

J.-D. MOSSER | P. LECLERCQ | J.-P. BRODELLE | J. TANOÛ

SCIENCES  
INDUSTRIELLES  
POUR L'INGÉNIER

MP · PSI · PT

TOUT-EN-UN

3<sup>e</sup> édition

DUNOD

*l'intégrale*

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
	

© Dunod, 2010, 2017, 2019  
 11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff  
 www.dunod.com  
 ISBN 978-2-10-079394-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

79394 - (I) - OSB 80° - P2935 - LUM - SPU  
 Dépôt légal : février 2017  
 Imprimé en Espagne par Unigraf S. L.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Théorie des mécanismes</b>	<b>1</b>
	1.1 Paramétrer un mécanisme	2
	1.2 Approche cinématique	9
	1.3 Approche dynamique	15
	1.4 Approche globale	21
	1.5 Faut-il l'isostatisme ?	27
	<b>Synthèse</b>	28
	<b>Exercices d'application</b>	29
	<b>Exercices d'approfondissement</b>	32
	<b>Solutions des exercices</b>	37
<b>2</b>	<b>Description des masses en mouvement</b>	<b>51</b>
	2.1 Masse – Répartition de la masse	52
	2.2 Quantité de vitesse et quantité d'accélération	61
	2.3 Énergie cinétique	71
	<b>Synthèse</b>	76
	<b>Exercices d'application</b>	77
	<b>Exercices d'approfondissement</b>	80
	<b>Solutions des exercices</b>	83
<b>3</b>	<b>Dynamique des solides</b>	<b>95</b>
	3.1 Principe fondamental de la dynamique	96
	3.2 Notion de puissance	102
	3.3 Théorèmes énergétiques	105
	3.4 Applications du PFD	111
	<b>Synthèse</b>	115
	<b>Exercices d'application</b>	116
	<b>Exercices d'approfondissement</b>	121
	<b>Solutions des exercices</b>	125

<b>4</b>	<b>Systèmes asservis – Stabilité des systèmes</b>	<b>141</b>
	4.1 Systèmes commandés, asservis – Perturbations	142
	4.2 Stabilité des systèmes asservis	151
	4.3 Évolution de la modélisation d'un système	160
	4.4 Complément – Critère de ROUTH	161
	<b>Synthèse</b>	164
	<b>Exercices d'application</b>	164
	<b>Exercices d'approfondissement</b>	167
	<b>Solutions des exercices</b>	180
<b>5</b>	<b>Performances – Évaluation et amélioration</b>	<b>191</b>
	5.1 Performances des systèmes asservis	191
	5.2 Améliorer les performances en corrigeant la commande	205
	5.3 Correction proportionnelle	206
	5.4 Corrections à action intégrale	208
	5.5 Corrections à action dérivée	213
	5.6 Correction PID	216
	<b>Synthèse</b>	217
	<b>Exercices d'application</b>	218
	<b>Exercices d'approfondissement</b>	226
	<b>Solutions des exercices</b>	233
<b>6</b>	<b>Automatique des systèmes discrets</b>	<b>253</b>
	6.1 Modélisation des systèmes discrets	254
	6.2 Modélisation UML & SysML	255
	6.3 Éléments graphiques de base d'un diagramme d'état	256
	6.4 Éléments graphiques d'états élaborés	267
	6.5 Structures algorithmiques de base	281
	<b>Synthèse</b>	284
	<b>Exercices d'application</b>	285
	<b>Exercices d'approfondissement</b>	298
	<b>Solutions des exercices</b>	301
	<b>Index</b>	<b>313</b>

# Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de deuxième année de classe préparatoire aux grandes écoles et s'inscrit dans la continuité du volume de première année. Il présente l'ensemble des notions et des compétences à maîtriser pour l'analyse, le contrôle et la commande des servomécanismes dans le cadre du programme officiel des trois filières PT, PSI et MP :

- le premier chapitre expose les bases pour aborder l'analyse de la structure des mécanismes ;
- les deux chapitres suivants définissent les outils pour la description des masses solides en mouvement et des énergies mises en jeu ;
- les quatrième et cinquième chapitres s'intéressent à la stabilité et aux performances des systèmes asservis ;
- le dernier chapitre apporte les compléments requis pour préciser la commande des systèmes discrets.

Dès que possible, le cours s'appuie sur les notions acquises en sciences physiques, en mathématiques et en informatique. Il reste concis, avec des notations simples et transversales, construites de manière à transmettre les notions abordées. Les exercices sont expliqués et corrigés de façon détaillée, avec des compléments accessibles sur le site Internet <http://www.jdotec.net>

Les systèmes présentés à cette occasion sont des ensembles dont une étude partielle a été menée lors des concours d'entrée aux écoles d'ingénieurs, X-Cachan, Centrale-Supélec, Mines-Ponts, CCP ou E3A par exemple.

La finalité de cet ouvrage est d'une part de préparer les étudiants aux concours les plus exigeants, d'autre part de donner outils et méthodes nécessaires à l'approche de réalisations industrielles modernes de plus en plus automatisées.

Au-delà de cette finalité, l'objectif des auteurs est également de soutenir l'étudiant dans la construction d'une attitude de recherche autonome, capacité qui offre ouverture d'esprit et enrichissement sur les plans professionnel, social et humain.

Les auteurs confient aux lecteurs la tâche de retourner remarques et suggestions en adressant un courrier électronique à l'adresse [s3i@jdotec.net](mailto:s3i@jdotec.net) ou un courrier postal aux bons soins des éditions Dunod. Ils souhaitent à chacun de leurs lecteurs de parvenir au niveau d'expertise leur permettant de prendre une place active dans la gestion des projets industriels complexes.

Jean-Dominique Mosser

## Les pictogrammes dans la marge



Commentaires pour bien comprendre le cours (reformulation d'un énoncé, explication d'une démonstration...).



Indication du degré d'importance d'un résultat.



Mise en garde contre des erreurs fréquentes.



Rappel d'hypothèse ou de notation.



## Plan

1.1 Paramétrer un mécanisme	2
1.2 Approche cinématique	9
1.3 Approche dynamique	15
1.4 Approche globale	21
1.5 Faut-il l'isostatisme ?	27
Exercices d'application	29
Exercices d'approfondissement	32
Solutions des exercices	37

## Introduction

Les mécanismes sont des dispositifs constitués de solides assemblés pour transformer des mouvements, et pour lesquels on peut mener deux approches complémentaires :

- une approche technologique, pour l'art du choix et de l'assemblage des composants ;
- une approche mécanique, pour les outils et les méthodes de calcul à appliquer sur les modèles associés.

