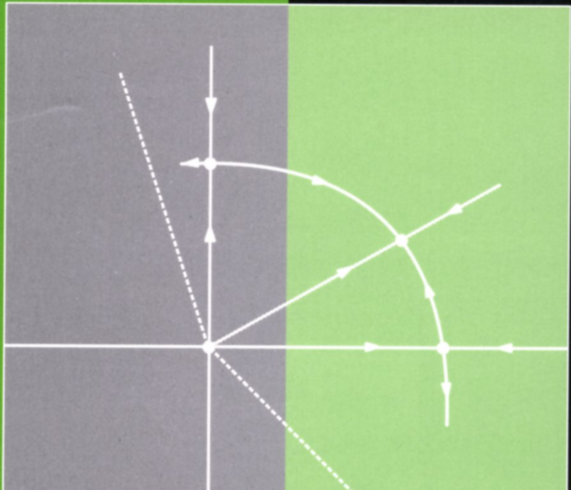
PHYSIQUE

Jean ZINN-JUSTIN

Transitions de phase et groupe de renormalisation



SAVOIRS ACTUELS

CNRS EDITIONS

EDP SCIENCES

Jean Zinn-Justin

Transitions de phase et groupe de renormalisation

S A V O I R S   A C T U E L S

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Publié avec le concours du ministère chargé de l'enseignement supérieur et de la recherche.

ISBN EDP Sciences 2-86883-790-5

ISBN CNRS ÉDITIONS 2-271-06319-1

Table des matières

Introduction **xiii**

Bibliographie **xvii**

1 Théorie quantique des champs et groupe de renormalisation 1
- 1.1 L'électrodynamique quantique : une théorie quantique des champs . . . 3
- 1.2 L'électrodynamique quantique et le problème des infinis . . . 5
- 1.3 Méthode de renormalisation . . . 8
- 1.4 Théorie quantique des champs et groupe de renormalisation . . 10
- 1.5 Le triomphe de la théorie quantique des champs : le Modèle Standard . . . 12
- 1.6 Phénomènes critiques : d'autres infinis . . . 15
- 1.7 Le groupe de renormalisation de Kadanoff–Wilson . . . 17
- 1.8 Théories quantiques des champs effectives . . . 19

2 Valeurs moyennes gaussiennes. Méthode du col 23
- 2.1 Fonction génératrice . . . 24
- 2.2 Valeurs moyennes gaussiennes. Théorème de Wick . . . 24
  - 2.2.1 Intégrales gaussiennes paires . . . 25
  - 2.2.2 Intégrale gaussienne générale . . . 26
  - 2.2.3 Valeurs moyennes gaussiennes et théorème de Wick . . 27
- 2.3 Mesure gaussienne perturbée. Contributions connexes . . . 28
  - 2.3.1 Mesure gaussienne perturbée . . . 28
  - 2.3.2 Contributions connexes . . . 30
- 2.4 Diagrammes de Feynman . . . 31
- 2.5 Valeurs moyennes. Fonction génératrice. Cumulants . . . 32
  - 2.5.1 La fonction à deux points . . . 32
  - 2.5.2 Fonctions génératrices. Cumulants . . . 34
- 2.6 Méthode du col . . . 35
  - 2.6.1 Intégrale réelle . . . 36
  - 2.6.2 Intégrale de contour complexe . . . 39

2.7 Méthode du col à plusieurs variables. Calcul des fonctions génératrices 42
2.7.1 Méthode du col 42
2.7.2 Calcul des fonction génératrices 43

3 Universalité et limite continue **51**
3.1 Théorème de la limite centrale des probabilités 51
3.1.1 Transformation de Fourier 52
3.1.2 Théorème de la limite centrale et conséquences 54
3.1.3 Remarques diverses 56
3.1.4 Variables aléatoires à valeurs entières 58
3.2 Universalité et points fixes de transformations 61
3.2.1 Situation générique 62
3.2.2 Distribution centrée 64
3.3 Marche au hasard et mouvement brownien 66
3.3.1 Marche dans l'espace continu 67
3.3.2 Invariance par translation et localité 67
3.3.3 Fonction génératrice des cumulants 69
3.3.4 Marche au hasard : comportement asymptotique 70
3.3.5 Limite du temps continu 71
3.3.6 Corrections à la limite continue 72
3.3.7 Marche au hasard sur réseau 73
3.3.8 Séries de Fourier 75
3.3.9 Comportement asymptotique. Limite continue 76
3.3.10 Dilatation de l'échelle des temps et points fixes 78
3.4 Marche au hasard : remarques complémentaires 79
3.4.1 Distribution asymptotique 79
3.4.2 Équilibre détaillé 80
3.5 Mouvement brownien et intégrale de chemin 81

