MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCONOMIE

NAÏLA HAYEK – JEAN-PIERRE LECA

MATHÉMATIQUES POUR L'ÉCONOMIE

Analyse – Algèbre

6e édition

DUNOD

Graphisme de couverture : Pierre-André Gualino
Illustration de couverture : © metamorworks / fotolia.fr
Mise en pages : Lumina

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-078912-2

Table des matières

Introduction

Les modèles mathématiques ont un succès inouï dans le domaine de la physique par leur capacité à prédire les phénomènes auxquels ils s'appliquent : mécanique classique, mécanique quantique, électromagnétisme, physique des particules, astrophysique, etc. En un siècle, les mystères de la physique ont réduit comme peau de chagrin.

Ce succès, en soi fascinant, peut-il, fut-ce de manière beaucoup plus modeste, se reproduire dans le domaine de l'économie[1] ? La question est ouverte, elle est l'objet d'un débat : *l'utilisation des modèles mathématiques en économie.*

Pour participer à ce débat, il est indispensable de comprendre les modèles formalisés de l'économie. Il ne serait pas raisonnable de ne pouvoir accéder à ces modèles par peur ou méconnaissance des outils mathématiques de base.

Loin de nous l'idée que ces outils mathématiques de base sont à portée facile d'intellect : on affirme seulement qu'il faut savoir s'y prendre et ce, de manière pragmatique. Aussi, dans ce livre, quatre étapes jalonnent le chemin de la compréhension.

1. *L'écriture*, le sens des mots, la définition rigoureuse des objets mathématiques. L'expérience nous a appris qu'un étudiant qui sait et qui se trompe, est un étudiant qui, à un endroit de sa copie, n'a plus géré son écriture ou a négligé le sens des mots. Ce n'est pas l'étudiant qui déraille, c'est son écriture qui ne tient plus la route.
2. *Le raisonnement* et son catalogue de règles du jeu logique, expliquées ou démontrées (en partie) au chapitre 1 ; l'étudiant les appliquera « sans état d'intellect » tel un automobiliste le code de la route.
3. *La démonstration* pour décoder le chemin du labyrinthe qui mène au théorème ; grâce à elle, ce qui paraissait « magique » devient « vrai ». Chaque fois que la généralité n'en est pas compromise, afin de ne pas alourdir inutilement l'écriture, on traite sur des exemples simples la démarche de démonstration qui conduit au résultat. Ne pas comprendre en première lecture une démonstration n'est pas gênant du tout ; par contre, faire le choix d'ignorer la démonstration, c'est décider de rester dans la magie des mots du théorème incompris. Manipuler les idées, les concepts, sans les comprendre est strictement interdit car dangereux pour l'intelligence.
4. *Le calcul*, les exercices qui rassurent et indiquent la position de l'étudiant sur le chemin de la compréhension. Pour cela, nous vous proposons des points méthode. L'intérêt d'un exercice est le questionnement qu'il amène, les idées, les initiatives qu'il nécessite d'où, parfois, l'obligation de revoir le cours mais sans la démonstration bien sûr.

À la fin de chaque chapitre se trouvent des exercices suivis de leurs corrigés détaillés.

1. Le mot « économie » a pour racine grecque « *oikonomia* » : règle de vie domestique, gestion de la maison.

L'étudiant mesurera son assurance et son savoir-faire à l'envie qu'il a de regarder la solution avant d'avoir fini l'exercice.

De par notre expérience de l'enseignement des notions introduites dans ce livre, pour cette 6e édition, nous l'affirmons haut et fort :

Parler à tous avec simplicité tout en restant ambitieux sur le sujet.

Quelques indications :

– En début de chapitre, on désigne par « mots clés » des mots nouveaux importants que l'on va définir et qu'il est indispensable de connaître.
– Au sein d'un même chapitre, les définitions, propositions, théorèmes sont numérotés dans l'ordre d'arrivée.
– *Mutatis mutandis* signifie « en changeant ce qu'il faut changer ». On emploie cette expression pour dire que les arguments du raisonnement restent les mêmes, seuls changent les objets auxquels ils s'appliquent.

Chapitre 1

Langage mathématique, mode d'emploi

Introduction

En mathématiques, *démontrer c'est convaincre* avec des arguments autorisés, répertoriés, codés, indépendants du langage parlé qui les exprime. « La logique est parfaitement intelligible, néanmoins totalement inexplicable dans ses fondements » (S. Kleene, mathématicien américain, dans son livre *Logique mathématiques*, 1966, Armand Colin). Dans ce chapitre, on code les règles de la logique et de ses signes « ET, OU, $\neg$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$ ». Il s'agit d'apprendre à mieux cerner *ce que démontrer veut dire*.

Objectifs

Mettre en place un nouvel outil, qui définit et démontre : le langage mathématique.

Baliser le chemin qui va du bon sens à l'asbtrait.

Introduire un modèle : le langage des ensembles

Mots clés

Proposition

Ensemble

Fonction

1 Connecteurs logiques ET, OU, NON, $\Rightarrow$

1.1 Le vrai et le faux

DÉFINITION 1

On appelle *proposition* tout assemblage de lettres et de signes qui vérifie les trois conditions suivantes :

- cet assemblage a une syntaxe correcte (En d'autres termes, le lecteur sait le « lire ».) ;
- cet assemblage a une sémantique correcte (En d'autres termes, le lecteur « comprend » ce qu'il lit.) ;
- cet assemblage a une seule valeur de vérité : la valeur vrai ou bien la valeur faux.

COMMENTAIRE Dans le langage mathématique, les lettres peuvent être d'alphabets différents (latins ou grec) et les signes vont de la parenthèse, virgule, +, ., =, etc. aux chiffres arabes (0, 1, 2, ..., 9) ainsi que romains (I, V, X, L, C, D, M) en passant par des dessins plus ou moins parlants ($\sum$, $\int$, $\nearrow$, $\searrow$, etc.) que les mathématiciens ont l'art d'inventer au fil de leurs théories.