La théorie des mécanismes est le domaine de la mécanique qui s'intéresse à l'architecture des mécanismes et relève clairement d'une approche mécanique. Elle s'appuie sur la théorie des graphes et sur les techniques de résolution des systèmes d'équations linéaires pour atteindre trois objectifs :

- aboutir à une mise en équation ;
- évaluer les possibilités de résolution ;
- automatiser la recherche de l'influence de chacun des paramètres.

Aujourd'hui, le génie logiciel accompagne le mécanicien et on met en conséquence l'accent plus sur la compréhension des phénomènes que sur les méthodes de calcul, et on sollicite un travail d'imagination de mouvements en parallèle aux activités menées.

## Prérequis

- Notion de solide indéformable.
- Graphe de structure, graphe des liaisons.
- Chaînes ouvertes et chaînes fermées.
- Degré de liberté.
- Liaisons usuelles.
- Lois de composition des mouvements.
- Techniques de résolution des systèmes d'équations linéaires.

## Objectifs

- Paramétrer un mécanisme.
- Dénombrer les inconnues et les équations disponibles.
- Différencier les structures isostatiques des structures hyperstatiques.

La théorie des mécanismes s'appuie sur l'étude des chaînes fermées de solides et a pour buts :

- l'analyse de la structure d'un mécanisme, afin d'émettre un avis sur la pertinence des solutions adoptées pour remplir la fonction mécanique souhaitée ;
- la détermination des différentes lois entrée-sortie ;
- l'analyse de la transmission d'énergie en vue du dimensionnement des organes mécaniques.



Qui dit transformation de mouvements dit chaînes fermées de solides !

## 1.1 Paramétrer un mécanisme

Pour pouvoir analyser la structure d'un mécanisme, il est nécessaire de comprendre la description géométrique qui en est donnée, la plupart du temps, sous forme de schémas plus ou moins détaillés.

### Définition

On appelle « **paramétrer** » l'activité qui consiste à définir variables et invariants.

D'une manière générale, l'évaluation des variations s'apprécie au cours du temps et il n'est pas inutile de préciser la définition précédente :

- les **variables** sont des quantités qui peuvent varier au cours du temps ;
- les **invariants** sont des quantités qui restent constantes au cours du temps.

Paramétrer est une activité qui concerne tous les domaines scientifiques, et le résultat s'exprime sur un schéma. Dans le cas particulier des mécanismes, si le paramétrage est effectivement donné sur un schéma cinématique, la réflexion qui accompagne son élaboration se mène à partir du graphe des liaisons :

- les variables se dénombrent à partir de l'analyse des arcs, complétée dans le cas des actions mécaniques par l'inventaire du milieu environnant ;
- les invariants sont de nature géométrique, à savoir des longueurs ou des angles caractéristiques, mis en évidence à partir de l'analyse des sommets.

### Poser les variables

Les variables cinématiques sont implicitement posées avec les modèles de comportement choisis, c'est-à-dire avec les liaisons proposées, et sont plus ou moins explicitées dans les torseurs cinématiques.

Cette proposition mérite d'être détaillée et illustrée.

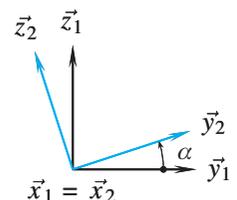
Quand elle correspond au taux de variation d'un paramètre géométrique, une variable cinématique est toujours interprétable.

#### Exemple

Une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  posée entre deux solides 1 et 2 admet une possibilité de rotation que l'on peut caractériser par un angle posé entre deux bases vectorielles.

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \dot{\alpha} \vec{x}_1 \\ A \vec{0} \end{cases}$$

La variable cinématique  $\alpha$  est sans ambiguïté la dérivée par rapport au temps de l'angle  $\alpha$ , quantité observable et mesurable.



On rappelle qu'une possibilité de variation ne suppose pas de variations effectivement constatées.



Dans cet ouvrage, on rappelle qu'une liaison est un modèle de comportement cinématique, à ne pas confondre avec le réel.

### 1.1.1

Quand elle ne découle pas d'un paramètre géométrique, la variable est souvent impossible à interpréter.

### Exemple

Une liaison sphérique de centre  $C$  posée entre deux solides 1 et 2 comporte trois degrés de liberté, que l'on ne détaille généralement pas en posant le vecteur rotation.

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{0} \end{cases}_C$$

Il est toujours possible d'exprimer des coordonnées pour le vecteur rotation et de poser  $\vec{\Omega}(2/1) = p_{21} \vec{x}_1 + q_{21} \vec{y}_1 + r_{21} \vec{z}_1$ , mais les variables  $p_{21}$ ,  $q_{21}$  et  $r_{21}$  ne sont pas les dérivées par rapport au temps d'angles posés respectivement autour de  $\vec{x}_1$ ,  $\vec{y}_1$  ou  $\vec{z}_1$ .



Poser dans ce cas des coordonnées est une activité à ne mener que dans des cas très particuliers, et surtout pas de manière systématique !

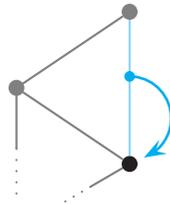
## 1.1.2

### Rechercher les invariants

Les lois de comportement que l'on met en évidence lors d'une résolution ne sont pas universelles et ne peuvent être associées qu'aux mécanismes dont elles sont issues. Leur domaine de validité est exprimé par les caractéristiques géométriques propres à la structure étudiée. Celles-ci apparaissent sous deux formes :

- soit clairement sous forme d'invariants identifiés et nommés, à savoir des longueurs ou des angles chiffrés ;
- soit de manière plus cachée, lorsque les longueurs ou les angles concernés sont nuls, ce qui se traduit par des parallélismes ou des intersections par exemple.

La recherche des invariants géométriques est menée à partir du graphe des liaisons, en s'intéressant aux sommets et en faisant l'inventaire pour chaque solide des propriétés géométriques issues des arcs le joignant.



Quelles sont les caractéristiques géométriques induites par cette liaison ?

### Les six liaisons les plus simples

Six liaisons usuelles permettent une appréhension aisée de ces propriétés géométriques. En effet, elles ne font intervenir sur chaque solide qu'un seul des éléments géométriques pris dans l'ensemble {point, droite, plan}. On résume ces caractéristiques dans un tableau.

		Solide 2		
		point	droite	plan
Solide 1	point	sphérique	sphère cylindre	sphère plan
	droite		pivot glissant	cylindre plan
	plan			appui plan

Ce tableau s'exploite en pointant à partir de la liaison la propriété à trouver sur chacun des solides.



Les invariants sont exprimés par la position relative des éléments géométriques sur un solide.

### Exemple

À partir de la liaison cylindre-plan, on doit trouver une droite sur l'un des solides et un plan sur le second.