4 Mécanique statistique classique : une dimension **89**
4.1 Interactions de proches voisins. Matrice de transfert 90
4.1.1 Interactions de proches voisins 91
4.1.2 Matrice de transfert et fonction de partition 92
4.1.3 Espace de Hilbert et matrice de transfert 92
4.2 Fonctions de corrélation 94
4.2.1 Fonction à un point 94
4.2.2 Fonction de corrélation à p points 95
4.3 Limite thermodynamique 95
4.3.1 La fonction de partition 95
4.3.2 Fonction à un point 96
4.3.3 Fonction à deux points et longueur de corrélation 97
4.4 Fonctions connexes et propriété d'amas 98
4.4.1 Variable moyenne et limite thermodynamique 100
4.5 Modèles statistiques : exemples simples 101

4.6 Le modèle gaussien 103
4.6.1 Matrice de transfert gaussienne : propriétés algébriques 104
4.6.2 Matrice de transfert. Vecteurs et valeurs propres 106
4.6.3 Fonction de partition. Fonctions de corrélation 107
4.7 Modèle gaussien : limite continue 109
4.7.1 Limite continue et hamiltonien quantique 109
4.7.2 Décimation et limite continue 111
4.8 Modèles plus généraux : limite continue 113

5 Limite continue et intégrale de chemin 121
5.1 Intégrale de chemin gaussienne 121
5.1.1 Fonctionnelle génératrice. Dérivée fonctionnelle 123
5.1.2 Fonctions de corrélations gaussiennes 125
5.1.3 Calcul de l'intégrale gaussienne 126
5.2 Corrélations gaussiennes. Théorème de Wick 128
5.3 Mesure gaussienne perturbée 129
5.4 Calculs perturbatifs : exemples 131
5.4.1 Fonction de partition 131
5.4.2 Fonctions de corrélation 132

6 Systèmes ferromagnétiques. Corrélations 137
6.1 Systèmes ferromagnétiques : définition 138
6.1.1 Distribution de spin moyen et énergie libre 139
6.1.2 Transformation de Legendre 140
6.1.3 Distribution du spin moyen et potentiel thermodynamique 142
6.2 Fonctions de corrélation. Représentation de Fourier 143
6.2.1 Fonctions connexes et propriété d'amas 144
6.2.2 Invariance par translation et représentation de Fourier 145
6.3 Transformation de Legendre et fonctions de vertex 147
6.3.1 Transformation de Legendre : généralisation 147
6.3.2 Fonctions de vertex 150
6.3.3 Modèle gaussien 151
6.4 Transformation de Legendre et méthode du col 152
6.5 Fonctions de vertex à deux et quatre points 153

7 Transitions de phase : généralités et exemples 157
7.1 Température infinie ou spins indépendants 160
7.1.1 Modèle à un site 160
7.1.2 Spins indépendants 162
7.2 Transitions de phase en dimension infinie 163
7.2.1 Distribution de spin moyen. Fonctions thermodynamiques 164
7.2.2 Limites de basse et haute température 166
7.2.3 Distribution du spin moyen et transition de phase . . . 167

7.3 Universalité en dimension infinie 169
7.4 Transformations, points fixes et universalité 172
7.5 Interactions de portée finie en dimension finie 174
7.5.1 Symétries discrètes : le modèle d'Ising 175
7.5.2 Symétries continues : l'exemple du groupe orthogonal 176
7.6 Modèle d'Ising : matrice de transfert 178
7.6.1 Matrice de transfert 178
7.6.2 Limite de dimension transverse infinie : transitions de phase 180
7.7 Symétries continues et matrice de transfert 183
7.8 Symétries continues et modes de Goldstone 185

8 Approximation quasi-gaussienne : universalité, dimension critique 189

8.1 Interactions à deux spins de courte portée 191
8.2 Le modèle gaussien : la fonction à deux points 194
8.2.1 Quantités homogènes 195
8.2.2 Fonction à deux points 196
8.2.3 Le comportement critique 197
8.2.4 Domaine critique 198
8.3 Modèle gaussien et marche au hasard 199
8.4 Modèle gaussien et intégrale de champ 200
8.4.1 Maximum de l'intégrant et fonction à deux points . . . 201
8.4.2 Intégration gaussienne 203
8.4.3 Calcul explicite de la fonction à deux points 203
8.4.4 Réseau et limite continue 205
8.5 Approximation quasi-gaussienne 205
8.6 La fonction à deux points : universalité 207
8.7 Approximation quasi-gaussienne et théorie de Landau 210
8.8 Symétries continues et modes de Goldstone 212
8.9 Corrections à l'approximation quasi-gaussienne 214
8.9.1 Calcul de la correction 214
8.9.2 Le comportement critique 217
8.10 Approximation de champ moyen et corrections 220
8.10.1 Représentation de spins moyens et méthode du col . . 220
8.10.2 Méthode du col : un paramètre de développement . . . 222
8.11 Points tricritiques 224

