Andrés, Supratik Banerjee, Amitava Battacharjee, Éric Buchlin, Stephan Fauve, Özgür Gürçan, Lina Hadid, Romain Meyrand, Sergey Nazarenko, Alan Newell, Hélène Politano, Annick Pouquet et Fouad Sahraoui.

Sébastien Galtier, avril-juillet 2020

Première partie

**Turbulence forte**



# Chapitre 1

## Introduction

La turbulence est souvent définie comme l'état chaotique d'un fluide. L'exemple qui nous vient immédiatement à l'esprit est celui de l'eau : les turbulences dans l'eau prennent la forme de tourbillons dont la taille, la localisation et l'orientation varient constamment. Un tel écoulement est caractérisé par un comportement très désordonné difficile à prévoir, et par l'existence de multiples échelles spatiales et temporelles. Les expériences de la vie quotidienne sont nombreuses où l'on peut vérifier la présence de turbulences : les mouvements agités d'un cours d'eau en aval d'un obstacle, ceux de la fumée s'échappant d'une cheminée, ou bien encore les zones de turbulence que nous traversons parfois en avion.

Expérimenter la turbulence à notre échelle semble aisé puisqu'il n'est pas nécessaire d'utiliser de puissants microscopes ou télescopes. Une compréhension analytique détaillée de la turbulence reste cependant limitée à cause de la difficulté intrinsèque à la physique non-linéaire. De ce fait, on peut souvent lire que la turbulence est l'un des derniers grands problèmes non-résolus de la physique classique. Cette affirmation longtemps véhiculée, que l'on trouve par exemple dans l'ouvrage de [Feynman \*et al.\* \(1964\)](#), ne correspond plus à la vision moderne. En effet, même si la turbulence reste un sujet de recherche très actif, nous disposons à ce jour de nombreux résultats théoriques, numériques, expérimentaux et observationnels qui nous permettent de comprendre de manière détaillée la physique de la turbulence.

Cet ouvrage a pour objectif de présenter les principales lois fondamentales de la turbulence en réunissant pour la première fois<sup>1</sup> les régimes de turbulence forte (partie I) et de turbulence d'ondes (partie II). Nous verrons que beaucoup de résultats ont été obtenus depuis les premiers pas réalisés notamment par [Richardson \(1922\)](#), il y a près d'un siècle. Les nombreux exemples abordés dans cet ouvrage révèlent que la présentation classique de la turbulence, faite à partir des équations de Navier-Stokes ([Frisch, 1995](#) ; [Lesieur, 1997](#) ; [Chassaing, 2000](#)), s'avère très réductrice car la turbulence se retrouve dans divers milieux,

---

1. Cette remarque concerne avant tout les ouvrages en anglais car un seul ouvrage didactique sur la turbulence forte (essentiellement sur l'hydrodynamique incompressible) a été publié en français ([Chassaing, 2000](#)).

sous diverses formes. Si on se restreint à l'exemple standard de l'hydrodynamique incompressible, la simple introduction d'une rotation uniforme pour décrire des fluides géophysiques modifie drastiquement la physique de la turbulence en y ajoutant de l'anisotropie. En astrophysique, 99 % de la matière visible de l'univers est sous forme de plasma qui est en général très turbulent, or la turbulence dans les plasmas mélange ondes et tourbillons. Le régime de turbulence d'ondes, décrit dans la partie II, peut émerger d'une plaque métallique vibrante ; ici, on est loin de l'image classique des tourbillons de l'eau. Enfin, les études les plus modernes révèlent que l'inflation cosmologique qui a suivi le Big Bang pourrait trouver son origine dans la turbulence forte d'ondes gravitationnelles.

L'objectif de cette première partie est de présenter les lois fondamentales de la turbulence forte. Nous nous limiterons aux lois physiques les plus importantes. Le cadre théorique retenu sera celui d'une turbulence statistiquement homogène pour laquelle un comportement universel est attendu. Les problèmes d'inhomogénéités inhérents aux expériences de laboratoire ne seront donc pas traités. À travers les exemples abordés, nous dévoilerons peu à peu l'état des connaissances en turbulence. Pour nous aider dans cette tâche, nous commençons par une brève présentation historique.

## 1.1 Bref historique

### 1.1.1 Premières avancées cognitives

Léonard de Vinci fut probablement le premier à introduire le mot turbulence ('turbulenza') au début du XVI<sup>e</sup> siècle pour décrire les mouvements tumultueux de l'eau. Cependant, le mot turbulence ne fut employé couramment par les scientifiques que bien plus tard<sup>2</sup>.

