FLUORESCIENCES

LES MANUELS VISUELS POUR LA LICENCE

Mécanique

Méca

Christophe Cappe

LES FONDAMENTAUX

COURS AVEC EXEMPLES CONCRETS

100 QCM ET EXERCICES CORRIGÉS

200 ILLUSTRATIONS EN COULEURS

LES + EN LIGNE

DUNOD

Direction artistique : Élisabeth Hébert
Conception graphique de la couverture : Pierre-André Gualino
Conception graphique de la maquette intérieure : Marse
Mise en page : Lumina Datamatics, Inc.

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-080225-8

Table des matières

Le selfie de l'auteur

Christophe Cappe

Je suis professeur agrégé de physique à l'université Rennes 1. J'enseigne en particulier l'électromagnétisme du vide et des milieux, la thermique et la mécanique dans les licences de Physique et de Physique-Chimie. J'interviens également dans les préparations disciplinaires aux concours de recrutement des enseignants (CAPES et Agrégation).

Avant-propos et remerciements

La mécanique est la science du mouvement et de ses causes. Ses lois permettent d'expliquer des observations de notre quotidien aussi variées que la forme caractéristique de la trajectoire d'un ballon de football lors d'un dégagement, la stabilité d'une échelle en appui contre un mur, les oscillations de l'extrémité d'un gratte-ciel à la suite d'une bourrasque ou encore le mouvement des nombreux satellites en orbite autour de notre planète. La mécanique qui sera abordée dans cet ouvrage est qualifiée de mécanique classique ou encore de mécanique newtonienne, en hommage à Isaac Newton qui en a posé les fondements grâce à trois principes. Cette mécanique réduit le système physique d'étude à un point matériel dont la connaissance des forces qu'il subit et leurs effets permettra d'en appréhender le mouvement. Nous verrons qu'elle pourra aussi être abordée par d'autres biais tout aussi féconds, ceux de l'énergie ou du moment cinétique.

La formalisation de la mécanique en concepts et lois nécessite la maîtrise de différents outils mathématiques rappelés de façon systématique au fur et à mesure des besoins. Pour faciliter la compréhension et l'utilisation de ces lois, le lecteur trouvera tout au long de l'ouvrage des points méthodiques et de nombreux exemples d'application, ainsi que des focus permettant de préciser certaines notions transversales à la mécanique.

Pour qu'un exercice de mécanique ne se limite pas à une mise en œuvre purement mathématique des lois associées, chaque exercice a été soigneusement choisi pour sa modélisation physique d'une situation concrète tirée d'applications technologiques, d'expériences historiques ou encore de phénomènes naturels. Afin d'éviter d'alourdir l'énoncé de ces exercices, toutes les constantes utiles à leur résolution sont regroupées dans une table en fin d'ouvrage. Le lecteur y trouvera également une annexe mathématique sur les principales équations différentielles rencontrées en mécanique.

Je remercie très chaleureusement Brice Hénaff et mon frère Yvan, tous deux professeurs agrégés de physique, ainsi que mon collègue Gabriel Delhaye, maître de conférences à l'université Rennes 1, pour la relecture attentive et minutieuse du manuscrit, leurs suggestions et critiques, qui ont permis d'en améliorer grandement le contenu. Cet ouvrage est aussi le fruit de nombreuses concertations et discussions depuis des années au sein de la licence de physique de l'université Rennes 1 pour faire évoluer le contenu et la pédagogie de nos enseignements. Que tous mes collègues, notamment ceux de l'équipe de mécanique du portail PCGS, bien trop nombreux pour être cités individuellement, en soient remerciés. Je tiens aussi à remercier les éditions Dunod et tout particulièrement Laëtitia Hérin pour sa confiance renouvelée dans ce deuxième ouvrage, et Eléna Chryssos pour son important travail de composition, ses conseils et nos échanges toujours constructifs qui ont permis de déboucher à la forme finale de cet ouvrage. Je n'oublie pas enfin ma famille pour sa disponibilité et son éternel soutien, surtout dans les dernières semaines chargées de rédaction et de relecture.

Cinématique

Pour bien démarrer

1. **Une voiture passe de 0 à 108 km · h^{-1} en 10 s. Son accélération moyenne est égale à :**
   - ☐ **a.** 3 m · s^{-2}.
   - ☐ **b.** 10,8 km · h^{-2}.
   - ☐ **c.** 38,9 m · s^{-2}.