9 Groupe de renormalisation : formalisme général 231

9.1 Théorie statistique des champs. Hamiltonien de Landau 233
9.1.1 Théorie statistique des champs effective 233
9.1.2 Hamiltonien de Landau 234
9.2 Fonctions de corrélation connexes. Fonctions de vertex 235
9.3 Le groupe de renormalisation : idée générale 237
9.3.1 Équations de groupe de renormalisation 237

9.3.2 Fonctions génératrices et fonctions de vertex 238
9.3.3 Hamiltonien de point fixe 240
9.4 Flots des hamiltoniens : points fixes et stabilité 241
9.4.1 Points fixes et flot linéarisé 242
9.4.2 Classification des vecteurs propres 243
9.4.3 EGR : autre forme 244
9.4.4 Le domaine critique : propriétés d'échelle 245
9.5 Le point fixe gaussien 246
9.5.1 Le point fixe gaussien 247
9.5.2 Hamiltonien quadratique isotrope général 248
9.6 Perturbations propres : analyse générale 250
9.6.1 Perturbations propres 250
9.6.2 Représentation de Fourier 252
9.7 Un point fixe non gaussien : le développement en ε 253
9.7.1 Points fixes 253
9.7.2 Autres vecteurs propres 256
9.8 Valeurs propres et dimensions des polynômes locaux 258

10 Groupe de renormalisation perturbatif : calculs explicites 261
10.1 Hamiltonien critique et développement perturbatif 262
10.2 Diagrammes de Feynman à l'ordre d'une boucle 264
10.3 Point fixe et comportement critique 267
10.3.1 La fonction à deux points 267
10.3.2 La fonction à quatre points 268
10.3.3 Point fixe 270
10.3.4 La dimension du champ à l'ordre ε^2 271
10.4 Le domaine critique 273
10.4.1 Fonction à deux points 273
10.4.2 Groupe de renormalisation 274
10.4.3 Fonction à deux points : comportement d'échelle dans le domaine critique 276
10.5 Modèle avec symétrie orthogonale $O(N)$ 277
10.6 Groupe de renormalisation près de la dimension 4 279
10.6.1 Hamiltonien critique et EGR 279
10.6.2 Domaine critique 280
10.7 Quantités universelles : résultats numériques 282

11 Théories des champs σ^4 : champ à N composantes 287
11.1 GR : remarques générales 288
11.2 Flots de gradient 289
11.2.1 Reparamétrisation 290
11.2.2 Flots et variation du potentiel 290
11.2.3 Points fixes et stabilité 291

11.3 Modèle avec anisotropie cubique 293
11.3.1 Groupe de renormalisation et points fixes 294
11.3.2 Flot linéarisé et valeurs propres 295
11.4 Expressions générales explicites : étude détaillée 296
11.4.1 Groupe de renormalisation 297
11.4.2 Stabilité du point fixe isotrope 298
11.4.3 Flots de gradients : points fixes, stabilité et dimension du champ 299
11.5 Exercice : modèle général à deux paramètres 302

12 Théorie statistique des champs : développement perturbatif 307
12.1 Fonctionnelles génératrices 308
12.2 Théorie des champs gaussienne. Théorème de Wick 309
12.3 Développement perturbatif 311
12.3.1 Développement perturbatif 312
12.3.2 Diagrammes de Feynman : boucles 313
12.3.3 Diagrammes connexes et 1-irréductibles 314
12.3.4 Exemple : l'interaction σ^4 315
12.4 Développement en nombre de boucles 318
12.4.1 Ordre dominant : diagrammes en arbre 319
12.4.2 Ordre suivant : diagrammes à une boucle 320
12.5 Prolongement et régularisation dimensionnels 322
12.5.1 Prolongement dimensionnel 322
12.5.2 Régularisation dimensionnelle 323
12.5.3 Exemples 325