La première avancée scientifique notable dans le domaine de la turbulence peut être attribuée à Reynolds (1883) : celui-ci mit en évidence expérimentalement que la transition entre les régimes laminaire et turbulent était liée à un nombre sans dimension – le nombre de Reynolds<sup>3</sup>. L'expérience, qu'on peut facilement reproduire en laboratoire, consiste à faire s'écouler dans un tube rectiligne transparent un filet coloré du même liquide que celui qui circule dans le tube (voir la figure 1.1). On peut montrer que la transition vers la turbulence a lieu lorsque le nombre de Reynolds devient supérieur à une valeur critique. Une étape importante dans cette découverte est le fait de constater que la tendance à former des tourbillons augmente avec la température de l'eau, or, Reynolds savait que dans ce cas la viscosité diminuait. Il montra également le rôle important joué par le développement d'instabilités dans cette transition vers la turbulence.

La Première Guerre mondiale fut propice à de nouvelles avancées importantes. Les efforts de guerre en Allemagne et, en particulier, sous

---

2. Par exemple, l'ouvrage de Boussinesq (1897) porte encore le titre évocateur : « *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section.* »

3. Le nombre de Reynolds mesure le rapport entre la force d'inertie et la force visqueuse. Nous reviendrons plus loin sur cette définition.

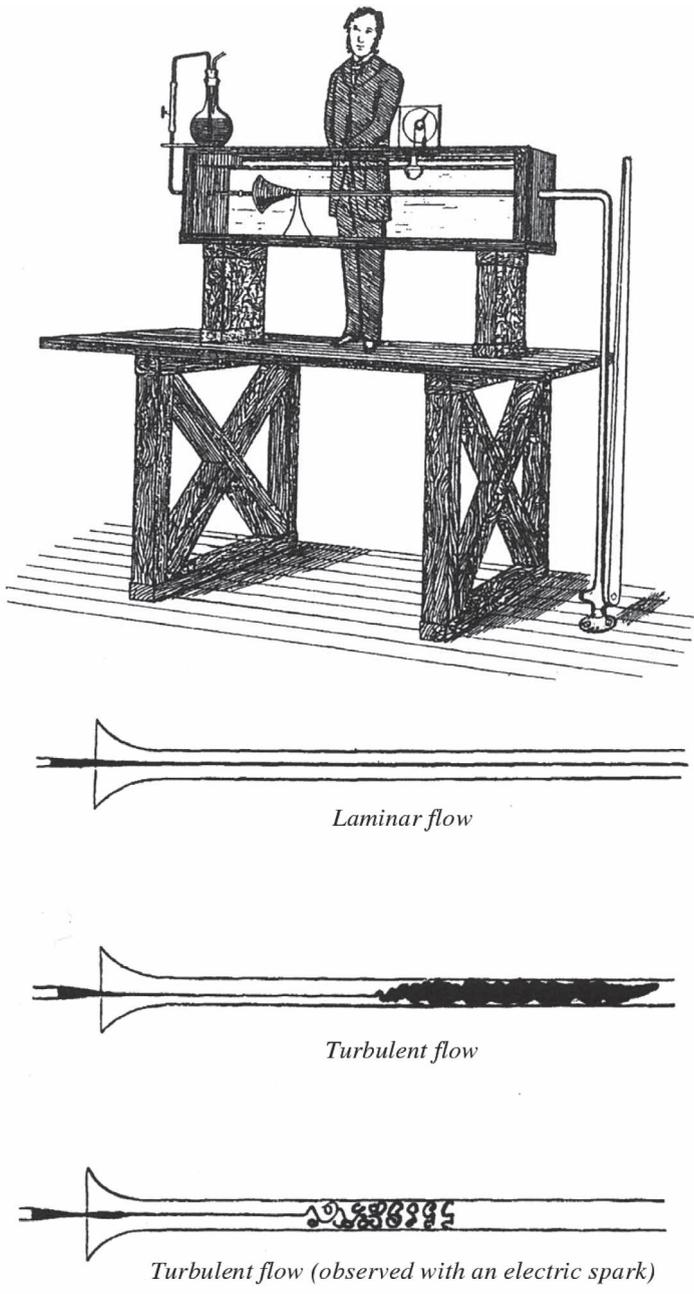


FIG. 1.1 – Expérience historique de Reynolds (1883) (en haut) et ses observations (en bas). L'appareil original est conservé à l'Université de Manchester.