Exemples

Considérons les assemblages suivants :

- $P_1 = (\sum + oui\ !\ \nearrow =)$
  Ce n'est pas une proposition car la syntaxe est incorrecte.
- P_2 = (La racine carrée de Napoléon n'est pas carrée.)
  Ce n'est pas une proposition : on la lit très bien mais on ne comprend pas. La sémantique est incorrecte.
- $P_3 = (12 \times 14 = 168)$
  C'est une proposition, on sait à partir du cours moyen qu'elle a la valeur vrai.
- $P_4 = (\mathrm{XII} \times \mathrm{XIV} = \mathrm{CLXVIII})$
  C'est une proposition, la même que P_3 à l'écriture près. On remarquera que s'il est courant de multiplier en chiffres arabes, cela l'est beaucoup moins avec les chiffres romains. Pour faire de l'arithmétique, il fallait faire le bon choix de l'écriture et de ses signes !
- P_5 = (Dans un triangle quelconque, la somme des angles est un angle plat.)
  C'est une proposition, on sait depuis le collège qu'elle a la valeur vrai.
- P_6 = (a et b deux nombres réels quelconques, $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$)
  C'est une proposition, vraie pour un lycéen.
- P_7 = (Si $\alpha < 0$ et $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}$, alors $\alpha f \searrow$ sur $\mathbb{R}$.)
  C'est une proposition, vraie pour un bachelier. On remarquera la variété des lettres et des signes.
- P_8 = (Tout entier pair supérieur à 4 est la somme de deux nombres premiers.)
  C'est une proposition qui date de 1742, appelée la conjecture[1] de Goldback. On ne connaît toujours pas sa valeur de vérité ; en effet, s'il est facile de vérifier que $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, $24 = 11 + 13$, le cas général n'a toujours pas été démontré. On sait cependant que la propriété est vraie pour tout entier pair compris entre 6 et 33×10^6.
- P_9 = (Il existe au moins un triplet (x, y, z) d'entiers naturels strictement positifs tel que $x^2 + y^2 = z^2$.)
  Il suffit de chercher un peu. On trouve : $3^2 + 4^2 = 5^2$. La proposition P_9 est donc vraie. Tel est le sens de « il existe au moins un... »

1. Une conjecture est une proposition que l'on subodore vraie quoique ni contredite ni démontrée.

On trouve aussi $5^2 + 12^2 = 13^2$, puis $99^2 + 4\,900^2 = 4\,901^2$, puis... Mais cela est sans importance pour P_9, l'existence à lui seul du triplet $(3, 4, 5)$ pour (x, y, z) assure la valeur de vérité Vrai à P_9, qu'il y en ait d'autres, et combien, en nombre fini ou pas, est une tout autre question.

– P_{10} = (Pour $n \geq 3$, il n'existe pas d'entiers x, y, z non nuls tels que $x^n + y^n = z^n$.) Il s'agissait de la conjecture de Pierre Simon de Fermat (1601-1665) devenue un théorème en 1990 grâce au mathématicien anglais Andrew Wiles. Il aura donc fallu plus de trois siècles pour savoir P_{10} vraie !

1.2 ET, OU, NON

A. Définitions

DÉFINITION 2 : Connecteur NON

Soit A une proposition, on définit la nouvelle proposition notée NON A, ou encore ¬A (lire non A), à l'aide de la table de vérité suivante (tableau 1.1).

Tableau 1.1 – V est l'abréviation de vrai ; F est l'abréviation de faux.

A	¬A
V	F
F	V

DÉFINITION 3 : Connecteurs OU et ET

Soit A et B deux propositions, on définit les nouvelles propositions « A OU B » ainsi que « A ET B » à l'aide de la table de vérité suivante (tableau 1.2).

Tableau 1.2

A	B	A OU B	A ET B
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

COMMENTAIRE A et B sont deux propositions, chacune vraie ou bien fausse, il y a donc quatre cas possibles de valeur de vérité pour le couple (A, B).

La proposition « A ET B » a clairement le sens de « A et B » du langage français courant – appelé aussi langage de l'observateur – avec « *et* » conjonction de coordination.

La proposition « A OU B » a clairement le sens de « A ou B » avec « *ou* » conjonction de coordination du français dans son sens *inclusif* « ou bien A, ou bien B, ou bien les deux ». Par exemple : « crédit possible si majeur *ou* marié » (banquier *dixit*).

En français, il est un autre « *ou* », même phonétique, même écriture, conjonction de coordination lui aussi, mais avec le sens *exclusif* « ou bien A, ou bien B, mais pas les deux ». Exemples : « fromage *ou* dessert » (menu de restaurant *dixit*) ; « tout *ou* rien » ; « blanc *ou* noir ».

On coupe court à ces facéties polysémiques du « *ou* » en français en choisissant, pour « OU » du langage mathématique : celui *inclusif*. Exemple : tableau 1.2 *dixit*. L'ambiguïté n'est plus.

DÉFINITION 4 : P = Q

Si la proposition P et la proposition Q dépendent des mêmes propositions A, B, C..., et, sur chacune des lignes de leur table de vérité commune, ont la même valeur de vérité, alors on dit qu'elles sont égales et on écrit P = Q.

B. Propriétés du NON, ET, OU

Par le biais des tables de vérité, on obtient les propriétés des trois connecteurs définis plus haut.

a. **¬¬A = A.** On construit la table de vérité (tableau 1.3).

Tableau 1.3

A	¬A	¬¬A
V	F	V
F	V	F

Les propositions A et ¬¬A (comprendre ¬(¬A) et lire NON NON A) ont les mêmes valeurs de vérité sur les mêmes lignes, donc ¬¬A = A d'après la définition 4.

COMMENTAIRE Dans le langage mathématique, deux négations ont valeur d'affirmation. Ce n'est pas le cas dans le langage courant : « Non, je ne viendrai pas lundi », ne signifie pas : « Je viendrai lundi. »

b. **¬(A OU B) = ¬A ET ¬B.** On construit la table de vérité (tableau 1.4).

Tableau 1.4

A	B	¬A	¬B	A OU B	¬(A OU B)	¬A ET ¬B
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Les propositions ¬(A OU B) et ¬A ET ¬B ont mêmes valeurs de vérité sur les mêmes lignes, d'après la définition 4 : ¬(A OU B) = ¬A ET ¬B.

c. **¬(A ET B) = ¬A OU ¬B.** On procède comme dans b., *mutatis mutandis*.