13 Théorie des champs σ^4 près de la dimension 4 331
13.1 Hamiltonien effectif. Renormalisation 332
13.1.1 Hamiltonien effectif 333
13.1.2 Renormalisation gaussienne 333
13.1.3 Analyse dimensionnelle et dimension critique 334
13.1.4 Théorème de renormalisation 336
13.2 Équations de groupe de renormalisation 338
13.2.1 EGR pour la théorie critique 339
13.2.2 Solution perturbative de l'EGR 340
13.3 Solution des EGR : le développement en ε 342
13.3.1 Solution générale 342
13.3.2 Calculs à l'ordre d'une boucle : point fixe et lois d'échelle 344
13.3.3 La fonction $\eta(g)$ à deux boucles et l'exposant η 346
13.4 Interaction effective et interaction renormalisée 348
13.5 Le domaine critique au-dessus de T_c 350
13.5.1 Solution des EGR 351
13.5.2 Fonctions à aimantation fixée ou au-dessous de T_c . . . 353

14 Théorie $(\phi^2)^2$ avec symétrie $O(N)$: limite $N \to \infty$ 355
14.1 Préliminaires algébriques . . . 356
14.2 Intégrale sur le champ ϕ : le déterminant . . . 357
14.2.1 Le déterminant : définition perturbative . . . 358
14.2.2 Premiers diagrammes à une boucle : discussion . . . 359
14.3 Limite $N \to \infty$: le domaine critique . . . 361
14.4 La théorie des champs $(\phi^2)^2$ pour $N \to \infty$ . . . 364
14.5 Partie singulière de l'énergie libre et équation d'état . . . 367
14.6 Les fonctions à deux points $\langle\lambda\lambda\rangle$ et $\langle\phi^2\phi^2\rangle$ . . . 369
14.7 Groupe de renormalisation et corrections aux lois d'échelles . . 372
14.7.1 Les fonctions du groupe de renormalisation . . . 372
14.7.2 Corrections dominantes aux relations d'échelle . . . 373
14.8 Le développement en $1/N$ . . . 375
14.8.1 Analyse dimensionnelle . . . 375
14.8.2 Application : développement perturbatif, singularités infrarouges et comportement à grande impulsion . . . 376
14.9 L'exposant η à l'ordre $1/N$ . . . 377
14.10 Le modèle σ non linéaire . . . 378

15 Le modèle σ non linéaire 381
15.1 Le modèle σ non linéaire sur réseau . . . 382
15.2 Développement de basse température . . . 383
15.2.1 Paramétrisation . . . 384
15.2.2 Développement perturbatif . . . 386
15.2.3 Point fixe gaussien et perturbations . . . 387
15.3 Limite continue formelle . . . 389
15.4 Régularisation . . . 390
15.5 Divergences d'impulsion nulle ou infrarouges . . . 391
15.6 Groupe de renormalisation . . . 393
15.6.1 Renormalisation et EGR . . . 393
15.6.2 Calculs à l'ordre d'une boucle . . . 395
15.7 Solution des EGR. Points fixes . . . 397
15.7.1 Points fixes . . . 398
15.7.2 Intégration des EGR : $d > 2$, $g < g^*$ . . . 399
15.8 Fonctions de corrélation : forme d'échelle . . . 400
15.9 Le domaine critique : exposants critiques . . . 402
15.10 Dimension 2 . . . 403
15.10.1 Le modèle non-abélien . . . 404
15.10.2 Le cas abélien $N = 2$ . . . 405
15.11 La théorie des champs $(\phi^2)^2$ à basse température . . . 407

16 Groupe de renormalisation fonctionnel **411**

16.1 Intégration partielle et variation du hamiltonien 412
16.1.1 Intégration partielle 412
16.1.2 Forme différentielle 414
16.1.3 Évolution du hamiltonien 416
16.1.4 Fonctionnelle connexe et solution formelle 417
16.1.5 Fonctions de corrélation 419
16.1.6 Renormalisation du champ 420
16.2 Intégration sur les modes de grande impulsion et EGR 420
16.2.1 EGR 421
16.2.2 Représentation de Fourier 422
16.2.3 Développement en puissances du champ 423
16.2.4 Fonctions de corrélation 424
16.3 Solution perturbative : théorie ϕ^4 426
16.4 EGR : forme standard 430
16.5 Dimension 4 433
16.5.1 Conditions de renormalisation. Fonctions β et η 433
16.5.2 Solution des EGR à l'ordre g 435
16.5.3 Solution des EGR à l'ordre g^2 435
16.6 Point fixe : développement en ε 439
16.7 Stabilité locale du point fixe 441
16.7.1 Point fixe gaussien 442
16.7.2 Dimension $d = 4 - \varepsilon$: perturbations ϕ^2 et ϕ^4 444
16.7.3 Perturbations brisant la symétrie $\mathbb{Z}_2$ 445

Appendice A : Compléments techniques **447**

A.1 Fonctions Γ, ψ, δ 447
A.1.1 Distribution de Dirac 448
A.2 Le propagateur massif en dimension 2 449
A.3 Déterminants d'opérateurs 449
A.4 Le groupe orthogonal 450
A.5 Transformation de Fourier : décroissance et régularité 451
A.5.1 Mesures positives discrètes et séries de Fourier 451
A.5.2 Transformation de Fourier 455