### Les quatre autres liaisons usuelles

Les quatre autres liaisons usuelles méritent une attention particulière :

- La liaison pivot autorise une seule rotation. Sur chacun des deux solides concernés est définie une droite :
  - ces deux droites restent confondues au cours du temps ;
  - ces deux droites ne peuvent pas glisser l'une le long de l'autre.
 On peut proposer comme caractéristique géométrique une demi-droite sur chacun des deux solides. Peu importe où est pris le point, mais une fois choisi, les deux demi-droites restent confondues au cours du temps.
- La liaison glissière autorise une seule translation rectiligne orientée par un vecteur. Seule la direction est caractéristique.
- La liaison hélicoïdale autorise une rotation et une translation rectiligne conjuguées par la présence d'une hélice. On se contente dans le cadre de cet ouvrage de relever l'axe de rotation commun et la valeur du pas.
- La liaison sphérique à doigt pointe sur un des solides vers un point sur une droite, et sur le second vers un point sur un plan.

### Exemple d'utilisation

On considère un mécanisme de levage réalisé à l'aide d'un vérin. Il est schématisé sur la figure ci-dessous et composé de quatre ensembles :

- un châssis 1, auquel on associe un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- une benne 2, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_1)$  avec le châssis ;
- un vérin pour assurer la rotation de la benne par rapport au châssis :
  - le piston 3 est en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x}_1)$  avec le châssis,
  - le corps de vérin 4 est en liaison pivot glissant d'axe  $(B, \vec{x}_2)$  avec la benne,
  - on modélise le contact entre la tige et le corps de vérin par une liaison pivot glissant d'axe  $(BC)$ .

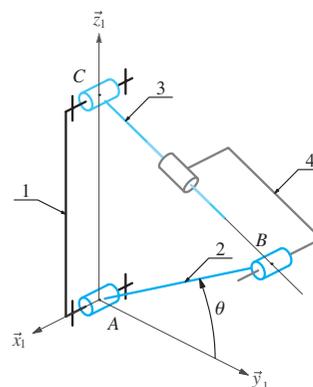


Figure 1.1 Schéma cinématique du mécanisme.



Une demi-droite correspond à un intervalle fermé d'un côté par un point  $P$ , infini de l'autre  $[P, \infty[$

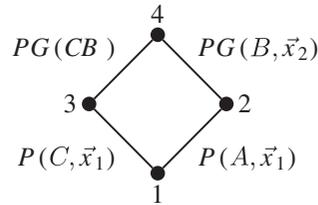


Le pas de l'hélice, souvent noté  $p$ , est un des invariants que l'on retrouve dans les calculs !



Un texte de présentation est rarement exhaustif. Un schéma cinématique est rarement complètement paramétré. L'un et l'autre sont élaborés de manière à ce que l'ensemble des informations soit accessible. En cas de doute, c'est l'absence d'information qui permet de choisir la proposition la plus simple.

On se propose d'analyser la structure décrite afin de comprendre les informations données, de faire apparaître les invariants, et enfin de compléter le paramétrage. Le graphe des liaisons comporte quatre sommets et quatre arcs.

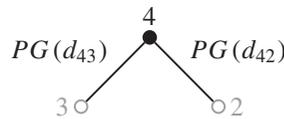


4	Corps de vérin
3	Piston
2	Benne
1	Châssis
P	Pivot d'axe (Dte)
PG	Pivot glissant d'axe (Dte)

Ce mécanisme admet six variables cinématiques, ce total étant la somme des degrés de liberté des différentes liaisons.

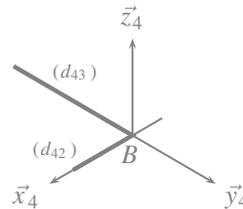
La recherche des invariants se mène à partir de chacun des sommets :

- On commence par le sommet attribué au corps de vérin 4, d'où partent deux arcs :
  - la liaison pivot glissant vers 3 induit l'existence d'une droite  $d_{43}$  ;
  - la liaison pivot glissant vers 2 induit l'existence d'une autre droite  $d_{42}$ .

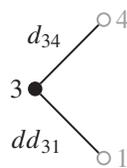


On trouve donc sur le corps 4 deux droites  $d_{42}$  et  $d_{43}$ . L'absence d'informations complémentaires concernant ces deux droites invite à les considérer sécantes et perpendiculaires. On nomme  $B$  le point d'intersection et on associe à la pièce une base vectorielle dont les directions  $\vec{x}_4$  et  $\vec{y}_4$  orientent les axes de rotation.

Cette recherche est terminée, et on fait la synthèse de la géométrie du corps de vérin 4.

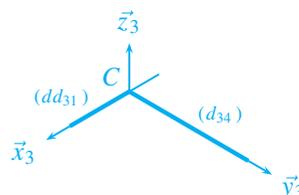


- On s'intéresse maintenant au sommet du piston 3, et aux deux arcs qui le joignent :



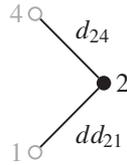
- la liaison pivot glissant vers 4 induit l'existence d'une droite  $d_{34}$  ;
- la liaison pivot vers 1 induit l'existence d'une demi-droite  $dd_{31}$ .

L'énoncé laisse envisager sur 3 ces deux droites sécantes et perpendiculaires. On nomme en conséquence  $C$  le point d'intersection,  $(C, \vec{x}_3)$  la demi-droite et  $(C, \vec{y}_3)$  la droite.



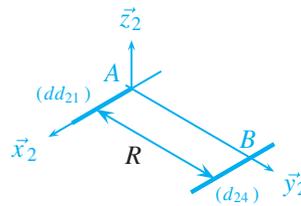
Le point d'intersection est matérialisé sur le schéma, et la perpendicularité est induite par les directions tracées.

- On poursuit par le sommet correspondant à la benne 2 :

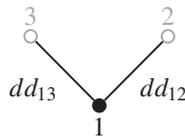


- la liaison pivot glissant vers 4 induit l'existence d'une droite  $d_{24}$  ;
- la liaison pivot vers 1 induit l'existence d'une demi-droite  $dd_{21}$ .

Les deux droites trouvées sur la benne 2 sont parallèles : on les oriente avec le vecteur  $\vec{x}_2$  et on pose  $\overline{AB} = R\vec{y}_2$ .

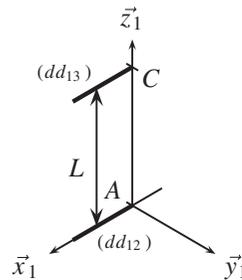


- On termine par le sommet du châssis 1 :



- la liaison pivot vers 3 induit l'existence d'une demi-droite  $dd_{13}$  ;
- la liaison pivot vers 2 induit l'existence d'une demi-droite  $dd_{12}$ .

Les deux demi-droites trouvées sur le châssis 1 sont parallèles : on les oriente avec le vecteur  $\vec{x}_1$ , et on pose  $\overline{AC} = L\vec{z}_1$ .



