

L'ESSENTIEL DE

# MÉCANIQUE

Tout le catalogue sur  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)



TOUT EN FICHES

L'ESSENTIEL DE  
**MÉCANIQUE**

Pascal LUSSIEZ

Professeur en Sciences et Techniques Industrielles  
au lycée Lamarck (Albert).

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2018

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-77874-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>Fiche 1.</b>	Torseur	1
<b>Fiche 2.</b>	Modélisation des liaisons	5
<b>Fiche 3.</b>	Action mécanique à distance	11
<b>Fiche 4.</b>	Action mécanique d'un fluide sur un solide	13
<b>Fiche 5.</b>	Action mécanique d'un ressort sur un solide	16
<b>Fiche 6.</b>	Action mécanique : solide sur solide	19
<b>Fiche 7.</b>	Torseur et liaison	23
<b>Fiche 8.</b>	Statique	30
<b>Fiche 9.</b>	Statique graphique 2 et 3 forces	36
<b>Fiche 10.</b>	Statique graphique à 4 forces	40
<b>Fiche 11.</b>	Mouvements et trajectoires	46
<b>Fiche 12.</b>	Cinématique	52
<b>Fiche 13.</b>	Cinématique : Solide en translation	58
<b>Fiche 14.</b>	Cinématique : Solide en rotation	65
<b>Fiche 15.</b>	Mouvement plan	71
<b>Fiche 16.</b>	Composition des vitesses	77
<b>Fiche 17.</b>	Dynamique	83
<b>Fiche 18.</b>	Moment d'inertie	89
<b>Fiche 19.</b>	Moment d'inertie équivalente	96
<b>Fiche 20.</b>	Puissance	100
<b>Fiche 21.</b>	Énergétique	106
<b>Fiche 22.</b>	Théorème énergie cinétique	110

<b>Fiche 23.</b>	Théorie des mécanismes	116
<b>Fiche 24.</b>	Torseur de cohésion	123
<b>Fiche 25.</b>	Traction	130
<b>Fiche 26.</b>	Cisaillement	136
<b>Fiche 27.</b>	Torsion	140
<b>Fiche 28.</b>	Flexion simple	147
<b>Fiche 29.</b>	Flambage	154
<b>Fiche 30.</b>	Sollicitations composées	161
<b>Index</b>		167

## Objectif

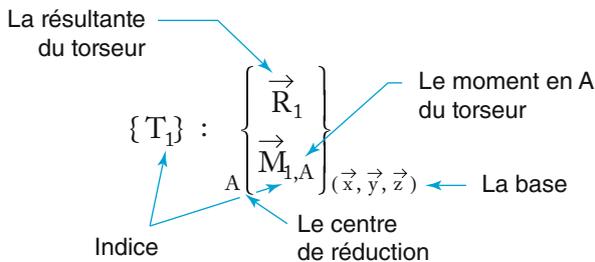
Réduire un torseur en un point.

Calculer une somme de torseurs dans une même base.

## 1. Définition

On appelle torseur  $\{T\}$  l'ensemble de deux champs de vecteurs :  $\vec{R}$  et  $\vec{M}_A$

L'ensemble de ces deux vecteurs est appelé **éléments de réduction** du torseur  $\{T\}$  au point A (centre de réduction).



## 2. Torseurs spéciaux

### ■ Glisseur (ou torseur à résultante)

Un torseur  $\{T\}$  de résultante générale non nulle est un **glisseur**, s'il existe au moins un point A où le moment du torseur  $\{T\}$  s'annule.

$$\{T\} : \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{0} \end{cases}_A$$

### ■ Torseur couple (ou couple)

Tout torseur non nul, dont la résultante est nulle est un **torseur couple**.

$$\{\mathbf{T}\} : \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}$$

### ■ Torseur nul

C'est le torseur tel que les éléments de réduction sont nuls.

$$\{\mathbf{T}\} : \begin{Bmatrix} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{Bmatrix}$$

## 3. Notation

Il existe deux principales manières d'écrire les torseurs.