Appendice B : Transitions de phase : généralités **459**

B.1 Fondamental de la matrice de transfert 459
B.2 Paramètre d'ordre et propriété d'amas 460
B.3 Dynamiques stochastiques et transitions de phase 462

Appendice C : Développement en $1/N$: quelques calculs **465**

C.1 Diagramme de Feynman à une boucle 465
C.2 La fonction à deux points à l'ordre $1/N$ pour $u \to 0$ 466

Appendice D : Groupe de renormalisation fonctionnel : compléments **469**

D.1 GRF et équations de champ 469
D.2 GRF : transformation de Legendre 472
D.3 GRF et régularisation dimensionnelle 475

Index **477**

Introduction

La théorie quantique des champs est à la base d'une partie notable des développements théoriques de la physique du vingtième siècle. Le modèle qui décrit toutes les interactions fondamentales à l'échelle microscopique, en dehors de la gravitation, est une théorie quantique des champs. De façon plus surprenante, la théorie quantique des champs a permis de comprendre les propriétés macroscopiques singulières d'une large classe de transitions de phase au voisinage de la transition.

Cependant, à la différence de la mécanique newtonienne ou quantique non relativiste, la théorie quantique des champs dans sa formulation la plus immédiate conduit à de graves difficultés conceptuelles à cause de l'apparition d'infinis dans le calcul des observables physiques. Le problème des infinis a d'abord été résolu de façon empirique par une méthode appelée renormalisation. Cette méthode n'a trouvé une interprétation satisfaisante que plus tard, dans le cadre du *groupe de renormalisation*. Le problème des infinis a ainsi été relié à un phénomène inattendu, le non-découplage des différentes échelles de physique.

C'est dans le cadre de la physique statistique et des transitions de phase continues que la discussion de ces problèmes conceptuels est la plus simple. Cet ouvrage tente donc d'introduire de façon élémentaire les notions de limite continue et d'universalité dans les systèmes aléatoires à un grand nombre de degrés de liberté. Nous insisterons sur l'importance des mesures gaussiennes et leurs relations avec l'approximation de champ moyen et la théorie de Landau. Nous montrerons que les approximations quasi-gaussiennes ou de champ moyen ne peuvent pas décrire correctement les transitions de phase. Nous attribuerons cette difficulté au couplage d'échelles de physique très différentes, alors même que les interactions sont locales, c'est-à-dire à courte portée. Pour analyser ce problème, un concept nouveau est nécessaire : le groupe de renormalisation, dont les points fixes permettent de comprendre l'universalité de la physique à grande distance au-delà du champ moyen.

Les arguments de groupe de renormalisation conduisent alors à l'idée que les corrélations à grande distance près de la température de transition peuvent être décrites par des théories statistiques locales des champs, formellement des théories quantiques des champs en temps imaginaire.

Cet ouvrage, issue de trois années d'enseignement à l'université Paris 7, est organisé de la manière suivante.

Au chapitre 1, nous commençons par une courte introduction semi-historique, qui essaie de décrire l'évolution des idées depuis les premiers pas de la théorie quantique des champs [1–4] jusqu'à l'application des méthodes de groupe de renormalisation à la théorie des transitions de phase.

Dans le chapitre 2, nous avons rassemblé un certain nombre de résultats techniques sur les fonctions génératrices, les mesures gaussiennes et la méthode du col qui sont indispensables pour la compréhension de l'ouvrage.

Le chapitre 3 aborde plusieurs sujets essentiels de l'ouvrage : les notions de limite continue et d'universalité, à travers les exemples du théorème de la limite centrale et de la marche au hasard. Nous montrons que l'universalité a comme origine l'hypothèse de faible déviation de la valeur moyenne des distributions de probabilité, ce qui se traduit par une hypothèse de localité de la marche au hasard. Dans les deux cas, la propriété d'universalité se traduit par l'apparition de distributions gaussiennes asymptotiques. Nous montrons alors, qu'au-delà du calcul direct, l'universalité peut aussi se comprendre comme résultant de points fixes de transformations agissant sur l'espace des distributions de probabilité. Cela nous permettra, déjà à travers ces exemples très simples, d'introduire le langage du groupe de renormalisation. Enfin, l'existence de limites continues. conduit naturellement à décrire les processus en terme d'intégrales de chemin.