l'influence de Prandtl à Göttingen, ont orienté les recherches dans le domaine de l'aérodynamique avec l'étude de la chute des bombes dans l'air ou l'eau. Il s'agit ici d'étudier, par exemple, la traînée d'une sphère ; ces travaux furent ensuite utilisés pour la conception d'avions. Après la guerre, les recherches en turbulence se sont accrues : on peut citer, par exemple, les résultats sur les effets inhomogènes dus aux parois dans les expériences en soufflerie (Burgers, 1925). Mais c'est avec Richardson (1922) qu'arrive une seconde avancée majeure en turbulence : dans son ouvrage sur les prédictions météorologiques et le calcul numérique<sup>4</sup>, Richardson introduisit le concept fondamental de cascade d'énergie. Inspiré par l'écrivain irlandais J. Swift, Richardson écrivit (page 66) : « *Big whirls have little whirls that feed on their velocity. Little whirls have lesser whirls and so on to viscosity - in the molecular sense* ». Nous trouvons ici l'idée d'une cascade de tourbillons des grandes vers les petites échelles spatiales.

C'est probablement en ayant en tête cette idée que Richardson (1926) formula la loi empirique<sup>5</sup> des 4/3 pour décrire le processus de diffusion turbulente. Cette loi diffère de celle proposée par Einstein en 1905 sur la diffusion de petites particules dans un liquide (le mouvement Brownien) qui, manifestement, n'était pas en accord avec les expériences de turbulence, lesquelles montraient une diffusion nettement plus élevée<sup>6</sup>. La nouvelle loi proposée est caractérisée par une diffusivité  $D_\ell$  non-constante et dépendant de l'échelle considérée, telle que :

$$D_\ell \sim \ell^{4/3}. \quad (1.1)$$

Cette relation traduit le fait que dans un liquide turbulent la diffusivité augmente avec la séparation moyenne  $\ell$  entre les paires de particules. Cette loi d'échelle est fondamentale car nous y trouvons les prémices de la loi exacte des 4/5 de Kolmogorov (1941a) avec laquelle elle est en accord dimensionnellement.

C'est toujours au cours de cette période de l'entre-deux-guerres qu'ont émergé les premiers travaux basés sur les corrélations<sup>7</sup> en deux points (Taylor, 1935) et l'analyse spectrale des fluctuations par transformée de Fourier qui sont devenus les fondements de la recherche moderne en turbulence (Motzfeld, 1938 ; Taylor, 1938). L'approche par les corrélations aboutit, en particulier, à l'équation de von Karman et Howarth (1938) pour une turbulence hydrodynamique incompressible, statistiquement homogène et isotrope<sup>8</sup>. Cette équation décrit la dynamique du fluide à travers des corrélateurs – des mesures en deux points dans l'espace physique. Comme nous le verrons plus loin, ce résultat est central pour l'établissement de la loi exacte des 4/5 de Kolmogorov (1941a) qui

4. On entend ici par calcul numérique, le calcul réalisé à la main avec une méthode essentiellement basée sur les différences finies.

5. Cette loi empirique ne doit pas être confondue avec la loi exacte des 4/3 qui porte sur les fonctions de structure (voir le chapitre 2).

6. Il est connu qu'un nuage de lait se dilue plus rapidement dans le thé si on donne un coup de cuiller.

7. C'est le britannique Francis Galton (1822-1911) qui semble avoir été le premier à introduire correctement le concept de corrélation pour des études statistiques en biologie.

8. C'est l'isotropie forte qui est considérée ici sur laquelle nous reviendrons plus loin.

n'est pas une équation dynamique, mais une solution statistique des équations de Navier-Stokes.

### 1.1.2 Loi de Kolmogorov et intermittence

Dans les années 1930 et sous l'impulsion du mathématicien Kolmogorov, l'école soviétique devint très active en turbulence. À cette époque, Kolmogorov travaillait sur les processus stochastiques et les fonctions aléatoires. C'est donc naturellement qu'il se pencha sur la turbulence où un vivier de données était disponible. En s'inspirant de certains travaux décrits plus haut, Kolmogorov et son étudiant Obukhov s'attelèrent à élaborer une théorie pour le cas standard de la turbulence hydrodynamique incompressible, statistiquement homogène et isotrope. En s'appuyant, en particulier, sur l'équation de von Karman et Howarth (1938), Kolmogorov (1941a,b) établit la première loi statistique exacte de turbulence – dite des 4/5 – qui fait le lien entre une fonction de structure d'ordre trois<sup>9</sup> faisant intervenir la différence de la composante selon la direction  $\boldsymbol{\ell}$  de la vitesse entre deux points distants de  $\boldsymbol{\ell}$ , la distance  $\ell$  et le taux moyen de dissipation de l'énergie cinétique  $\varepsilon$  :

$$-\frac{4}{5}\varepsilon\ell = \langle [u_{\ell}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - u_{\ell}(\mathbf{x})]^3 \rangle. \quad (1.2)$$