COMMENTAIRE Les écritures ci-dessus sont ambiguës dans leur lecture ; on aurait dû écrire :

[¬(A OU B)]=[¬(A) ET (¬B)] pour b) et

[¬(A ET B)] = [(¬A) OU (¬B)] pour c).

On a implicitement (sans le dire !) décidé que « = » domine « ET » et « OU » qui eux-mêmes dominent « ¬ ». D'où la suppression des parenthèses et la simplification d'écriture. On continuera par la suite.

1.3 ⇒ ; Si. . . , Alors. . .

DÉFINITION 5 : « ⇒ » le connecteur *implication*

Soit A et B deux propositions, on définit la nouvelle proposition « A ⇒ B » (lire « A implique B » ou bien « A entraîne B » ou encore « si A, alors B ») par (A ⇒ B) = (¬A OU B). D'où la table de vérité de « A ⇒ B » (tableau 1.5).

Tableau 1.5

A	B	¬A	¬A OU B	A ⇒ B	
V	V	F	V	V	ligne 1
V	F	F	F	F	ligne 2
F	V	V	V	V	ligne 3
F	F	V	V	V	ligne 4

COMMENTAIRE On retiendra que la proposition A ⇒ B est toujours vraie sauf dans le cas où A vrai et B faux (ligne 2).

On ne tentera pas de « donner du sens » à la proposition « A ⇒ B » en l'interprétant par le « Si A, alors B » du langage de l'observateur. Ainsi dire à un ami : « Si demain il pleut, alors je viens te voir » sous-entend : « Si demain il ne pleut pas, alors je ne viens pas te voir »... et on n'est plus dans le cadre de la définition exprimée ligne 3 de la table de vérité de « A ⇒ B ». On doit regarder la table de vérité sans réfléchir (sans réfléchir pour une fois !). Dans le langage mathématique, le seul sens d'une proposition est sa valeur de vérité, c'est-à-dire la propriété d'être vraie ou fausse.

On ne confondra pas « A ⇒ B », proposition dont la valeur de vérité dépend de celles de A et de B avec « l'affirmation A ⇒ B est vraie », souvent utilisée pour énoncer un théorème.

Dans A ⇒ B, A est appelée condition suffisante pour B, et B condition nécessaire pour A. En effet, dans le cas où A ⇒ B est vraie (lignes 1, 3, 4 de sa table de vérité) :

– Il suffit d'avoir A vraie pour être assuré de B vraie.
– On ne peut avoir A vraie et B fausse, le vrai de B est donc nécessaire au vrai de A.

Exemple : soit p un entier naturel, A et B les propositions :
– A = (p nombre premier strictement supérieur à 2)
– B = (p nombre impair)

Il est clair que A $\Rightarrow$ B est une proposition vraie, que A est suffisant (mais pas nécessaire) pour B, que B est nécessaire (mais pas suffisant) pour A.

A. Propriétés du connecteur $\Rightarrow$

a. **Il est faux que :** $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$. On le constate (ligne 3, tableau 1.6).

Tableau 1.6

A	B	A ⇒ B	¬A ⇒ ¬B	(A ⇒ B) ⇒ (¬A ⇒ ¬B)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

b. **$(A \Rightarrow B) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$.** Propriété qui se démontre par la table de vérité suivante (tableau 1.7).

Tableau 1.7

A	B	¬A	¬B	A ⇒ B	¬B ⇒ ¬A
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Ce résultat est très utile dans les démonstrations quand, pour montrer que A $\Rightarrow$ B est une proposition vraie, il est plus commode de montrer la valeur vraie de $\neg B \Rightarrow \neg A$, appelée l'implication *contraposée* de A $\Rightarrow$ B. On énonce parfois ce résultat : L'implication « A $\Rightarrow$ B » est *équivalente* à « $\neg B \Rightarrow \neg A$ » sa contraposée. Nous donnerons plus loin un sens au mot « *équivalent* ».

c. **$(\neg(A \Rightarrow B)) = (A \text{ ET } \neg B)$.** On peut, pour démontrer ce résultat, soit construire la table de vérité *ad hoc*, soit utiliser les propriétés du NON, ET, OU vues précédemment. Ainsi :

$$\neg(A \Rightarrow B) = \neg(\neg A \text{ OU } B) = \neg\neg A \text{ ET } \neg B = A \text{ ET } \neg B$$

COMMENTAIRE La négation d'une implication n'est donc pas une implication.

d. **L'implication est *transitive*.** Propriété qui se traduit par :

$$Q = \big[(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)]\big]$$

est une proposition toujours vraie (tableau 1.8).

Tableau 1.8

A	B	C	A ⇒ B	B ⇒ C	A ⇒ C	(B ⇒ C) ⇒ (A ⇒ C)	Q
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

COMMENTAIRE La proposition (A ⇒ B) ⇒ [(B ⇒ C) ⇒ (A ⇒ C)] est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité de ses variables A, B, C. On dit qu'elle est *valide*.

De la même manière, *mutatis mutandis*, on montre que :

[(A ⇒ B) ET (B ⇒ C)] ⇒ (A ⇒ C) est une proposition valide. Cette validité exprime, elle aussi, la transitivité du connecteur ⇒.

Cette technique de preuve par table de vérité clôt toute discussion.

1.4 ⇔, Bi-implication

DÉFINITION 6 : « ⇔ » le connecteur *bi-implication*

Soit A et B deux propositions, on définit la nouvelle proposition « A ⇔ B » (lire « A bi-implication B » ou encore « A si et seulement si B ») par :

(A ⇔ B) = (A ⇒ B) ET (B ⇒ A)

La table de vérité de « A ⇔ B » est la suivante (tableau 1.9).

Tableau 1.9

A	B	A ⇒ B	B ⇒ A	A ⇔ B
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

On constate, *via* la définition 4, que :

- si « A ⇔ B est vrai », alors « A = B » ; et réciproquement ;
- si « A ⇔ B est vrai », on dit que « A *équivaut logiquement* à B », ou encore les propositions A et B sont *équivalentes*.