2. **Une bille décrit un mouvement rectiligne et uniforme dans le référentiel terrestre.**
   - ☐ **a.** Son vecteur vitesse varie au cours du temps.
   - ☐ **b.** Son vecteur accélération est nul.
   - ☐ **c.** La bille ralentit.

3. **Le compteur de vitesse d'une moto qui roule en ligne droite affiche à l'instant considéré 100 km·h^{-1}. On peut affirmer que :**
   - ☐ **a.** le vecteur accélération est nul à cet instant.
   - ☐ **b.** jusqu'à cet instant, la vitesse moyenne est égale à 100 km·h^{-1}.
   - ☐ **c.** le référentiel d'étude est le référentiel terrestre.

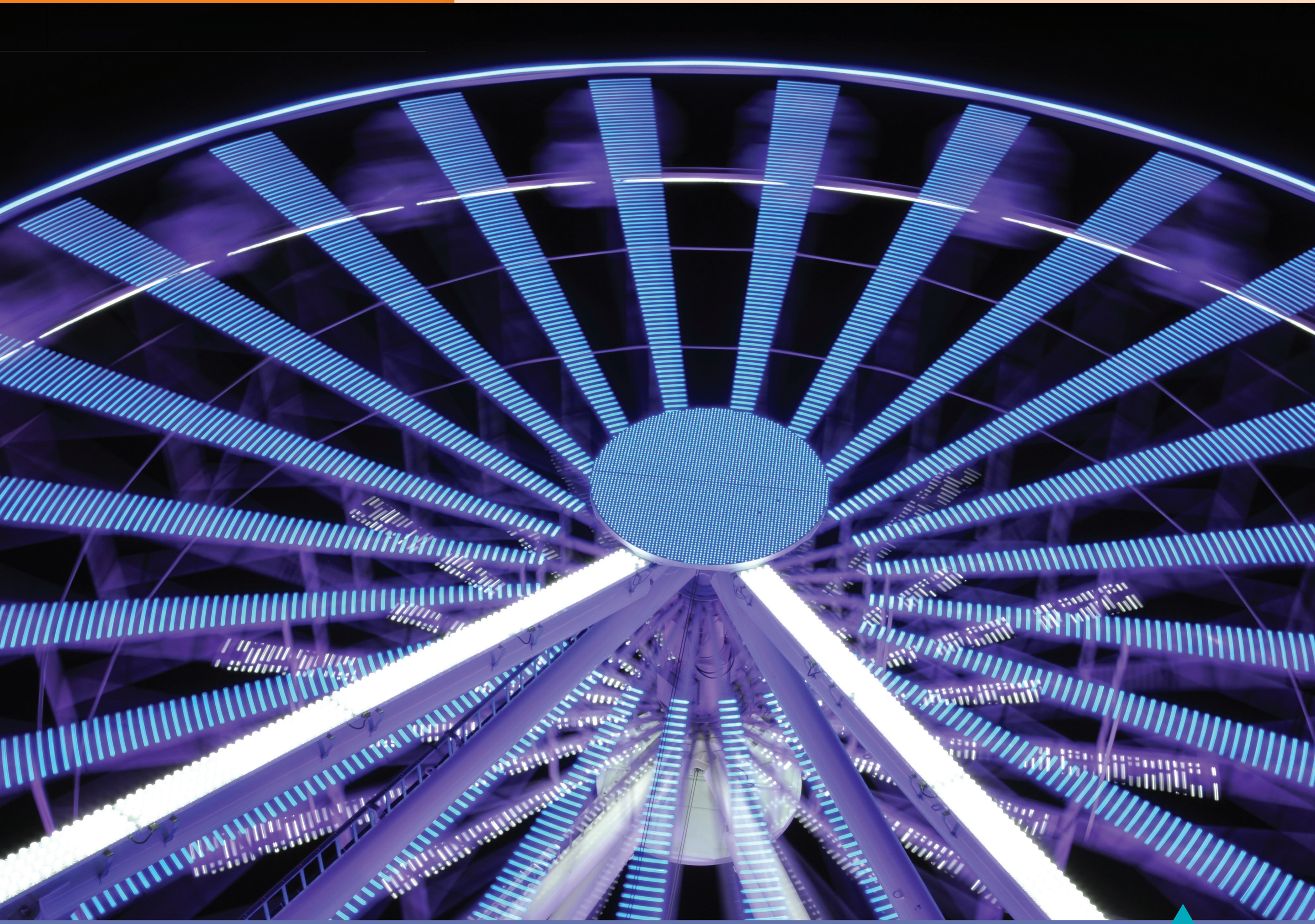
4. **Dans le référentiel géocentrique, un satellite *S* a un mouvement circulaire et uniforme autour de la Terre de centre *O*.**
   - ☐ **a.** Sa vitesse est constante et son accélération est nulle.
   - ☐ **b.** Son vecteur vitesse est toujours perpendiculaire à la direction *OS*.
   - ☐ **c.** Son vecteur accélération est toujours radial et centripète.

