L'ESSENTIEL DE

MÉCANIQUE

TOUT EN FICHES

L'ESSENTIEL DE MÉCANIQUE

Pascal LUSSIEZ
Professeur en Sciences et Techniques Industrielles
au lycée Lamarck (Albert).

DUNOD

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-77874-4

Table des matières

Torseur

Fiche 1

Objectif

Réduire un torseur en un point.

Calculer une somme de torseurs dans une même base.

1. Définition

On appelle torseur {T} l'ensemble de deux champs de vecteurs : $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{M}_A$

L'ensemble de ces deux vecteurs est appelé **éléments de réduction** du torseur {T} au point A (centre de réduction).

La résultante du torseur

Le moment en A du torseur

$$\{T_1\} : \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R}_1 \\ \overrightarrow{M}_{1,A} \end{Bmatrix}_{A\,(\vec{x},\,\vec{y},\,\vec{z})}$$

La base

Indice

Le centre de réduction

2. Torseurs spéciaux

Glisseur (ou torseur à résultante)

Un torseur {T} de résultante générale non nulle est un **glisseur**, s'il existe au moins un point A où le moment du torseur {T} s'annule.

$$\{T\} : \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Torseur couple (ou couple)

Tout torseur non nul, dont la résultante est nulle est un **torseur couple**.

$$\{T\} : {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}$$

Torseur nul

C'est le torseur tel que les éléments de réduction sont nuls.

$$\{T\} : {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A} = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

3. Notation

Il existe deux principales manières d'écrire les torseurs.

Forme complète

$$\{T\} : {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R} = X_A \cdot \vec{x} + Y_A \cdot \vec{y} + Z_A \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{M_A} = L_A \cdot \vec{x} + M_A \cdot \vec{y} + N_A \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Forme compacte

$$\{T\} : {}_A\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4. Opérations sur les torseurs

Réduction d'un torseur

$$\{T\} : \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \xrightarrow{?} \{T\} : \underset{B}{\begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_B \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Dans un torseur, la résultante est invariante, seul le moment varie en fonction du centre de réduction. Pour exprimer un torseur en autre point on utilise la relation de **transport de moment**, soit :

$$\boxed{\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}}$$

EXERCICE 1

Réduire au point B(3,2,0), le torseur $\{T\} : \underset{A}{\begin{Bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$, avec A(2,1,0)

Solution

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \\ 6 \\ -5 \end{vmatrix} \Rightarrow \{T\} : \underset{B}{\begin{Bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \\ 5 & -5 \end{Bmatrix}}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Remarque : Le produit vectoriel est prioritaire sur l'addition.

Somme de deux torseurs

Soit dans un même repère les deux torseurs suivants :

$$\{T_1\} : \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{1,A} \end{Bmatrix}} \text{ et } \{T_2\} : \underset{A}{\begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{2,A} \end{Bmatrix}}$$

La somme des torseurs est définie par :

$$\{T_1 + T_2\} : \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{1,A} + \vec{M}_{2,A} \end{matrix} \right\}_A$$

Les deux torseurs doivent être exprimés au **même centre de réduction et dans la même base**.

Exercice 2

Soit dans un repère $\Re(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les torseurs suivants :

$$\{T_1\} : \left\{ \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{matrix} \right\}_O, \{T_2\} : \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 4 & 2 \end{matrix} \right\}_A \text{ et } \{T_3\} : \left\{ \begin{matrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right\}_B,$$

Calculer la somme des torseurs au point O.

Coordonnées des points : A(1,2,1) et B(3,0,1).

Solution

De la même façon que dans l'exemple précédent, on réduit les torseurs $\{T_2\}$ et $\{T_3\}$ au point O, et on additionne les torseurs.

$$\{T_1\} : \left\{ \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{matrix} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \{T_2\} : \left\{ \begin{matrix} 1 & 8 \\ 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{matrix} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} + \{T_3\} : \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \\ 1 & 16 \end{matrix} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$= \{T\} : \left\{ \begin{matrix} 4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 10 & 16 \end{matrix} \right\}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Modélisation des liaisons

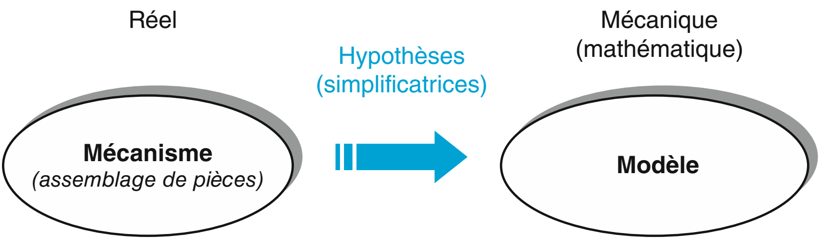
Fiche 2

Objectif

Identifier une liaison entre solide.

1. Modélisation

Pour appliquer les lois de la mécanique, il est nécessaire d'utiliser un modèle, c'est-à-dire une image simplifiée de la réalité, souvent représentée sous forme de schéma.