COMMENTAIRE Dans la suite du cours, pour énoncer un théorème, une propriété, on écrira A $\Leftrightarrow$ B pour dire « A $\Leftrightarrow$ B est une proposition vraie », c'est-à-dire A = B.
De même. on écrira A $\Rightarrow$ B pour dire « A $\Rightarrow$ B est une proposition vraie ».

2 Les quantificateurs ∀ et ∃

$\forall$ se lit « quel que soit », « pour tout ».
$\exists$ se lit « il existe au moins un ».

Soit $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ une famille rangée (ou suite) de nombres réels, les indices n pris dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

On considère les propositions :

- A = les a_n sont tous nuls ;
- B = les a_n sont non tous nuls ;
- C = à partir d'un certain rang les a_n sont tous nuls.

Pour de telles propositions, l'emploi des signes $\forall$ et $\exists$, appelés *quantificateurs*, permet de rendre mécanique 1) l'écriture des contraires ; 2) la recherche de leur lien logique ; 3) la démonstration de leur valeur de vérité dans les cas où les a_n sont explicités.

2.1 Règles d'utilisation

A. Le quantificateur « ∀ »

La proposition A = les a_n sont tous nuls :

- s'écrit « $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$ » ;
- se lit « quel que soit n élément de $\mathbb{N}$, $a_n = 0$ » ;
- signifie « $a_0 = 0$ ET $a_1 = 0$ ET $a_2 = 0$ ET... etc. »

B. Le quantificateur « ∃ »

La proposition B = les a_n sont non tous nuls :

- s'écrit « $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ » ;
- se lit « il existe au moins un élément $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq 0$ » ;
- signifie « l'un au moins des a_n est non nul ».

C. Passage d'une proposition à son contraire

On remarque que A et B sont des propositions contraires (*i.e.* A $= \neg$B et B $= \neg$A). Si on remplace la proposition ($a_n \neq 0$) par $\neg(a_n = 0)$, les écritures suivantes font apparaître les règles permettant de passer d'une proposition contenant des quantificateurs à sa proposition contraire.

$$\begin{array}{rcl} A = \forall n \in \mathbb{N}, & & a_n = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \neg A = \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } & & \neg(a_n = 0) \\ B = \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } & & \neg(a_n = 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \neg B = \forall n \in \mathbb{N}, & & a_n = 0 \end{array}$$

MÉTHODE

Pour passer d'une proposition à son *contraire* :
- on remplace le signe ∀ par ∃ ;
- on remplace le signe ∃ par ∀ ;
- on remplace la proposition sur laquelle porte le signe ∀ par son contraire ;
- on remplace la proposition sur laquelle porte le signe ∃ par son contraire.

D. Propositions contenant deux quantificateurs

a. Considérons la proposition C = « à partir d'un certain rang les a_n sont tous nuls ».
C signifie : il existe au moins un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p = 0$ ET $a_{p+1} = 0$ ET $a_{p+2} = 0$ ET, etc. La proposition $a_p = 0$ ET $a_{p+1} = 0$ ET $a_{p+2} = 0$ ET, etc. peut s'écrire :

$$\forall n \geq p,\ a_n = 0$$

ou encore, *via* la définition 5 de « ⇒ » donnée plus haut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow a_n = 0$$

C'est la deuxième écriture que l'on choisit.

COMMENTAIRE C = « à partir d'un certain rang les a_n sont tous nuls » :
- s'écrit $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow a_n = 0$;
- se lit « il existe au moins $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant p$ alors $a_n = 0$ ».

b. Considérons la proposition D = ¬C et appliquons le point méthode ci-dessus pour l'écrire à l'aide des quantificateurs.

$$C = \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow a_n = 0$$
$$\neg C = \forall p \in \mathbb{N}, \neg(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow a_n = 0)$$
$$\neg C = \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \neg(n \geqslant p \Rightarrow a_n = 0)$$
$$\neg C = \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant p \text{ ET } \neg(a_n = 0)$$

ou encore

$$D = \neg C = \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \text{ tel que } n \geqslant p \text{ ET } a_n \neq 0.$$

On a utilisé la propriété de négation de l'implication vue plus haut, à savoir : ¬(A ⇒ B) = A ET ¬B.

MÉTHODE

$P(n, p)$ étant une proposition qui dépend de n et p, la négation de la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } P(n, p)$$

est :

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \in \mathbb{N},\ \neg P(n, p)$$

2.2 Exemples

- Soit A la proposition suivante, où $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.

A = Il existe dans $\mathbb{N}$ un entier plus grand que tous les autres.
À l'aide des quantificateurs, A s'écrit,

$$(A) = \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N} \quad k \leqslant n$$

d'où l'écriture mécanique de son contraire

$$\neg(A) = \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \neg(k \leqslant n)$$

$$\neg(A) = \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k > n$$

La connaissance intuitive des entiers naturels permet d'affirmer que A est fausse. Quant à la démonstration de cette affirmation faisons-la en démontrant que $\neg$ A est vraie.

Soit n un entier quelconque, en considérant $k = n + 1$ on a bien $k \in \mathbb{N}$ et $k > n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe (on l'a trouvé !) $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > n$.

Donc « $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}$ tel que $k > n$ » est une proposition vraie.

Conclusion : $\neg$ A est vraie, donc A est fausse.

COMMENTAIRE Dans la proposition $\neg$ A, l'existence de l'entier k une fois n choisi est tout à fait concrète. En effet on sait expliciter k en fonction de n : $k = n + 1$ dans notre cas.

Pour un n choisi, il n'y a pas d'unicité de l'entier k : $k = n + 2$, $k = n + 3$, etc., conviennent aussi.

Dans notre exemple, les entiers k qui conviennent dépendent toujours de n, mais il peut ne pas en être ainsi.

Pour déterminer la valeur de vérité de A, on a étudié $\neg$ A.

- Soit H = l'ensemble des humains et $\mathbb{C}$ = l'ensemble des chaussures.