Dans le chapitre 4, nous abordons le sujet principal de l'ouvrage, l'étude de systèmes de la physique statistique classique, à travers l'exemple de modèles uni-dimensionnels. Cela nous permet d'introduire le langage de la physique statistique, comme les fonctions de corrélation, la limite thermodynamique, la longueur de corrélation... Même si les systèmes uni-dimensionnels avec interactions de courte portée n'ont pas de transition de phase, il est possible de définir une limite continue au voisinage de la température nulle. De plus, dans le cas d'interactions à portée finie, ces modèles peuvent être résolues exactement par la méthode de la matrice de transfert, ce qui en fait des exemples pédagogiques intéressants.

La limite continue des modèles uni-dimensionnels conduit, de nouveau à des intégrales de chemin, dont nous discutons quelques propriétés au chapitre 5 (pour plus de détails voir, par exemple, la réf. [5]).

Au chapitre 6, nous définissons des systèmes statistiques plus généraux, en dimension d'espace arbitraire. Par commodité, nous utilisons le langage ferromagnétique même si, à travers les propriétés d'universalité, les résultats qui seront obtenus dans la suite de l'ouvrage s'appliquent à des systèmes statistiques plus généraux. Au-delà des fonctions de corrélation générales et connexes (dont nous rappelons les propriétés de décroissance ou propriété d'amas), que nous avons déjà définies dans les chapitres précédents, nous introduisons les fonctions de vertex, qui sont liées au potentiel thermodynamique. Énergie libre et potentiel thermodynamique, comme fonctions de corrélation connexes et fonctions de vertex, sont reliés par une transformation de Legendre dont nous étudions quelques propriétés.

Le chapitre 7 est dédié à la notion de transitions de phase, une notion qui est loin d'être triviale dans la mesure où une transition de phase ne peut être engendrée que par l'interaction d'un nombre infini de degrés de liberté. Nous commençons par résoudre exactement un modèle dans la limite où le nombre de dimensions de l'espace tend vers l'infini. Un tel modèle exhibe une transition de phase de type quasi-gaussien ou de champ moyen, comme nous le verrons plus loin. Ensuite, nous discutons de l'existence de transitions de phase en fonction de la dimension d'espace. Nous insistons sur la différence entre modèles avec symétries discrètes et continues en dimension deux.

Au chapitre 8, nous examinons en détail les propriétés universelles des transitions de phases dans les approximations quasi-gaussienne ou de champ moyen. Nous étudions les singularités des fonctions thermodynamiques au point de transition ainsi que le comportement à grande distance de la fonction à deux points. Nous résumons les propriétés d'universalité sous la forme de la théorie de Landau [6]. Nous soulignons les particularités des modèles avec symétrie continue à basse température dues à l'apparition de modes de Goldstone. Enfin, nous évaluons les corrections au modèle quasi-gaussien et montrons que l'approximation quasi-gaussienne n'est cohérente qu'en dimension d'espace supérieure à 4 (nous inspirant de la présentation dans [7]). Nous mentionnons l'existence possible de points tricritiques.

Au chapitre 9, nous introduisons la notion générale de groupe de renormalisation [4] dans l'esprit de l'ouvrage [8]. Nous étudions le rôle des points fixes et leurs propriétés de stabilité. Nous exhibons un point fixe particulier, le point fixe gaussien qui est stable en dimension supérieure à 4. Nous identifions la perturbation principale au point fixe gaussien en dimension ≤ 4. Nous discutons la possibilité d'identifier un point fixe non-gaussien au voisinage de la dimension 4.

Au chapitre 10, nous montrons qu'avec les hypothèses formulées au chapitre 9, il est possible de trouver, en effet, un point fixe non-gaussien en dimension $d = 4 - \varepsilon$ [9], à la fois dans des modèles avec symétries de réflexion et de rotation. Nous introduisons brièvement les méthodes de théorie des champs [10, 11] que nous reprenons dans les chapitres suivants. Enfin, nous présentons une sélection de résultats numériques concernant des exposants critiques et certains rapports universels d'amplitude [12–16].

Le chapitre 11 contient une discussion générale des équations de groupe de renormalisation, et des propriétés des points fixes correspondants, de toute une classe de modèles qui possèdent des symétries plus générales que les groupes de réflexion et rotation considérés auparavant, généralisant quelque peu les résultats présentés dans [7, 17]. En particulier, une intéressante conjecture, reliant décroissance des fonctions de corrélation et stabilité des points fixes, émerge ainsi.

Avec le chapitre 12, commence une présentation plus systématique des méthodes de théorie des champs. Au-delà de la simple généralisation de méthodes perturbatives déjà présentées dans les chapitres précédents, plusieurs concepts nouveaux sont introduits comme le développement en nombre de boucles, le prolongement et la régularisation dimensionnels [18].