2. Hypothèses

Le modèle d'étude pour l'étude d'un mécanisme s'appuie sur deux groupes d'hypothèses relatives aux pièces et aux assemblages :

Pièces

Les pièces sont des solides indéformables (ou rigides).

Les pièces sont de géométrie parfaite.

Assemblages

Les assemblages sont des liaisons parfaites, c'est-à-dire :

– les surfaces de contacts sont géométriquement parfaites (cylindres, plans, sphères…) ;

– sans jeu ;
– sans frottement ;
– bilatérales (le contact se fait dans les deux sens).

Ce type de modèle est celui généralement retenu dans le cadre d'études d'avant-projets de mécanismes.

3. Caractéristiques d'une liaison

Une liaison entre deux solides est une relation de **contact** entre deux solides.

On caractérise une liaison par :

– sa géométrie de contact ;
– son repère local associé ;
– son centre géométrique.

Géométrie des contacts

D'un point de vue théorique, il existe 3 géométries de contact : contact ponctuel, contact linéaire et le contact surfacique (dans la réalité, il n'existe que le contact surfacique (solides réels).

Repère local associé (R.L.A.)

Le repère local associé à une liaison permet d'exprimer simplement les éléments cinématiques et statiques caractérisant de façon simple les degrés de liberté et de liaison.

NOTION DE DEGRÉ DE LIBERTÉ (OU DEGRÉS DE MOBILITÉS)

Le nombre de degré de liberté d'une liaison est le nombre des mouvements relatifs indépendants que la liaison autorise entre les deux pièces considérées.

DEGRÉ DE LIAISON

C'est le nombre de déplacements élémentaires interdits. On notera que pour une liaison, la somme des degrés de libertés et des degrés de liaisons est égale à 6. Le degré de liaison correspond au nombre de composantes du torseur des actions mécaniques transmissibles.

Centre géométrique

L'origine du repère idéal est le centre de la liaison.

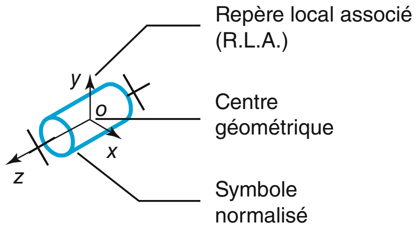
EXEMPLE.

La liaison pivot d'axe $(O, \vec{z})$

Degré de liberté : 1

(une rotation d'axe $\vec{z}$)

Degré de liaison : 5 (6 – 1)



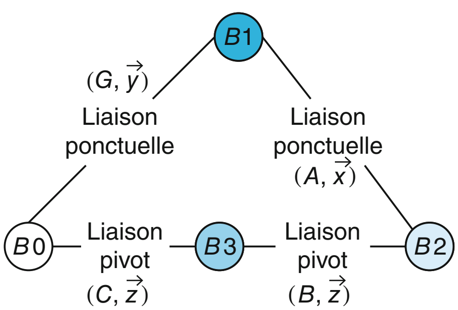
4. Classe d'équivalence

Un ensemble de pièces n'ayant aucun mouvement relatif entre elles, constitue une classe d'équivalence cinématique. Les pièces sont liées par une liaison complète.

5. Graphe des liaisons (ou de structure)

Le graphe de structure est un outil descriptif qui permet de faire le bilan des solides et des liaisons entre les solides d'un mécanisme.

Dans le graphe des liaisons les solides ou ensemble de solides sont schématisés par des cercles et les liaisons par des arcs de courbe joignant ces cercles.



6. Règles de modélisation

Règle n° 1 : Lorsque l'on étudie la liaison pouvant exister entre 2 solides, on n'étudie que ces 2 solides, le reste du mécanisme étant supposé enlevé.

Règle n° 2 : S'il n'y a pas de surface de contact entre ces 2 solides, il n'y a pas de liaisons mécaniques entre ces 2 solides.

Règle n° 3 : On ne tient pas compte des pièces déformables (voir hypothèse sur le solide).

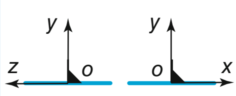
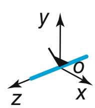
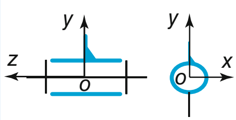
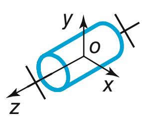
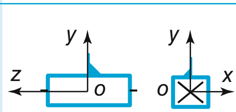
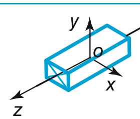
7. Le schéma cinématique

Le schéma cinématique d'un mécanisme décrit exclusivement des mouvements possibles entre les différents sous-ensembles qui le constituent.

8. Le schéma d'architecture

Le schéma d'architecture d'un mécanisme définit toutes les liaisons élémentaires entre les différents sous-ensembles qui le constituent.

9. Symboles des liaisons normalisées

	Représentation plane	Représentation spatiale	Mouvements relatifs
Liaison encastrement de centre O.			× × × × × ×
Liaison pivot de centre O d'axe z.			× × × × Rz ×
Liaison glissière de centre O d'axe z.			× × × × × Tz