En conclusion, cette structure présente deux invariants explicites, la longueur  $L$  sur le châssis et la longueur  $R$  sur la benne. Toutes les autres propriétés sont implicites, sous forme de droites soit parallèles, soit sécantes et perpendiculaires.

### 1.1.3 Mobilité – Degré de liberté

On approfondit ici le lien qui existe entre les variables cinématiques et géométriques. Un degré de liberté a été défini dans l'ouvrage de première année comme une possibilité de mouvement entre deux solides, et il a été mis en évidence que dans l'espace géométrique de dimension 3, un solide évolue dans un espace à six degrés de liberté. Lorsqu'une variable cinématique est posée, c'est qu'il existe une grandeur géométrique qui peut varier au cours du temps :

- soit elle varie effectivement, et le taux de variation est donné par sa dérivée ;
- soit elle ne varie pas, parce que la variable cinématique correspondante est calculée nulle lors de la résolution.



Ce n'est pas parce qu'une variable est constante qu'elle ne peut pas varier !

On réalise ainsi qu'il est important de bien distinguer une possibilité de variation d'une variation effective, ce que permettent de faire les concepts mathématiques de différentielle et de dérivée.

### Définition

On appelle **mobilité** la différentielle d'un paramètre de mise en position.

On ne cherche pas à évaluer la variation effective d'un paramètre, mais sa capacité à évoluer. Le terme de mobilité étant défini ainsi, on peut proposer une nouvelle définition pour la notion de degré de liberté.

### Définition

On appelle **degré de liberté** une mobilité non nulle.

C'est ainsi que par rapport à un repère donné :

- un solide possède six mobilités ;
- un solide possède au plus six degrés de liberté.

## 1.1.4 Élaborer un schéma cinématique

On ne peut terminer cette section sans approfondir un petit peu la notion de schéma cinématique, afin de prendre en compte les nouveaux acquis.

### Définition

Un **schéma cinématique** est une représentation graphique codifiée des possibilités de mouvements entre solides.

Un schéma cinématique est réalisé à partir de symboles, majoritairement normalisés, agencés en respectant les caractéristiques géométriques du mécanisme à modéliser. Il est élaboré en trois étapes :

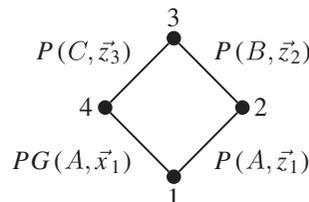
- tracé de l'épure géométrique ;
- mise en place des symboles ;
- habillage.

### Épure géométrique

Cette première étape est celle qui demande le plus de réflexion. Elle s'appuie sur la recherche des invariants géométriques menée à partir du graphe des liaisons. Il s'agit tout d'abord d'inventorier les propriétés géométriques du mécanisme, ensuite de les retranscrire sur la projection souhaitée. Cette étape est illustrée à partir de l'exemple suivant :

#### Système bielle manivelle (1/3)

On souhaite tracer dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  le schéma cinématique d'un système bielle-manivelle modélisé par le graphe des liaisons suivant :



4	Piston
3	Bielle
2	Manivelle
1	Bâti
P	Pivot d'axe ( <i>Dte</i> )
PG	Pivot glissant d'axe ( <i>Dte</i> )



Le mot **épure** admet deux sens, que l'on retrouve simultanément ici. D'une part, c'est une ébauche. D'autre part, c'est une projection d'un objet tridimensionnel sur un plan, avec les règles de tracé induites.

On précise de plus que :

- les bases vectorielles attachées aux quatre solides 1, 2, 3 et 4 sont posées telles que  $\vec{z}_4 = \vec{z}_3$ ,  $\vec{z}_3 = \vec{z}_2$  et  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  ;
- le point  $C$  appartient à la droite  $(A, \vec{x}_1)$  ;
- la bielle est beaucoup plus *longue* que la manivelle.

L'analyse successive des quatre sommets conduit aux propositions suivantes :

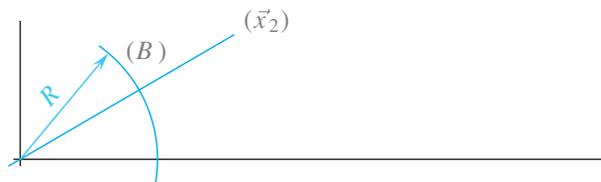
- le bâti 1 comporte au moins deux droites sécantes au point  $A$  et orthogonales ;
- la manivelle 2 comporte deux demi-droites parallèles et on pose  $\overline{AB} = R\vec{x}_2$  ;
- la bielle 3 comporte demi-deux droites parallèles et on pose  $\overline{BC} = L\vec{x}_3$  ;
- le piston 4 comporte au moins deux droites sécantes au point  $C$  et perpendiculaires.

L'épure géométrique se construit alors en trois étapes :

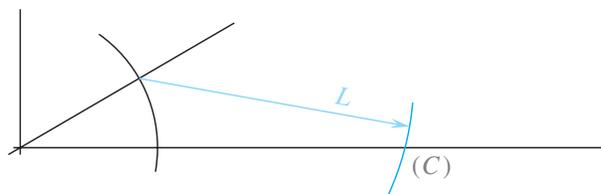
- 1) on commence par le tracé du repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$  pour positionner les deux droites  $(A, \vec{x}_1)$  et  $(A, \vec{z}_1)$  caractéristiques du bâti



- 2) on trace avec un compas l'arc de cercle de rayon  $R$  caractéristique de la manivelle



- 3) on reporte enfin au compas la longueur  $L$  de la bielle à partir du point  $B$ , telle que  $L \gg R$ , et on trouve la position du point  $C$  par intersection de l'arc tracé avec la droite  $(A, \vec{x}_1)$



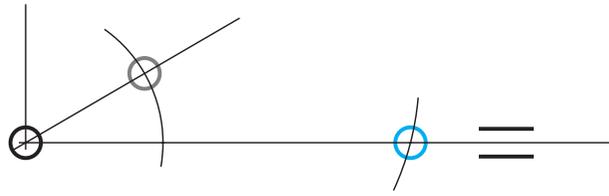
### Mise en place des symboles

Les symboles se positionnent en commençant par les liaisons à contraintes géométriques les plus fortes, à savoir dans l'ordre :

- 1) les liaisons à centre, pour lesquelles le symbole est centré sur le point caractéristique ;
- 2) les liaisons à axe, pour lesquelles le symbole se positionne n'importe où le long de la droite caractéristique ;
- 3) les liaisons à direction, pour lesquelles le symbole se positionne n'importe où dans l'espace, avec comme seule contrainte de respecter l'orientation caractéristique.