Pour établir cette loi universelle, Kolmogorov suppose que la turbulence pleinement développée devient isotrope à une échelle suffisamment petite et ce, quelle que soit la nature de l'écoulement moyen. Il suppose aussi que  $\varepsilon$  devient indépendant de la viscosité dans la limite des grands nombres de Reynolds (c'est-à-dire d'une faible viscosité). Après plusieurs années de recherche, une première loi exacte est établie pour laquelle il a été possible de s'affranchir du problème de fermeture non-linéaire. L'astuce utilisée pour y parvenir fut de relier le terme non-linéaire cubique à la dissipation moyenne de l'énergie dans la zone inertielle, c'est-à-dire dans un intervalle de distance borné entre les plus grandes échelles où les effets inhomogènes peuvent se faire sentir, et les plus petites échelles où la viscosité amortit les fluctuations de manière efficace. Nous reviendrons longuement sur la loi (1.2) dans le chapitre 2. La loi de Kolmogorov resta inaperçue plusieurs années (hors URSS). C'est Batchelor (1946) qui fut le premier à découvrir l'existence des articles<sup>10</sup> de Kolmogorov : il réalisa immédiatement l'importance de ces travaux dont il fit part à la communauté scientifique lors du VI<sup>e</sup> congrès de Mathématiques Appliquées tenu à Paris en 1946 (Davidson *et al.*, 2011).

De son côté, indépendamment de Kolmogorov mais en s'inspirant des idées de Richardson (1922), de Taylor (1938) ainsi que des travaux de Millionschikov (1939, 1941) – un autre étudiant de Kolmogorov, Obukhov (1941) proposa une

9. Kolmogorov fut probablement le premier à s'intéresser aux fonctions de structure qui sont construites à partir des différences et non des produits d'un champ (ici le champ de vitesse) comme ce fut le cas avec l'équation de von Karman et Howarth (1938).

10. La version anglaise des articles russes était parvenue à la bibliothèque de Cambridge Philosophical Society.

théorie (non-exacte) spectrale de la turbulence basée sur la relation :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + D = T, \quad (1.3)$$

avec  $E$  le spectre d'énergie,  $D$  la dissipation visqueuse et  $T$  le transfert d'énergie (dans l'espace de Fourier). La fermeture artificielle proposée repose sur une moyenne sur les petites échelles. Il obtint alors comme solution le spectre<sup>11</sup> :

$$E(k) \sim k^{-5/3}, \quad (1.4)$$

qui est compatible dimensionnellement avec la loi exacte de Kolmogorov. En prolongeant cette étude, Obukhov fut ensuite capable d'apporter une justification théorique à la loi d'échelle empirique de diffusion de [Richardson \(1926\)](#). Plus tard, [Yaglom \(1949\)](#) obtint une nouvelle loi exacte appliquée cette fois au scalaire passif : ce modèle décrit comment évolue un scalaire, par exemple la température ou la concentration d'un produit, dans un fluide turbulent pour lequel la vitesse est donnée.

Pendant une courte période, Kolmogorov pensa que le taux moyen de dissipation de l'énergie était la clef pour établir une loi exacte plus générale décrivant la statistique à n'importe quel ordre en termes de fonction de structure de la vitesse. Cette loi générale aurait permis d'obtenir une solution statistique complète au problème de turbulence hydrodynamique. Mais en 1944, Landau<sup>12</sup> pointa la faiblesse de la démonstration (proposée par Kolmogorov lors d'un séminaire) sur laquelle nous reviendrons plus tard dans le chapitre 2 : elle ne prend pas en compte les possibles fluctuations locales de  $\varepsilon$ , une propriété appelée intermittence. Il fallut une vingtaine d'années pour que [Obukhov \(1962\)](#) et [Kolmogorov \(1962\)](#) proposent, en réponse à Landau, un modèle (et non une loi exacte) de l'intermittence basé sur une statistique log-normale qui incorpore la loi exacte des 4/5 comme un cas particulier. La réponse de Kolmogorov fut donnée (en français) lors d'une conférence tenue à Marseille en 1961 pour célébrer l'ouverture de l'Institut de mécanique statistique de la turbulence. Cette conférence est devenue célèbre car elle regroupait pour la première fois tous les grands spécialistes (américains, européens et soviétiques) du sujet. C'est également au cours de cette conférence que le premier spectre d'énergie en  $k^{-5/3}$  mesuré en mer fut annoncé ([Grant et al., 1962](#)). Fondamentalement, la notion d'intermittence est liée à la concentration de la dissipation dans des structures localisées de vorticité. Comme le mentionna Kolmogorov, l'intermittence peut modifier légèrement l'exposant  $-5/3$  du spectre d'énergie, mais sa contribution la plus importante est attendue pour des quantités statistiques d'ordres plus élevés (la loi exacte n'étant bien sûr pas affect e). Cette nouvelle formulation est à l'origine de travaux, en particulier, sur le concept de dimension fractale