Considérons la proposition : A = « Tout le monde trouve chaussure à son pied. » À l'aide des quantificateurs, A s'écrit : A $= \forall h \in$ H $\exists c \in \mathbb{C}$ tel que la pointure de c convienne à h. Si on change l'ordre des quantificateurs dans la proposition A, la nouvelle proposition B s'écrit : B $= \exists c \in \mathbb{C}$ tel que $\forall h \in$ H, la pointure de c convient à h. La traduction de B dans le langage courant est : il existe une chaussure « taille unique » qui convient à tous.

On retiendra de cet exemple, la propriété générale suivante :
- on change le sens d'une proposition en changeant l'ordre des quantificateurs ;
- la proposition B = ($\exists c \in \mathbb{C}$ tel que $\forall h \in$ H …)
  implique la proposition A = ($\forall h \in$ H $\exists c \in \mathbb{C}$ tel que…).
  Implication qui, dans notre exemple, se comprend aisément puisque la chaussure *c* dont B vrai assure l'existence, convient à tous les hommes *h* dans l'écriture de A.

3 Application : opérations sur les ensembles

3.1 Ensemble, élément, inclusion

On connaît les ensembles numériques :

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \dots\} = \text{l'ensemble des entiers naturels,}\\
\mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \text{l'ensemble des entiers,}\\
\mathbb{Q} &= \left\{ r = \frac{p}{q} \text{ tel que } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}\\
&\quad = \text{l'ensemble des nombres rationnels,}\\
\mathbb{R} &= \text{l'ensemble des nombres réels,}\\
\mathbb{C} &= \text{l'ensemble des nombres complexes,}\\
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x < b\}\\
&\qquad \text{appelé intervalle ouvert de bornes } a \text{ et } b\text{, etc.}
\end{aligned}$$

Plus généralement, on dit que A est un *ensemble* si on est capable de reconnaître tous ses *éléments* c'est-à-dire, si l'écriture « $a \in$ A » est une proposition (vraie ou fausse donc) pour tout objet *a* considéré.

« $a \in$ A » se lit « *a* est un élément de A » (on dit aussi « *a* appartient à A »). On écrit $a \notin$ A pour exprimer $\neg(a \in$ A).

COMMENTAIRE Les termes « *ensemble* », « *élément* » sont familiers dans le cadre du langage courant et nous avons le sentiment, voire la certitude, de comprendre leurs diverses relations. En fait cette notion d'ensemble est beaucoup moins naïve qu'elle n'en a l'air et les pièges ludiques de la contradiction, découverts au début du siècle, ne peuvent être désamorcés. À partir des années 1950, les logiciens – Kurt Gödel entre autres – ont précisé les limites incontournables des formalismes dans l'écriture mathématique. Quelques ambitions mathématico-intellectuelles du début du siècle ont dû être revues à la baisse.

On désigne par E un ensemble, dit *référentiel*, où sont puisés tous les éléments servant à définir les autres ensembles.

Tout ensemble A peut alors être défini :
- soit en énumérant ses éléments (quand c'est possible) ;
- soit en donnant la propriété notée P(*a*) qui caractérise ses éléments *a* pris dans E.

Exemples

• $E = \mathbb{R}$ et $P(a) =$ « $a^2 + a - 2 = 0$ » et $A = \{a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a)\}$, c'est-à-dire : $a \in A \iff P(a)$.

Il est clair que $A = \{-2, 1\}$.

• $E = \mathbb{R}$ et $A = \{a \in \mathbb{R}$ tel que $-1 < a < +1\}$ où la propriété $P(a)$ qui caractérise les éléments a de A est $-1 < a < +1$. Cet ensemble appelé intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ se note $A =]-1, +1[$. Il est clair que dans ce cas, on ne peut pas énumérer tous les éléments de A.

• On désigne par $\emptyset = \{\ \}$, lire « ensemble vide », l'ensemble qui ne possède aucun élément et pour lequel donc la proposition « $a \in \emptyset$ » est fausse quel que soit l'élément a.

DÉFINITION 7 : *Inclusion* de deux ensembles

On dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B si $\forall a, a \in A \Rightarrow a \in B$. On note alors $A \subset B$ et A est appelé *sous-ensemble* ou *partie* de B.

COMMENTAIRE $A \subset B$ signifie que tout élément de A est élément de B, et les propriétés de l'$\subset$ seront les conséquences directes des propriétés de l'implication « $\Rightarrow$ » et du quantificateur « $\forall$ ».

DÉFINITION 8 : *Égalité* de deux ensembles

On dit que l'ensemble A est égal à l'ensemble B si $A \subset B$ et $B \subset A$. On note alors $A = B$.

3.2 Union, intersection, complémentaire, produit

Les connecteurs OU, ET, NON, et les quantificateurs $\forall$, $\exists$ permettent de définir de nouveaux ensembles à partir d'ensembles donnés. Leurs propriétés sont les conséquences directes des propriétés des connecteurs et quantificateurs.

On désigne par E un ensemble dit référentiel, par $A, B, C, \ldots$ des parties de E et par $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ une famille de parties de E.

DÉFINITION 9

a) *Union* de deux ensembles. À l'aide du « OU » on définit le nouvel ensemble $A \cup B$ (lire A union B) tel que :

$$A \cup B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ OU } x \in B\}$$

b) *Union dénombrable* d'une famille d'ensembles. À l'aide du « $\exists$ » on définit le nouvel ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, (lire union sur $n \in \mathbb{N}$ des A_n) tel que :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in E \text{ tel que } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \in A_n\}$$

c) *Intersection* de deux ensembles. À l'aide du « ET », on définit le nouvel ensemble $A \cap B$ (lire A intersection B) tel que :

$$A \cap B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ ET } x \in B\}$$

d) *Intersection dénombrable* d'une famille d'ensembles. À l'aide du « $\forall$ », on définit le nouvel ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (lire intersection sur $n \in \mathbb{N}$ des A_n) tel que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in E \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$$

e) *Complémentaire* d'un ensemble. À l'aide du « NON », on définit le nouvel ensemble $C_E A$ (lire complémentaire de A dans E) tel que :

$$C_E A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}$$

ou encore :

$$C_E A = \{x \in E \text{ tel que NON}(x \in A)\}$$

On note A^c ou $\bar{A}$ cet ensemble s'il n'y a aucune ambiguïté sur le référentiel E.