### Système bielle manivelle (2/3)

Les trois axes des liaisons pivot étant perpendiculaires à la feuille, il n'y a pas le choix pour tracer les cercles correspondants. Par contre, le symbole pour la liaison pivot glissant se positionne où l'on veut sur la droite ( $A, \vec{x}_1$ ).

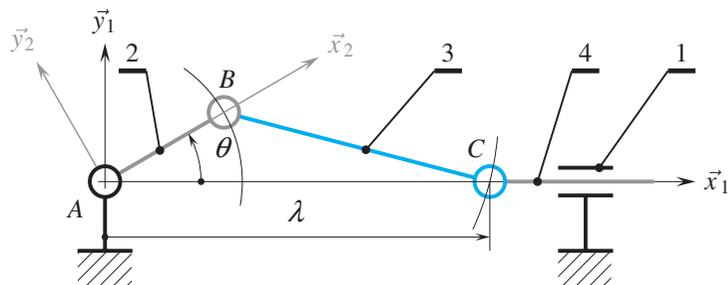


### Habillage

L'habillage du schéma consiste :

- à relier les symboles entre eux ;
- à ajouter les numéros des solides et la nomenclature ;
- à matérialiser les repères attachés aux solides ;
- à poser les variables ou les invariants remarquables.

### Système bielle manivelle (3/3)



Les symboles des liaisons sont bicolores, et les couleurs sont en relation avec celles des solides concernés !

## 1.2 Approche cinématique



Les lettres choisies font référence au nombre de pièces pour  $N_p$  et au nombre de liaisons pour  $N_L$ .

### 1.2.1

### Nombre de cycles indépendants

La théorie des mécanismes s'appuie sur l'étude des chaînes fermées de solides. La première préoccupation est donc de les dénombrer. Soit  $\mu$  ce nombre :

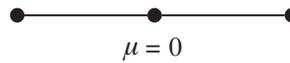
- le plus petit des graphes ne comporte qu'un seul sommet et il n'y a aucune chaîne fermée ;

$$\bullet \\ \mu = 0$$

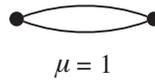
- on ajoute un sommet et un arc pour obtenir la plus petite des chaînes ouvertes ;

$$\bullet \text{---} \bullet \\ \mu = 0$$

- à partir de là, ajouter un sommet et un arc ne crée pas de chaîne fermée ;



- pour créer la plus petite des chaînes fermées à partir de la plus petite des chaînes ouvertes, il est nécessaire et suffisant d'ajouter un arc ;



C'est ainsi que l'on constate qu'ajouter un arc augmente le nombre de cycles d'une unité, alors qu'ajouter à la fois un arc et un sommet ne le change pas.

**Définition**

On appelle **nombre de cycles** le nombre de chaînes fermées indépendantes à parcourir pour décrire un graphe dans sa totalité.

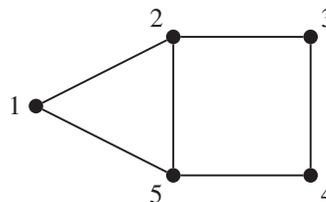
Le nombre de cycles se calcule par la formule

$$\mu = 1 + N_L - N_P \tag{1}$$

Pour la mémoriser, il suffit de se rappeler qu'il faut deux sommets et deux arcs pour la plus petite des boucles, et que le nombre de cycles augmente avec le nombre de liaisons, d'où les signes respectifs pour  $N_L$  et  $N_P$ .

**Exemple**

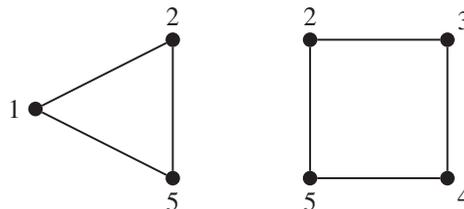
Soit un mécanisme dont le graphe de structure est donné ci-dessous.



On dénombre  $N_P = 5$  sommets et  $N_L = 6$  arcs, ce qui donne deux cycles indépendants.

$$\mu = 1 + N_L - N_P = 2$$

Ces deux chaînes fermées sont par exemple  $1 - 2 - 5 - 1$  et  $2 - 3 - 4 - 5 - 2$ .



La chaîne  $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1$  est également une chaîne fermée, mais elle se déduit des deux précédentes.



L'ordre des termes permet de comprendre et de retenir.



**Définition**

On appelle **indice de mobilité** l'entier relatif  $I_c - E_c$ , différence entre le nombre d'inconnues cinématiques et le nombre d'équations cinématiques.

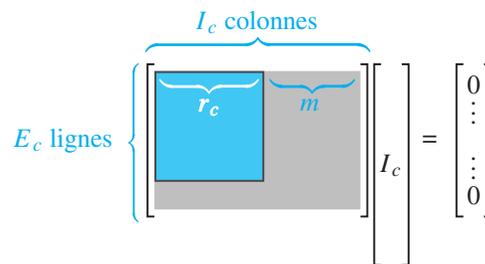
Si l'on suppose que  $I_c > E_c$ , comme le montre la figure précédente, on constate que l'indice de mobilité donne le nombre minimum d'inconnues qu'il faut basculer dans le second membre pour pouvoir résoudre :

- l'indice de mobilité se détermine sans écrire le système d'équations ;
- cet entier relatif est utile pour amorcer une réflexion globale.

## Degré de mobilité

La résolution du système d'équations précédent prend en compte son rang, noté  $r_c$ . Dans le cas où  $r_c = I_c$ , la seule solution est la nullité de toutes les inconnues, donc de tous les paramètres cinématiques. Le mécanisme définit alors une structure rigide, aucun mouvement n'est possible.

Dans le cas contraire, on suppose connu le rang du système et les équations disposées ainsi



**Définition**

On appelle **degré de mobilité** d'un mécanisme le nombre de mouvements indépendants possibles. C'est un entier naturel noté  $m$  et calculé par

$$m = I_c - r_c$$

Le degré de mobilité est toujours positif ou nul. En effet, le rang d'un système de  $E_c$  équations à  $I_c$  inconnues est inférieur ou égal au plus petit de ces deux nombres, ce qui veut dire que le rang est toujours inférieur ou égal au nombre d'inconnues  $I_c$ .

$$r_c \leq \min(I_c, E_c) \leq I_c$$

**Remarque**

La recherche du rang du système d'équations est très instructive, car elle permet de différencier les inconnues qui peuvent devenir inconnues principales de celles qui ne le peuvent pas.

Le degré de mobilité  $m$  représente le nombre d'inconnues qu'il faut passer dans le second membre. Toutes les  $r_c$  autres inconnues du problème s'expriment ensuite en fonction de ces  $m$  inconnues principales.