Réponses page 183

Objectifs

- Connaître les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Définir les vecteurs position, vitesse et accélération d'un point matériel.
- Établir et exploiter les expressions des composantes des vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- Connaître en coordonnées polaires les expressions des composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération d'un point matériel en mouvement circulaire uniforme.
- Reconnaître pour un solide parfait un mouvement de translation et un mouvement de rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel d'étude.

CHAPITRE 1



Cette photo de la grande roue de la place de l'Étoile, à Paris, prise avec un long temps de pose, met en évidence la trajectoire circulaire décrite par chacune des lampes habillant la roue, vue par des observateurs au sol. La description de leur mouvement en termes de position, vitesse et accélération, sans chercher à en interpréter la cause, constitue l'objet de la cinématique.

1 Cadre spatio-temporel de la mécanique classique

1.1 Du solide au point matériel

La mécanique classique s'intéresse à l'étude du mouvement d'objets matériels macroscopiques que nous appellerons **solides**. Les solides considérés seront supposés parfaits, c'est-à-dire indéformables dans le sens où la distance entre deux points quelconques du solide reste constante au cours du temps. Cette idéalisation consiste à négliger l'énergie de déformation du solide devant l'énergie de son mouvement (rotation et translation).

Décrire le mouvement d'un solide par rapport à un autre pris comme référence nécessite la connaissance de ses six **degrés de liberté**, six grandeurs indépendantes caractérisant la position et l'orientation du solide dans l'espace. Cependant, si la rotation du solide impacte peu son mouvement, donc si son énergie cinétique de rotation est négligeable devant son énergie cinétique de translation, il est alors suffisant d'assimiler le solide à son centre d'inertie ou centre de masse en lui affectant toute la masse du solide (voir chapitre 3). On dit que le solide est réduit à un **point matériel** et son mouvement est entièrement défini par la donnée de trois paramètres que sont ses coordonnées d'espace. Cette idéalisation est souvent d'autant plus valide que la taille typique du solide est petite devant la distance caractéristique d'observation du mouvement.

On se limitera pour l'essentiel à l'étude du mouvement d'un point matériel, noté M. On apportera toutefois à la fin de certains chapitres quelques éléments relatifs à l'étude de mouvements simples de solides.

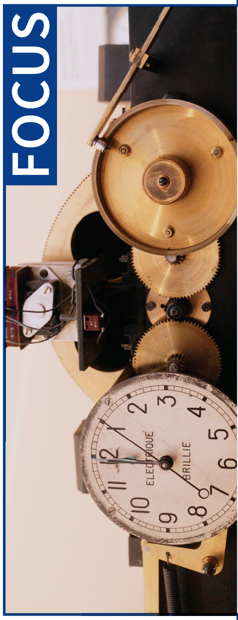
1.2 Le temps

Familier, le temps n'en demeure pas moins un concept bien difficile à définir. Disons qu'il permet d'ordonner quantitativement les événements, donc d'établir leur chronologie. Le temps est orienté, donc irréversible. C'est ce qu'on appelle le **cours du temps**, rendant impossible tout retour à un événement passé. Une telle contrainte résulte du **principe de causalité**, qui impose une chronologie absolue aux événements qui sont causalement reliés les uns aux autres.

Le cours du temps produit donc de la durée, grandeur mesurant l'intervalle de temps entre deux événements. En choisissant comme origine du temps le premier événement qui apparaît au cours du temps (on parle d'instant initial), la mesure de la durée qui sépare cet événement du second s'effectue avec une **horloge**. Une horloge est un système qui fonctionne sur la reproductibilité périodique d'un phénomène physique. Le choix d'une horloge de référence permet alors de définir une unité. Dans le Système international d'unités (SI), la **seconde** (symbole : s) est l'unité de temps. Longtemps, la définition de la seconde a été liée à une référence astronomique (le jour solaire moyen). Mais ce choix s'est heurté aux irrégularités de la rotation propre de la Terre limitant la précision de la définition. À partir de 1960, le choix s'est porté sur une transition entre deux niveaux énergétiques atomiques. La définition plus précise suivante a été adoptée en 2018 à la 26e Conférence générale des poids et mesures (CGPM). La seconde est définie en fixant la valeur numérique $\Delta\nu_{Cs}$ de la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé à 9 192 631 770 Hz, unité égale à des s^{-1}.