11. En général, cette solution est appel e spectre de Kolmogorov mais il serait plus juste de la nommer spectre de Kolmogorov-Obukhov. Ce spectre fut obtenu indépendamment par d'autres chercheurs comme [Onsager \(1945\)](#) ou [Heisenberg \(1948\)](#).

12. La remarque de Landau ([Landau et Lifshitz, 1987](#)) se trouve dans l'ouvrage original de 1944 ([Davidson et al., 2011](#)).

fonction de transfert, 70  
fractale, 51

## H

hélicité croisée, 103  
hélicité magnétique, 110  
hypothèse de Taylor, 98

## I

imprédictibilité, 15  
interaction locale, non-locale, 70  
interactions résonnantes, 145  
intermittence, 8, 48, 108, 199, 218  
isotherme, 124

## J

Joule, 29

## K

Kármán-Howarth (équation), 37, 103  
Kármán-Howarth  
(formulation faible), 46, 107  
Kolmogorov, 7, 56  
Kraichnan, 9, 69

## L

Leray, 43  
Loi de Duchon & Robert, 47  
loi de probabilité, 21  
loi des  $4/3$ , 41, 103  
loi des  $4/5$ , 41  
loi exacte, 125  
loi fractale, 54  
loi log-normale, 57  
loi log-Poisson, 59, 109  
loi zéroième, 34, 103  
Lorenz, 15

## M

mémoire spatio-temporelle, 20, 51  
méthode des échelles multiples, 146,  
157  
MHD, 100, 223  
modèle  $\beta$ , 51  
modèle en couche, 92  
modèle log-normal, 56  
modèle log-Poisson, 57  
mode lent, 201, 230, 234  
moment, 21, 74  
moyenne d'ensemble, 19, 33, 66,  
158, 176

## N

Navier-Stokes (équations), 29  
nombre de Reynolds, 4, 19, 29, 101  
nombre de Reynolds magnétique, 101  
nombre de Rossby, 199  
nuage interstellaire, 42, 122

## O

Obukhov, 7, 56  
onde acoustique, 149  
onde capillaire, 148, 169  
onde d'Alfvén, 113, 224  
onde de gravité, 148, 169  
onde de Kelvin, 150  
onde de Rossby, 148  
onde de surface, 144  
onde élastique, 149  
onde gravitationnelle, 150, 249  
onde inertielle, 148, 204  
onde magnétostrophique, 149  
onde optique, 149  
onde quantique, 150  
opérateur de projection, 68

## P

phénoménologie compressible, 126  
phénoménologie de Fjørtoft, 80

phénoménologie de Kolmogorov, 42,  
72, 111  
phénoménologie de Taylor, 43

## Q

QN, 75

## R

relativité générale, 249

## S

simulation numérique directe, 12,  
189, 236  
Soleil, 223, 237  
solution faible, 43  
solution non-stationnaire, 91  
solution thermodynamique, 184, 232  
spectre d'énergie, 67  
spectre d'Iroshnikov-Kraichnan, 227  
spectre de Kolmogorov, 72, 91  
spectre de Kolmogorov-Zakharov,  
184, 208, 253  
symétrie, 21

## T

taux d'amortissement, 76  
taux moyen de dissipation, 33, 72

temps non-linéaire, 42  
terme séculaire, 152  
théorie spectrale, 9  
tokamak, 230  
tourbillon, 17  
transformation de Zakharov, 84, 147,  
183, 260  
triade d'interaction, 68  
tube de vorticité, 38  
tube magnétique, 111  
turbulence, 4  
turbulence anisotrope, 110, 113,  
199, 207, 228  
turbulence compressible, 122, 240  
turbulence homogène, 35, 66, 176  
turbulence interstellaire, 122  
turbulence isotrope, 40, 70  
turbulence stationnaire, 40, 72  
turbulence supersonique, 126

## V

variable canonique, 173, 223  
variables d'Elsässer, 104, 223  
vent solaire, 98, 108, 116, 227  
vent solaire (chauffage), 100, 104,  
108

## Z

Zakharov, 11, 147  
zone inertielle, 37, 72, 73, 124