C'est ainsi que l'on appelle **loi entrée-sortie** d'un mécanisme toute relation entre des inconnues cinématiques qui peut s'interpréter comme une inconnue exprimée en fonction d'une ou plusieurs inconnues principales. Un mécanisme admet au plus  $r_c$  lois entrée-sortie.



Le mot *indice* est à entendre comme l'entend un détective. C'est un nombre qui donne une indication, une tendance, et même quelques certitudes...



Lors de la résolution, on exprime toutes les inconnues gardées dans le membre de gauche en fonction des inconnues principales !

### 1.2.5



Le degré de mobilité est positif ou nul :  $m \geq 0$  !



Les inconnues principales ont un statut particulier pour le mécanicien : elles correspondent aux mouvements que l'on peut motoriser !

## 1.2.6

## Degré de statisme

On constate qu'un certain nombre d'équations ne servent pas à la résolution.

On pose alors le nombre  $h = E_c - r_c$  que l'on appelle degré de statisme :

- si ce nombre est nul, on parle d'une structure isostatique ;
- sinon, on parle d'une structure hyperstatique de degré  $h$ .

Le degré de statisme est défini lors de l'approche dynamique abordée à la section suivante, page 15. Néanmoins, on peut en donner une première interprétation cinématique : il quantifie le nombre de degrés de liberté manquants pour garantir un montage sans contrainte du mécanisme.

En conclusion des différentes définitions, on peut compléter la forme arrangée du système d'équations :

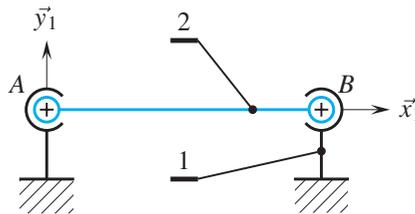
$$\begin{array}{c} I_c \text{ colonnes} \\ \left[ \begin{array}{cc} \overbrace{\hspace{2cm}}^{r_c} & \overbrace{\hspace{2cm}}^m \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_h & \end{array} \right]_{I_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ E_c \text{ lignes} \end{array}$$

## 1.2.7

## Exemple

## Présentation

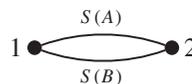
On considère l'arbre intermédiaire repéré 2 d'un réducteur à engrenages. Il est guidé par rapport à un bâti noté 1 par deux roulements à billes à contact oblique. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphériques de centres respectifs  $A$  et  $B$ .



On souhaite déterminer les degrés de mobilité et de statisme de cette structure.

## Résolution

Le graphe des liaisons comporte une chaîne fermée de solides, et on adopte la notation  $S(pt)$  pour la liaison sphérique de centre  $pt$ .



Cette structure admet un indice de mobilité nul :

$$I_c - E_c = 0$$



En général, les équations qui ne servent à rien sont de la forme  $0 = 0$ .



L'interprétation cinématique du degré de statisme est développée sur l'exemple qui suit.

On pose les deux torseurs cinématiques pour caractériser les six inconnues cinématiques :

$$\mathcal{V}(2a/1) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(2a/1) \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad \mathcal{V}(2b/1) = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(2b/1) \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

En vue d'écrire le système d'équations, on pose les composantes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(2a/1) = p_a \vec{x}_1 + q_a \vec{y}_1 + r_a \vec{z}_1 \\ \vec{\Omega}(2b/1) = p_b \vec{x}_1 + q_b \vec{y}_1 + r_b \vec{z}_1 \\ \overline{AB} = L \vec{x}_1 \end{array} \right.$$

On écrit l'équation des vitesses au point  $B$  pour obtenir le système de six équations à six inconnues recherché :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_a - p_b = 0 \\ q_a - q_b = 0 \\ r_a - r_b = 0 \\ 0 = 0 \\ r_a L = 0 \\ -q_a L = 0 \end{array} \right.$$

La résolution est immédiate et on en déduit les différents résultats sans avoir besoin de passer par l'écriture matricielle :

- le rang  $r_c$  est égal à 5 ;
- le degré de mobilité  $m$  est égal à 1, avec  $p_a$  ou  $p_b$  comme inconnue principale possible ;
- le degré de statisme  $h$  est égal à 1, avec une équation de la forme  $0 = 0$  pour l'équation des vitesses au point  $B$  en projection sur  $\vec{x}_1$ .

### Interprétation

Sur les trois rotations possibles de chaque liaison sphérique, une seule le demeure au sein de la chaîne fermée.

Concernant l'hyperstatisme de degré 1, la recherche des invariants donne l'interprétation géométrique complémentaire de l'analyse cinématique :

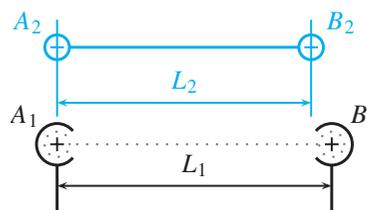
- les points  $A$  et  $B$  sont définis sur chacun des deux solides, ce qui est caché lorsque l'on pose un peu rapidement  $\overline{AB} = L \vec{x}_1$  ;
- la présence des deux points sur le bâti 1 conduit d'une part à poser

$$\overline{A_1 B_1} = L_1 \vec{x}_1$$

- la présence des deux points sur l'arbre 2 conduit d'autre part à poser

$$\overline{A_2 B_2} = L_2 \vec{x}_2$$

- les deux longueurs  $L_1$  et  $L_2$  sont souhaitées égales, mais proviennent de deux origines différentes et n'ont aucune chance d'être effectivement égales ;
- le fait de les imaginer différentes permet de comprendre le souci possible au montage, ce qu'illustre la figure ci-dessous sur laquelle la longueur  $L_1$  est supérieure à la longueur  $L_2$ . Si on suppose les points  $A_i$  superposés, alors on a un souci en translation suivant  $\vec{x}_1$  pour superposer également les points  $B_i$ .



C'est uniquement parce que l'on souhaite écrire le système complet d'équations que l'on pose des composantes pour les vecteurs rotations : ce n'est surtout pas une habitude à prendre !



Écrire l'équation des vitesses au point  $A$  donne un résultat semblable, qui entraîne bien évidemment les mêmes conclusions.

## 1.3 Approche dynamique



Cette approche reprend évidemment le plan de l'approche cinématique !



Les lettres choisies font référence au nombre de pièces pour  $N_p$  et au nombre de liaisons pour  $N_L$ .

### 1.3.1

### Nombre d'équations

Une étude dynamique systématique est menée en étudiant le mouvement ou l'équilibre de chacune des pièces du mécanisme.

Le mouvement ou l'équilibre étant nécessairement relatif à une de ces pièces, prise comme référentiel, on dénombre alors  $N_p - 1$  mouvements à considérer.

Soit  $E_s$  le nombre d'équations scalaires obtenus après une étude exhaustive.

$$E_s = 6(N_p - 1)$$



En général, le bâti est considéré comme un repère galiléen satisfaisant et tous les mouvements à considérer pour cette étude exhaustive lui sont relatifs !