f) *Différence* de deux ensembles. On définit l'ensemble $A \setminus B$ (lire « A moins B ») des éléments de A qui ne sont pas dans B ; c'est-à-dire $A \setminus B = A \cap B^c$.

g) *Produit* de deux ensembles. À l'aide du « ET » on définit le nouvel ensemble $A \times B$ (lire produit cartésien de A par B) tel que :

$$A \times B = \{(a, b) \text{ tel que } a \in A \text{ ET } b \in B\}$$

Pour définir $A \times B$, on introduit un nouvel élément noté (a, b) et appelé *couple*. On définit l'égalité suivante entre deux couples :

$$(a, b) = (a', b') \iff [a = a' \text{ ET } b = b']$$

COMMENTAIRE On notera que les ensembles définis ci-dessus à l'aide de parties de E sont encore des parties de E, sauf l'ensemble $A \times B$.

Dans l'écriture $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (respectivement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$), l'indice n est dit *muet* ce qui laisse le choix de la lettre. Ainsi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p = \bigcup_{q\in\mathbb{N}} A_q = \ldots$ (respectivement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} A_p = \bigcap_{q\in\mathbb{N}} A_q = \ldots$).

A. Propriétés

On se contentera d'en donner quelques-unes. Elles sont conséquences directes des propriétés des connecteurs ou quantificateurs qui servent à les définir.

a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

En effet :

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Longleftrightarrow (x \in A) \text{ ET } (x \in B \cup C) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A) \text{ ET } [(x \in B) \text{ OU } (x \in C)] \\ x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) &\Longleftrightarrow [(x \in A) \text{ ET } (x \in B)] \\ &\qquad \text{OU } [(x \in A) \text{ ET } (x \in C)] \end{aligned}$$

On vérifie *via* une table de vérité que la proposition P ET (Q OU R) est équivalente à la proposition (P ET Q) OU (P ET R) et en remplaçant P par $(x \in A)$, Q par $(x \in B)$, R par $(x \in C)$ on déduit :

$$x \in A \cap (B \cup C) \Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

d'où l'égalité ensembliste :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

On dit que l'intersection est distributive pour l'union. De la même manière, on démontrerait que l'union est distributive pour l'intersection, c'est-à-dire :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

b. $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$

En effet :

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c &\Longleftrightarrow \neg\left(x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \\ &\Longleftrightarrow \neg(\forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n) \\ &\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \neg(x \in A_n) \\ &\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \in A_n^c \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \end{aligned}$$

3.3 Fonction, application, injection, surjection, bijection

A et B désignent deux ensembles, et :

$$\begin{array}{rccc} f & : A & \to & B \\ & x & \mapsto & f(x) = y \end{array}$$

désigne une *fonction* de A dans B.

Dans l'écriture $y = f(x)$, y s'appelle l'image de x par f et x l'antécédent de y par f.

a. Pour que f soit une *fonction*, il faut que tout élément x de A ait *au plus une image* $y = f(x)$ dans B, ce qui peut s'écrire :

$$\forall x \in A,\ \forall x' \in A,\ f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'$$

Ou encore, sachant qu'une implication est équivalente à sa contraposée :

$$\forall x \in A,\ \forall x' \in A,\ x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$$

On comprendra mieux avec le dessin suivant (figure 1.1).

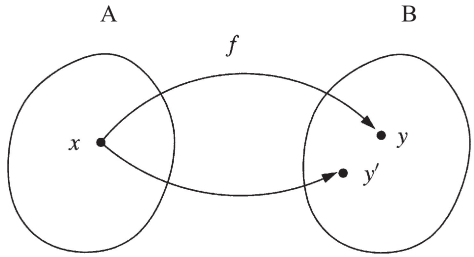

Figure 1.1 – Situation INTERDITE si on veut que f soit une *fonction* de A dans B

b. f, fonction de A dans B, est une *application* de A dans B si tout élément x de A a *exactement* une image $y = f(x)$ dans B.

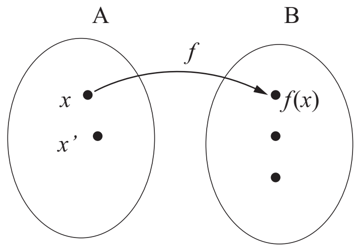

Figure 1.2

f fonction mais pas application de A dans B.

g fonction et application de A dans B.

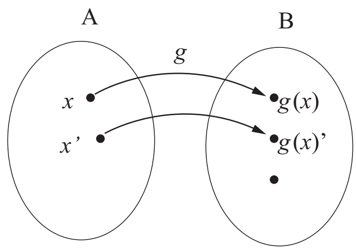

Figure 1.3

COMMENTAIRE Une application est une fonction particulière. Distingo qui résulte de l'expression « *au plus une* » (pour définir une fonction) devenue « *exactement une* » (pour définir une application).

c. On dit que l'application f est une *injection* de A dans B si :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ \forall x' \in \mathrm{A},\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ou encore :

$$\forall x \in \mathrm{A},\ \forall x' \in \mathrm{A},\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

ou encore si tout élément de B est image *de au plus* un élément de A.

On comprendra mieux avec le dessin suivant (figure 1.4).

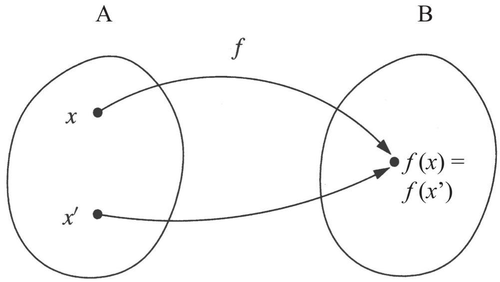

Figure 1.4 – Situation INTERDITE si on veut que f soit une injection

d. On dit que l'application f est une *surjection* de A dans B si :

$$\forall y \in \mathrm{B}\ \exists x \in \mathrm{A} \text{ tel que } f(x) = y$$

ou encore si tout élément de B est image *de au moins* un élément de A.