### Forme complète

$$\{\mathbf{T}\} : \begin{Bmatrix} \vec{R} = X_A \cdot \vec{x} + Y_A \cdot \vec{y} + Z_A \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_A = L_A \cdot \vec{x} + M_A \cdot \vec{y} + N_A \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

### Forme compacte

$$\{\mathbf{T}\} : \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

## 4. Opérations sur les torseurs

### ■ Réduction d'un torseur

$$\{T\} : \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_{A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \xrightarrow{?} \{T\} : \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_B \end{array} \right\}_{B(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Dans un torseur, la résultante est invariante, seul le moment varie en fonction du centre de réduction. Pour exprimer un torseur en autre point on utilise la relation de **transport de moment**, soit :

$$\boxed{\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}}$$

### EXERCICE 1

Réduire au point B(3,2,0), le torseur  $\{T\} : \left\{ \begin{array}{c} -2 \ 2 \\ 4 \ 1 \\ 5 \ 1 \end{array} \right\}_{A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$ , avec A(2,1,0)

### Solution

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \\ 6 \\ -5 \end{vmatrix} \Rightarrow \{T\} : \left\{ \begin{array}{c} -2 \ -3 \\ 4 \ 6 \\ 5 \ -5 \end{array} \right\}_{B(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

**Remarque** : Le produit vectoriel est prioritaire sur l'addition.

### ■ Somme de deux torseurs

Soit dans un même repère les deux torseurs suivants :

$$\{T_1\} : \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{1,A} \end{array} \right\}_A \text{ et } \{T_2\} : \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{2,A} \end{array} \right\}_A$$

La somme des torseurs est définie par :

$$\{T_1 + T_2\} : \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_1 + \bar{R}_2 \\ \bar{M}_{1,A} + \bar{M}_{2,A} \end{array} \right\}$$

Les deux torseurs doivent être exprimés au **même centre de réduction** et **dans la même base**.

## EXERCICE 2

Soit dans un repère  $\mathcal{R}(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , les torseurs suivants :

$$\{T_1\} : \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2 \ 0 \\ 1 \ 0 \\ 5 \ 0 \end{array} \right\}_O \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 0 \\ 0 \ 5 \\ 4 \ 2 \end{array} \right\}_A \end{array} \text{ et } \{T_3\} : \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 4 \\ 4 \ 0 \\ 1 \ 4 \end{array} \right\}_B \end{array}$$

Calculer la somme des torseurs au point O.

Coordonnées des points : A(1,2,1) et B(3,0,1).

## Solution

De la même façon que dans l'exemple précédent, on réduit les torseurs  $\{T_2\}$  et  $\{T_3\}$  au point O, et on additionne les torseurs.

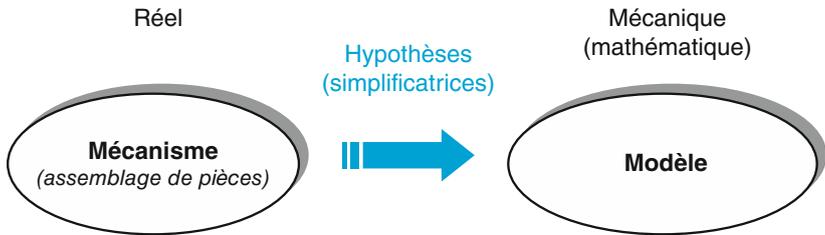
$$\begin{aligned} \{T_1\} : \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2 \ 0 \\ 1 \ 0 \\ 5 \ 0 \end{array} \right\}_O \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 0 \\ 0 \ 5 \\ 4 \ 2 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{array} &+ \{T_2\} : \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 8 \\ 0 \ 2 \\ 4 \ 0 \end{array} \right\}_O \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 0 \\ 0 \ 5 \\ 4 \ 2 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{array} &+ \{T_3\} : \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 0 \\ 4 \ -2 \\ 1 \ 16 \end{array} \right\}_O \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 0 \\ 0 \ 5 \\ 4 \ 2 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{array} \\ &= \{T\} : \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 4 \ 8 \\ 5 \ 0 \\ 10 \ 16 \end{array} \right\}_O \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 0 \\ 0 \ 5 \\ 4 \ 2 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \end{array} \end{aligned}$$

## Objectif

Identifier une liaison entre solide.

## 1. Modélisation

Pour appliquer les lois de la mécanique, il est nécessaire d'utiliser un modèle, c'est-à-dire une image simplifiée de la réalité, souvent représentée sous forme de schéma.



## 2. Hypothèses

Le modèle d'étude pour l'étude d'un mécanisme s'appuie sur deux groupes d'hypothèses relatives aux pièces et aux assemblages :

### ■ Pièces

Les pièces sont des solides indéformables (ou rigides).

Les pièces sont de géométrie parfaite.

### ■ Assemblages

Les assemblages sont des liaisons parfaites, c'est-à-dire :

- les surfaces de contacts sont géométriquement parfaites (cylindres, plans, sphères...);

- sans jeu ;
- sans frottement ;
- bilatérales (le contact se fait dans les deux sens).