### 1.3.2

### Nombre d'inconnues

Soit  $I_s$  le nombre d'inconnues scalaires d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées parfaites du problème.

On rappelle que la puissance dissipée par une liaison parfaite est nulle, ce qui se traduit par le comoment nul du torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison et de son torseur cinématique.

$$\forall t, \mathcal{F}(k \rightarrow i) \otimes \mathcal{V}(i/k) = 0$$

Une des conséquences élémentaires est que pour une liaison à  $k$  inconnues cinématiques, on a  $6 - k$  inconnues d'actions mécaniques transmissibles par la liaison parfaite.



Le nombre d'inconnues comptées ne concerne que les liaisons, et celles-ci sont supposées sans jeu et sans frottement !



L'expression de la puissance sous forme de comoment est développée au chapitre 3, lors du cours de dynamique.

### 1.3.3

### Indice de mobilité

On a donc à traiter un système de  $E_s$  équations à  $I_s$  inconnues de liaison. Ce système est un système linéaire avec second membre qui peut être présenté sous la forme matricielle suivante

$$\left[ \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{10em}}_{I_s \text{ colonnes}} \\ \left[ \begin{array}{c} \phantom{\hspace{10em}} \\ \phantom{\hspace{10em}} \\ \phantom{\hspace{10em}} \end{array} \right]_{E_s \text{ lignes}} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \phantom{\hspace{10em}} \\ \phantom{\hspace{10em}} \\ \phantom{\hspace{10em}} \end{array} \right]_{I_s} = \left[ \begin{array}{c} \text{Second} \\ \text{membre} \end{array} \right]$$

Le second membre comprend :

- les composantes d'actions mécaniques extérieures autres que les composantes de liaison, telles que les composantes dues à la pesanteur, à un élément déformable, à un récepteur ou à un moteur... ;
- les composantes dynamiques.



Les composantes dynamiques sont mises en évidence avec le principe fondamental de la dynamique.

En reprenant la définition de l'indice de mobilité vue en cinématique et en tenant compte de la dualité entre cinématique et actions mécaniques qui s'exprime par l'égalité  $I_c + I_s = 6N_L$ , on obtient

$$\begin{aligned} I_c - E_c &= 6N_L - I_s - 6(1 + N_L - N_p) \\ &= 6(N_p - 1) - I_s \\ &= E_s - I_s \end{aligned}$$

L'indice de mobilité défini lors de l'approche cinématique se détermine également lors d'une approche dynamique par soustraction du nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons parfaites au nombre d'équations disponibles.

$$I_c - E_c = E_s - I_s$$

### 1.3.4 Degré de statisme

La résolution du système d'équations précédent prend en compte son rang, noté  $r_s$ . Dans le cas  $r_s = I_s$ , la seule solution du système homogène associé est la nullité de toutes les inconnues, donc de toutes les composantes d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons. Cette constatation induit les deux définitions suivantes.

#### Définitions

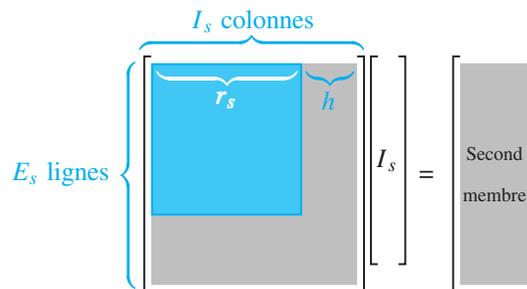
Un mécanisme est dit **isostatique** si, en l'absence de sollicitations extérieures, toutes les inconnues transmissibles par les liaisons supposées parfaites sont nulles.

Un mécanisme est dit **hyperstatique** si, en l'absence de sollicitations extérieures, il existe des inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées parfaites indéterminées.

#### Remarques

- Isostatique et hyperstatique sont des adjectifs, dont les substantifs correspondants sont respectivement *isostatisme* et *hyperstatisme*.
- Dans le cas de l'hyperstatisme, les inconnues indéterminées sont dans les faits le plus souvent non nulles.

On suppose les équations disposées ainsi



#### Définition

On appelle **degré de statisme** d'un mécanisme le nombre d'inconnues principales du système d'équations homogènes ne comportant que les inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons parfaites. C'est un entier naturel noté  $h$  et calculé par

$$h = I_s - r_s$$



Considérer le système homogène associé veut dire que l'on ne tient compte d'aucune sollicitation extérieure. Seules les composantes transmissibles par les liaisons sont envisagées !



Le degré de statisme se retrouve souvent sous l'appellation « degré d'hyperstativité ». Cette expression est compréhensible et donc possible, mais elle est difficile à prononcer et abandonne le parallèle avec le degré de mobilité.

Le degré de statisme est toujours positif ou nul. En effet, le rang d'un système de  $E_s$  équations à  $I_s$  inconnues est inférieur ou égal au plus petit de ces deux nombres, ce qui veut dire que le rang est toujours inférieur ou égal au nombre d'inconnues  $I_s$ .

$$r_s \leq \min(I_s, E_s) \leq I_s$$

Un mécanisme isostatique admet un degré de statisme nul, et un mécanisme dont le degré de statisme est strictement positif est hyperstatique de degré ce nombre.

On ne peut terminer cette section sans attirer l'attention sur un point délicat à comprendre. Dans les faits, deux systèmes d'équations sont à envisager :

- le système étudié jusqu'ici, où il n'y a que les inconnues de liaison dans le membre de gauche. Ce système permet de calculer le degré de statisme de la structure étudiée ;
- le système d'équations général, pour lequel on ramène dans le membre de gauche toutes les inconnues d'actions mécaniques que l'on souhaite déterminer en plus des inconnues de liaison.



Les deux systèmes d'équations sont envisagés dans l'exemple de la section 1.3.6.

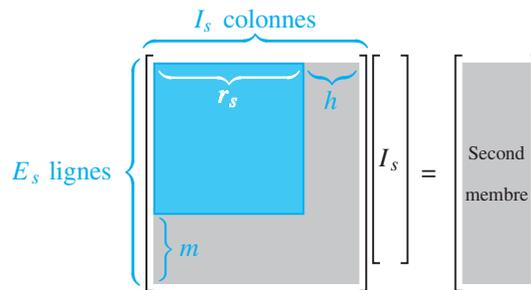
## 1.3.5 Degré de mobilité

Lors de l'approche dynamique, le degré de mobilité se trouve également sur le système d'équations. Il correspond au nombre d'équations superflues pour déterminer les composantes de liaison.

### Remarque

Les équations ne servant pas à la résolution ne font pas intervenir de composantes d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons parfaites.