On comprendra mieux avec le dessin suivant (figure 1.5).

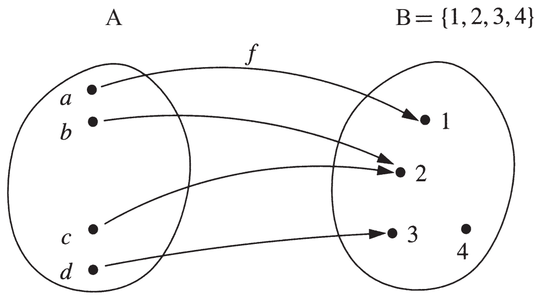

Figure 1.5 – L'élément 4 de B qui n'est image d'aucun élément de A INTERDIT à f d'être une surjection.

e. Une application qui est à la fois injection et surjection est appelée bijection :

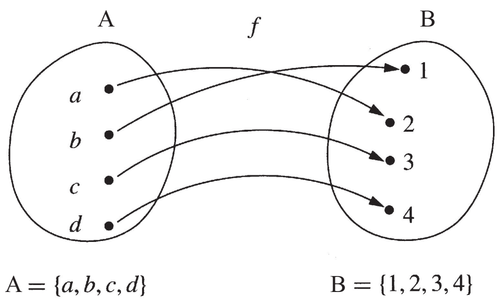

Figure 1.6 – Exemple de bijection de A dans B

f. Dans le cas où

$$\begin{array}{rcccc} f & : & A & \to & B \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est une bijection (et seulement dans ce cas), on définit une nouvelle application notée f^{-1}, appelée *application réciproque* de f (on dit aussi application inverse) telle que :

$$\begin{array}{rcccc} f^{-1} & : & B & \to & A \\ & & y & \mapsto & f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \end{array}$$

Ainsi dans l'exemple de la figure 1.7 :

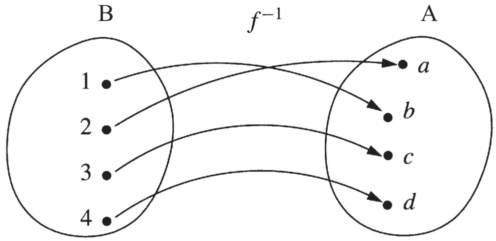

Figure 1.7

g. Égalité de deux applications f et g.

On dit que $f = g$ si f et g ont même ensemble de départ A, même ensemble d'arrivée B et $\forall x \in A, \quad f(x) = g(x)$.

h. Soit f et g deux applications telles que :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & A & \to & B \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccc} g & : & B & \to & C \\ & & y & \mapsto & g(y) \end{array}$$

On définit une nouvelle application notée $g \circ f$, appelée *application composée* de g avec f, telle que :

$$\begin{array}{rcccc} g \circ f & : & A & \to & C \\ & & x & \mapsto & (g \circ f)(x) = g[f(x)] \end{array}$$

COMMENTAIRE Dans l'écriture « $g \circ f$ », l'ordre intervient. Ci-après, l'exemple où est définie l'application $g \circ f$, sans que l'application $f \circ g$ le soit.

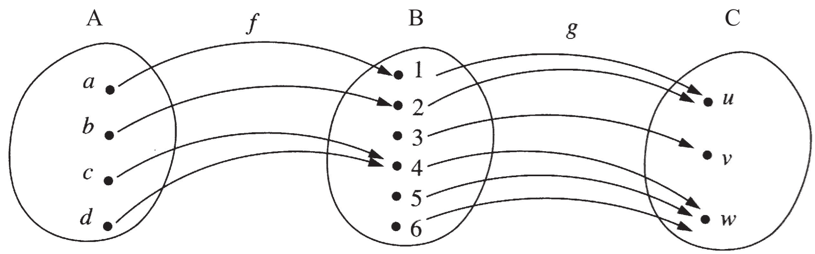

Figure 1.8

d'où

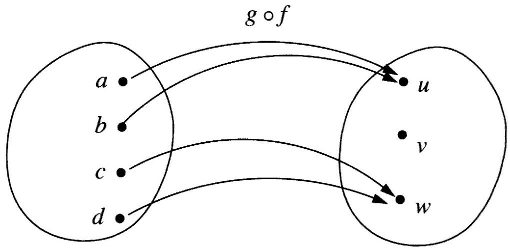

Figure 1.9

Exemple

Soit f l'application de la figure 1.6, on a f^{-1} de la figure 1.7, on en déduit

$$\begin{array}{rcccl} f^{-1}\circ f & : & \mathrm{A} & \to & \mathrm{A} \\ & & x & \mapsto & f^{-1}[f(x)] = x \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccl} f\circ f^{-1} & : & \mathrm{B} & \to & \mathrm{B} \\ & & y & \mapsto & f[f^{-1}(y)] = y \end{array}$$

COMMENTAIRE Soit Id_{A} (respectivement Id_{B}) l'*application identique* de A dans A (respectivement de B dans B), on montre sans difficulté : si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est bijective, alors $f^{-1}\circ f = Id_{\mathrm{A}}$ et $f\circ f^{-1} = Id_{\mathrm{B}}$.

i. Soit

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathrm{A} & \to & \mathrm{B} \\ & & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

une application quelconque de l'ensemble A dans l'ensemble B.

1) Pour toute partie X de A, on définit $f(\mathrm{X})$ l'ensemble des images par f des éléments de X, c'est-à-dire :

$f(\mathrm{X}) = \{\mathrm{y} = f(x)$ tel que $x \in \mathrm{X}\}$ qui est une partie de B.

$f(\mathrm{X})$ est appelé *ensemble image directe* par f de l'ensemble X.

2) Pour toute partie Y de B, on définit $f^{-1}(\mathrm{Y})$ l'ensemble des antécédents par f des éléments de Y, c'est-à-dire :

$f^{-1}(\mathrm{Y}) = \{x \in \mathrm{A} \text{ tel que } f(x) \in \mathrm{Y}\}$, qui est une partie de A.

$f^{-1}(\mathrm{Y})$ est appelé *ensemble image réciproque* par f de l'ensemble Y.