Muni de ces outils techniques, nous pouvons alors justifier, au chapitre 13, les équations de groupe de renormalisation asymptotique de la théorie des champs [3, 19–23]. Des propriétés génerales d'universalité s'en déduisent, ainsi que le calcul de quantités universelles en puissances de la déviation $\varepsilon = 4 - d$ à la dimension 4.

La théorie des champs avec symétrie de rotation de type $O(N)$ peut être résolue dans la limite $N \to \infty$, comme nous le montrons au chapitre 14. Toutes les propriétés universelles démontrées dans le cadre du développement en ε peuvent alors être démontrées, à dimension fixée, dans le cadre d'un développement en $1/N$ [24–33].

Dans les modèles avec symétrie continue, la phase de basse température est dominée à grande distance par l'interaction de modes de Goldstone (de masse nulle). Cette interaction est décrite par le modèle σ non-linéaire. Son étude, par le groupe de renormalisation, permet de généraliser les lois d'échelles de la théorie critique à la transition à toute la phase de basse température et d'étudier les propriétés des transitions de phase au voisinage de la dimension 2 [34–37].

Le groupe de renormalisation de la théorie quantique des champs est un groupe de renormalisation asymptotique qui est basé sur l'hypothèse que le point fixe pertinent est proche du point fixe gaussien. Dès l'origine, des formes plus générales du groupe de renormalisation ne nécessitant pas une telle hypothèse [38–40] ont été proposées. Elles prennent la forme d'équations fonctionnelles qui décrivent l'évolution de l'interaction effective, mais qui sont d'un maniement beaucoup plus difficile que les équations issues de la théorie des champs. Cependant, dans une période récente, elles ont inspiré divers schémas d'approximations différents des développements perturbatifs de la théorie des champs [41]. Pour des raisons à la fois pédagogiques et, donc, pratiques, il nous a paru utile de les décrire dans cet ouvrage.

Enfin, les appendices rassemblent différentes considérations techniques utiles pour la compréhension du texte, ou quelques développements supplémentaires.

Bibliographie

[1] Beaucoup de détails intéressants et des références sur l'histoire primitive de l'Électrodynamique Quantique et du problème des divergences peuvent être trouvés dans :
S. Weinberg, *The Theory of Quantum Fields*, vol. 1, chap. 1, Cambridge (Cambridge Univ. Press 1995).
Nombre d'articles originaux sont reproduits dans :
J. Schwinger éd., *Selected Papers in Electrodynamics* (Dover, New York 1958).
Voir aussi :
N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Interscience, New York 1959).

[2] Une revue de la situation après la construction du Modèle Standard de la physique des interactions fondamentales peut être trouvée dans :
Methods in Field Theory, Les Houches, 1975, R. Balian et J. Zinn-Justin éds. (North-Holland, Amsterdam 1976) ;
C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York 1980).
Une sélection d'articles originaux a été reproduite dans :
Selected papers on Gauge Theory of Weak and Electromagnetic Interactions, C.H. Lai ed. (World Scientific, Singapore 1981).

[3] Les idées de groupe de renormalisation en théorie des champs ont été introduites dans :
E.C.G. Stueckelberg and A. Peterman, *Helv. Phys. Acta* 26 (1953) 499 ;
M. Gell-Mann and F.E. Low, *Phys. Rev.* 95 (1954) 1300.
Voir aussi :
N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Interscience, New York 1959) ;
K.G. Wilson, *Phys. Rev.* 179 (1969) 1499.

[4] Pour une présentation des idées de groupe de renormalisation appliquées aux phénomènes critiques voir :
L.P. Kadanoff, *Physics* 2 (1966) 263 ;
K.G. Wilson, *Phys. Rev.* B4 (1971) 3174, *ibidem* 3184 ;
K.G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Rep.* 12C (1974) 75.

[5] Une introduction à l'intégrale de chemin dans l'esprit de cet ouvrage est J. Zinn-Justin, *Intégrale de chemin en mécanique quantique : introduction*, (287 pages), Collection Savoir Actuels (EDP Sciences, Les Ulis 2003).

[6] Pour l'origine de la théorie de Landau voir :
L.D. Landau, *Phys. Z. Sowjetunion* 11 (1937) 26, reproduit dans *Collected Papers of L.D. Landau*, D. ter Haar ed. (Pergamon, New York 1965).

[7] E. Brézin, J.C. Le Guillou et J. Zinn-Justin, *Field Theory Approach to Critical Phenomena*, contribution à l'ouvrage [11] qui décrit l'application des méthodes de la théorie quantique des champs au calcul des quantités universelles.