On trouve  $m = E_s - r_s$  et l'ensemble des propositions peut être résumé sur la figure ci-dessous.



Le second membre a été détaillé à la section 1.3.3 page 15.

De par la dualité entre les deux approches, on peut formuler la proposition : « Là où n'existe aucune composante de liaison apparaît une possibilité de mouvement. » Il reste à remarquer que ces équations inutiles pour la détermination des composantes de liaison ne sont pas de la forme  $0 = 0$ , car le second membre contient toutes les composantes d'actions mécaniques autres que celles de liaison.

## 1.3.6 Exemple

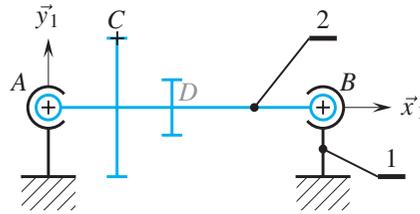
On reprend l'exemple développé lors de l'approche cinématique à la page 13.

### Présentation

On considère l'arbre intermédiaire repéré 2 d'un réducteur à engrenages :

- il est guidé par rapport à un bâti noté 1 par deux roulements à billes à contact oblique, dont les contacts sont modélisés par des liaisons de type sphérique, de centres respectifs  $A$  et  $B$ , paramétrés par  $\overline{AB} = L \vec{x}_1$  ;

- il comporte un pignon qui engrène avec un arbre moteur  $m$  au point  $C$ , localisé par  $\overline{AC} = c \vec{x}_1 + R \vec{y}_1$ ;
- il comporte également une roue dentée qui engrène avec un arbre récepteur  $r$  en un point  $D$  localisé par  $\overline{AD} = d \vec{x}_1 - r \vec{z}_1$ .

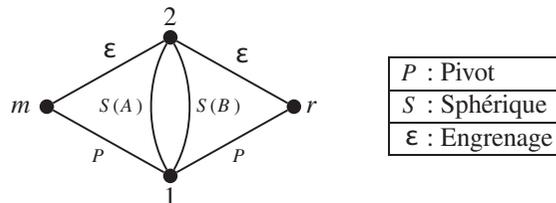


On néglige la masse et l'inertie de l'arbre 2 et le milieu environnant  $\bar{2}$  retenu pour l'étude comporte alors :

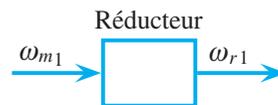
- le bâti 1 ;
- l'arbre moteur noté  $m$  ;
- l'arbre récepteur noté  $r$ .

### Compréhension du problème

On trace le graphe des liaisons de l'ensemble du réducteur pour mettre en évidence la différence entre les inconnues de liaison à garder dans le membre de gauche et les inconnues à passer dans le second membre.



D'un point de vue cinématique, c'est le moteur qui impose le mouvement et serait à déterminer une loi entrée-sortie  $\omega_{r1} = f(\omega_{m1})$ , en appelant  $\omega_{m1}$  et  $\omega_{r1}$  les variables cinématiques associées aux deux liaisons pivot.



D'une point de vue dynamique, c'est le récepteur qui réclame de la puissance et serait à déterminer une loi entrée-sortie  $C_m = f_1(C_r)$ , en appelant  $C_r$  et  $C_m$  respectivement les couples récepteur et moteur.



Pour le mécanisme dans son ensemble, les actions mécaniques transmissibles dans les engrenages sont des actions de liaison.

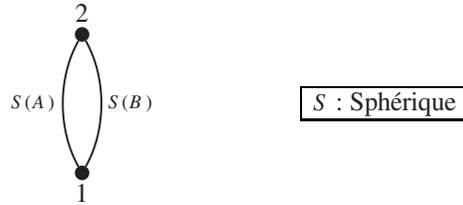


Les indices de  $\omega_{r1}$  font référence au mouvement  $r/1$ , ceux de  $\omega_{m1}$  au mouvement  $m/1$ .



L'indice de  $C_m$  est moins explicite : il fait référence à l'action mécanique du stator sur le rotor  $1 \rightarrow m$ .

Maintenant, l'objet de l'étude est ici la seule chaîne fermée 1 – 2 – 1, pour laquelle les actions mécaniques de liaison sont uniquement au niveau des liaisons de type sphérique.



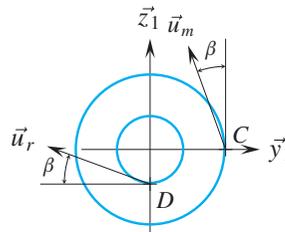
### Approche dynamique

On écrit les torseurs associés aux deux liaisons et on modélise par des glisseurs les actions mécaniques transmissibles par les engrenages

$$\mathcal{F}(1a \rightarrow 2) =_A \begin{Bmatrix} \vec{R}(1a \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(1b \rightarrow 2) =_B \begin{Bmatrix} \vec{R}(1b \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 2) =_C \begin{Bmatrix} F_m \vec{u}_m \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(r \rightarrow 2) =_D \begin{Bmatrix} F_r \vec{u}_r \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Les deux directions  $\vec{u}_m$  et  $\vec{u}_r$  sont dans le plan  $(\vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et on les oriente sur la figure ci-dessous.



En vue d'écrire le système d'équations, on pose les composantes des résultantes quelconques :

$$\begin{cases} \vec{R}(1a \rightarrow 2) = X_A \vec{x}_1 + Y_A \vec{y}_1 + Z_A \vec{z}_1 \\ \vec{R}(1b \rightarrow 2) = X_B \vec{x}_1 + Y_B \vec{y}_1 + Z_B \vec{z}_1 \end{cases}$$

Comme la masse et l'inertie de 2 sont négligées, on applique le théorème de l'équilibre à l'arbre 2 par rapport au repère 1 supposé galiléen et on écrit l'équation de moment par exemple au point A pour obtenir le système de six équations scalaires recherché. Tous les termes concernant les engrenages sont passés dans le second membre.

$$\begin{cases} X_A + X_B = 0 \\ Y_A + Y_B = F_m \sin \beta + F_r \cos \beta \\ Z_A + Z_B = -F_m \cos \beta - F_r \sin \beta \\ 0 = -R F_m \cos \beta + r F_r \cos \beta \\ -L Z_B = c F_m \cos \beta + d F_r \sin \beta \\ +L Y_B = c F_m \sin \beta + d F_r \cos \beta \end{cases}$$

La recherche des degrés de mobilité et de statisme se fait à partir du système homogène associé.



L'angle  $\beta$  est appelé angle de pression. Une de ses valeurs courantes est  $20^\circ$ .



C'est uniquement parce que l'on souhaite écrire le système complet d'équations que l'on pose ici des composantes pour les actions mécaniques. Ce n'est surtout pas une habitude à prendre sans nécessité !