COMMENTAIRE Soit $x \in \mathrm{X} \subset \mathrm{A}$, alors $f(x) \in \mathrm{B}$, mais $f(\mathrm{X}) \subset \mathrm{B}$. Soit $y \in \mathrm{Y} \subset \mathrm{B}$, alors $f^{-1}(y)$ n'est défini que si f est bijective, par contre $f^{-1}(\{y\})$ et $f^{-1}(\mathrm{Y})$ sont des parties de X toujours définies que f soit bijective ou non.

Exemple

On considère l'application f de la figure 1.5.

$f(\mathrm{A}) = \{1,2,3\}$; $f(\{a,b\}) = \{1,2\}$; $f(\{a,b,c\}) = \{1,2\}$; $f(\{d\}) = \{3\}$ (mais $f(d) = 3$).

$f^{-1}(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$; $f^{-1}(\{1,2\}) = \{a,b,c\}$; $f^{-1}(\{4\}) = \emptyset$; $f^{-1}(\{2\}) = \{b,c\}$; (mais $f^{-1}(2)$ n'est pas autorisé car f n'est pas bijective).

Exercices

1.1 Démontrer que, sans parenthèses, l'écriture A ⇒ B ⇒ C n'est pas une proposition au sens où certaines de ses valeurs de vérité ne peuvent être définies, car elles dépendent du lecteur.

1.2 Exprimer le contraire des propositions suivantes dans le langage courant.

A = V est vert et R est rouge.

B = Le chômage régresse ou l'inflation croît (on commencera par choisir le sens du « ou » dans B dans le cadre du langage courant).

C = Si le chômage régresse, alors l'inflation croît.

1.3 **a)** Donner la table de vérité du « ou exclusif ».

b) Dans une même table de vérité, comparer les propositions « ¬A OU B » et « ¬A ou exclusif B ». Conclusion sur « ⟹ » ?

1.4 Soit a et b deux nombres réels quelconques. L'implication suivante est-elle vraie : $a < b \Rightarrow a \leq b$? Même question pour l'implication contraposée et l'implication réciproque.

1.5 Démontrer à l'aide d'une table de vérité que ¬(A ET B) = ¬A OU ¬B.
Peut-on dire que les propositions ¬(A ET B) et (¬A OU ¬B) sont équivalentes ?

1.6 Déterminer l'ensemble E tel que : $\mathrm{E} = \{a \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0,\ 0 \leq a < \varepsilon\}$

1.7 **a)** A et B deux ensembles, écrire la négation de $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.

b) Démontrer à l'aide de la table de vérité de « ⟹ » que $\emptyset \subset \mathrm{A}$ est vrai pour tout ensemble A. Comparer les ensembles $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$.

c) Soit $\mathrm{A} = \{a, b, c\}$. Expliciter l'ensemble des parties de A. On le notera P(A).

d) Soit A un ensemble quelconque. Démontrer qu'il y a plus d'éléments dans P(A) que dans A.

1.8 Expliciter les ensembles suivants où n est un entier naturel et $[a, b]$ et $]a, b[$ désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{A} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n+1}, +\frac{1}{n+1}\right] \ ; \quad \mathrm{B} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n+1}, +\frac{1}{n+1}\right[\ ;$$

$$\mathrm{C} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]0, \frac{1}{n+1}\right[\ ; \quad \mathrm{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n, +n[\ ; \quad \mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, +n]$$

1.9 Soit l'application,

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathrm{A} & \rightarrow & \mathrm{B} \\ & & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

a) Énoncer la propriété de f représentée par chacune des propositions suivantes :
$P_1 = (f(A) = B)$, $P_2 = (\forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset)$,
$P_3 = (\forall y \in B, f^{-1}(\{y\})$ contient au plus un élément),
$P_4 = (\forall y \in B, f^{-1}(\{y\})$ contient un élément et un seul).

b) Soit B_1 et B_2 deux parties de B. Démontrer que :

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

c) Soit A_1 et A_2 deux parties de A. Démontrer que :

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

À l'aide d'un contre-exemple, démontrer que l'inclusion réciproque peut être fausse.

Solutions

1.1 Pour A, B, C respectivement F, V, F, la proposition (A $\Rightarrow$ B) $\Rightarrow$ C est F, la proposition A $\Rightarrow$ (B $\Rightarrow$ C) est V. Ainsi la valeur de vérité de l'expression A $\Rightarrow$ B $\Rightarrow$ C dépend de la place des parenthèses mises lors de sa lecture. Cette écriture ne désigne donc pas une proposition (principe de non contradiction).
N.B. Il n'en est rien avec le OU car (A OU B) OU C = A OU (B OU C) que l'on peut donc écrire sans ambiguïté A OU B OU C et idem avec le ET.

1.2 Méditer sur le « flou » du langage courant de base si on se contente d'un regard superficiel !

1.3 a)

Tableau 1

A	B	A ou exclusif B
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

b)

Tableau 2

A	B	¬A OU B	¬A ou exclusif B
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

- « ¬A OU B » est par définition la proposition A $\Longrightarrow$ B (définition 5)
- « ¬A ou exclusif B » est la proposition A $\Longleftrightarrow$ B (définition 6)
- Dans le langage courant, la maladie du « ou » avec son ambiguïté de sens (ou exclusif ? ou non ?) contamine le « si ceci, alors cela » qui peut passer de « implique » à « équivalent » ! On comprend mieux désormais les difficultés des étudiants... qui se soigneront définitivement en se référant systématiquement à la table de vérité de « $\Longrightarrow$ »... et rien d'autre !

1.4 Oui – oui – non.

1.5 Aucune difficulté. Les propositions sont équivalentes.

1.6 E = $\{0\}$.

1.7 a) $\neg(\mathrm{A} \subset \mathrm{B}) = \exists x \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \mathrm{A}$ ET $x \notin \mathrm{B}$.

b) La proposition P $\Longrightarrow$ Q est vraie dès que P est faux. Or $a \in \emptyset$ est une proposition toujours fausse. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$. (Par ailleurs $\emptyset \in \{\emptyset\}$.)

c) Les parties de A sont : $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$. Ce sont les huit éléments de P(A) appelé ensemble des parties de A.