[8] Des détails techniques supplémentaires sur les sujets abordés dans cet ouvrage, exposés dans le même esprit et, de façon plus générale, une présentation unifiée de la théorie quantique des champs telle qu'elle apparaît en physique des particules et dans la théorie des phénomènes critiques peuvent être trouvés dans :
J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press 1989 (4e éd. Oxford Univ. Press, Oxford 2002).

[9] L'idée du développement en ε-expansion est due à :
K.G. Wilson and M.E. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* 28 (1972) 240.

[10] Après les articles originaux de Wilson, plusieurs auteurs ont montré que le groupe de renormalisation de la théorie quantique des champs pouvait être appliqué aux phénomènes critiques :
C. Di Castro, *Lett. Nuovo Cimento.* 5 (1972) 69 ;
G. Mack, *Kaiserslautern 1972*, Lecture Notes in Physics, vol. 17, W. Ruhl and A. Vancura eds. (Springer-Verlag, Berlin 1972) ;
E. Brézin, J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* D8 (1973) 434, *ibidem* 2418 ;
P.K. Mitter, *Phys. Rev.* D7 (1973) 2927 ;
G. Parisi, *Cargèse Lectures 1973*, publié dans *J. Stat. Phys.* 23 (1980) 49 ;
B. Schroer, *Phys. Rev.* B8 (1973) 4200 ;
C. Di Castro, G. Jona-Lasinio and L. Peliti, *Ann. Phys. (NY)* 87 (1974) 327 ;
F. Jegerlehner and B. Schroer, *Acta Phys. Austr. Suppl.* XI (1973) 389 (Springer-Verlag, Berlin).

[11] De nombreux physiciens qui ont participé au développement de ce sujet ont contribué à :
Phase Transitions and Critical Phenomena, vol. 6, C. Domb et M.S. Green éds. (Academic Press, London 1976).

[12] Les premières estimations précises des exposants critiques, utilisant une idée de Parisi [13] et les séries [14], et basées sur une sommation de Borel de séries divergentes, ont été publiées dans :
J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* 39 (1977) 95 ;

J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* B21 (1980) 3976.
Des résultats plus récents ont été publiés dans :
R. Guida and J. Zinn-Justin, *J. Phys. A* 31 (1998) 8103, cond-mat/9803240.

[13] L'utilisation de la série perturbative à dimension fixée a été proposée dans :
G. Parisi, *Cargèse Lectures 1973*, publié dans *J. Stat. Phys.* 23 (1980) 49.

[14] Les séries à dimension fixée ont été publiées dans :
G.A. Baker, B.G. Nickel, M.S. Green and D.I. Meiron, *Phys. Rev. Lett.* 36 (1976) 1351 ;
B.G. Nickel, D.I. Meiron, G.B. Baker, *Univ. of Guelph Report* 1977, qui contient aussi une première estimation des exposants de type Ising.

[15] Le développement en ε est sommé dans :
J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *J. Physique Lett. (Paris)* 46 (1985) L137 ; *J. Physique (Paris)* 48 (1987) 19 ; *ibidem* 50 (1989) 1365.

[16] Une estimation de l'équation d'état pour la classe du modèle d'Ising a été publiée dans :
R. Guida and J. Zinn-Justin, *Nucl. Phys.* B489 [FS] (1997) 626.

[17] Par exemple, le modèle à N composantes avec symétrie cubique a été étudié dans :
D.J. Wallace, *J. Phys.C : Solid State Phys.* 6 (1973) 1390 ;
A. Aharony, *Phys. Rev.* B8 (1973) 3342, 3349, 3358, 3363, 4270, *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) 1494.

[18] La régularisation dimensionnelle a été introduite dans :
J. Ashmore, *Lett. Nuovo Cimento* 4 (1972) 289 ; G. 't Hooft and M. Veltman, *Nucl. Phys.* B44 (1972) 189 ;
C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, *Phys. Lett.* 40B (1972) 566, *Nuovo Cimento* 12B (1972) 20.

[19] La forme moderne des équations de groupe de renormalisation a été publiée dans :
C.G. Callan, *Phys. Rev.* D2 (1970) 1541 ;
K. Symanzik, *Commun. Math. Phys.* 18 (1970) 227.
Une présentation pédagogique peut être trouvée dans :
S. Coleman, *Dilatations, Erice Lectures 1971*, reproduit dans *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge 1985).

[20] Les théories critiques ou de masse nulle sont discutées dans :
K. Symanzik, *Commun. Math. Phys.* 7 (1973) 34.

[21] La forme dite homogène des équations de groupe de renormalisation a été introduite dans :
S. Weinberg, *Phys. Rev.* D8 (1973) 3497 ;
G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* B61 (1973) 455 ;
J. Zinn-Justin [22].