Ce type de modèle est celui généralement retenu dans le cadre d'études d'avant-projets de mécanismes.

### 3. Caractéristiques d'une liaison

Une liaison entre deux solides est une relation de **contact** entre deux solides.

On caractérise une liaison par :

- sa géométrie de contact ;
- son repère local associé ;
- son centre géométrique.

#### ■ Géométrie des contacts

D'un point de vue théorique, il existe 3 géométries de contact : contact ponctuel, contact linéaire et le contact surfacique (dans la réalité, il n'existe que le contact surfacique (solides réels).

#### ■ Repère local associé (R.L.A.)

Le repère local associé à une liaison permet d'exprimer simplement les éléments cinématiques et statiques caractérisant de façon simple les degrés de liberté et de liaison.

#### NOTION DE DEGRÉ DE LIBERTÉ (OU DEGRÉS DE MOBILITÉS)

Le nombre de degré de liberté d'une liaison est le nombre des mouvements relatifs indépendants que la liaison autorise entre les deux pièces considérées.

## DEGRÉ DE LIAISON

C'est le nombre de déplacements élémentaires interdits. On notera que pour une liaison, la somme des degrés de libertés et des degrés de liaisons est égale à 6. Le degré de liaison correspond au nombre de composantes du torseur des actions mécaniques transmissibles.

### Centre géométrique

L'origine du repère idéal est le centre de la liaison.

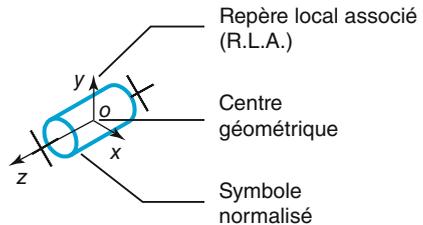
#### EXEMPLE.

La liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z})$

Degré de liberté : 1

(une rotation d'axe  $\vec{z}$ )

Degré de liaison : 5 ( $6 - 1$ )



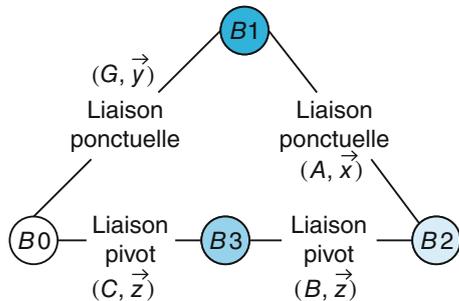
## 4. Classe d'équivalence

Un ensemble de pièces n'ayant aucun mouvement relatif entre elles, constitue une classe d'équivalence cinématique. Les pièces sont liées par une liaison complète.

## 5. Graphe des liaisons (ou de structure)

Le graphe de structure est un outil descriptif qui permet de faire le bilan des solides et des liaisons entre les solides d'un mécanisme.

Dans le graphe des liaisons les solides ou ensemble de solides sont schématisés par des cercles et les liaisons par des arcs de courbe joignant ces cercles.



## 6. Règles de modélisation

*Règle n° 1 :* Lorsque l'on étudie la liaison pouvant exister entre 2 solides, on n'étudie que ces 2 solides, le reste du mécanisme étant supposé enlevé.

*Règle n° 2 :* S'il n'y a pas de surface de contact entre ces 2 solides, il n'y a pas de liaisons mécaniques entre ces 2 solides.

*Règle n° 3 :* On ne tient pas compte des pièces déformables (voir hypothèse sur le solide).

## 7. Le schéma cinématique

Le schéma cinématique d'un mécanisme décrit exclusivement des mouvements possibles entre les différents sous-ensembles qui le constituent.

## 8. Le schéma d'architecture

Le schéma d'architecture d'un mécanisme définit toutes les liaisons élémentaires entre les différents sous-ensembles qui le constituent.

## 9. Symboles des liaisons normalisées

	Représentation plane	Représentation spatiale	Mouvements relatifs						
<b>Liaison encastrement de centre O.</b>			<table border="1"> <tr><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td></tr> </table>	x	x	x	x	x	x
x	x								
x	x								
x	x								
<b>Liaison pivot de centre O d'axe z.</b>			<table border="1"> <tr><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>Rz</td><td>x</td></tr> </table>	x	x	x	x	Rz	x
x	x								
x	x								
Rz	x								
<b>Liaison glissière de centre O d'axe z.</b>			<table border="1"> <tr><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td>x</td></tr> <tr><td>x</td><td>Tz</td></tr> </table>	x	x	x	x	x	Tz
x	x								
x	x								
x	Tz								