Une seconde correspond donc à 9 192 631 770 périodes de cette transition.

FOCUS



L'heure légale

Un simple appel téléphonique suffit pour connaître l'heure légale française diffusée par l'horloge parlante de l'Observatoire de Paris. Depuis un décret datant de 1978, le temps légal est obtenu en ajoutant ou en retranchant un nombre entier d'heures au temps légal international ou Temps universel coordonné (UTC). Cette échelle est obtenue à partir d'une autre échelle, le Temps atomique international (TAI). Cette dernière est réalisée par quelques centaines d'horloges atomiques réparties à travers le monde. Une horloge atomique est constituée d'un oscillateur (un compteur) qui renseigne sur le temps, calé sur la fameuse transition atomique de l'atome de césium 133 servant à définir la seconde. De telles horloges dérivent de moins d'une seconde en… 30 millions d'années ! En 2019, UTC n'est autre que TAI auquel 37 secondes ont été retranchées. Ces secondes intercalaires sont en fait régulièrement insérées de façon à minimiser l'écart entre UTC et le temps moyen déduit de la rotation propre de la Terre (le Temps universel UT1). Cette rotation tend en effet à globalement ralentir du fait de plusieurs facteurs tels que les marées luni-solaires. Pour des besoins notamment en navigation maritime (imaginez qu'il n'y ait plus de GPS et qu'il faille observer les étoiles !), on s'assure qu'en moyenne sur l'année, le Soleil passe au méridien de Greenwich à 12 h 00' 00" UTC à 0,9 seconde près. La dernière seconde intercalaire date du 31 décembre 2016, les horloges affichèrent alors 23 h 59' 60" UTC avant de passer en 2017.

1.3 L'espace

L'espace physique dans lequel est étudié le mouvement d'un point est l'espace euclidien à trois dimensions, c'est-à-dire l'espace de validité de la géométrie usuelle. Il est muni d'un **repère** d'espace constitué d'une **origine** O et d'une **base** $(\mathcal{B}) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, que nous choisirons toujours orthonormée et directe.

Euclide d'Alexandrie (vers 325 av. J.-C.–vers 265 av. J.-C.) était un mathématicien grec dont l'ouvrage Les Éléments pose les fondements de la géométrie plane actuellement enseignée jusqu'au lycée.

Définitions

$(\mathcal{B}) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base **orthonormée** si :

- $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \perp \vec{u}_3$ (vecteurs orthogonaux 2 à 2)
- $||\vec{u}_1|| = ||\vec{u}_2|| = ||\vec{u}_3|| = 1$ (vecteurs unitaires)

La base est en outre **directe** si deux des vecteurs de la base définissent le sens positif du troisième selon la règle du tire-bouchon de Maxwell (figure 1.1).

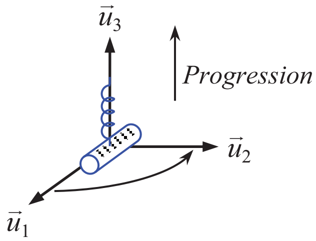


Figure 1.1 ▲ *Règle du tire-bouchon de Maxwell.*

Règle du tire-bouchon de Maxwell : le manche du tire-bouchon étant placé sur $\vec{u}_1$, une rotation de $\pi/2$ vers $\vec{u}_2$ fait progresser le tire-bouchon dans le sens de $\vec{u}_3$.

Définitions

À chaque instant, la position du point matériel M est définie par son **vecteur position** $\overrightarrow{OM}$. Ce vecteur s'écrit dans la base $(\mathcal{B}) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$: $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$.
Sa norme est : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Elle représente la distance de l'origine O au point M.
x_1, x_2, x_3 sont les **composantes** du vecteur position et correspondent aux coordonnées du point M dans le repère d'espace (figure 1.2).

Une composante est une grandeur algébrique, c'est-à-dire une grandeur positive ou négative.

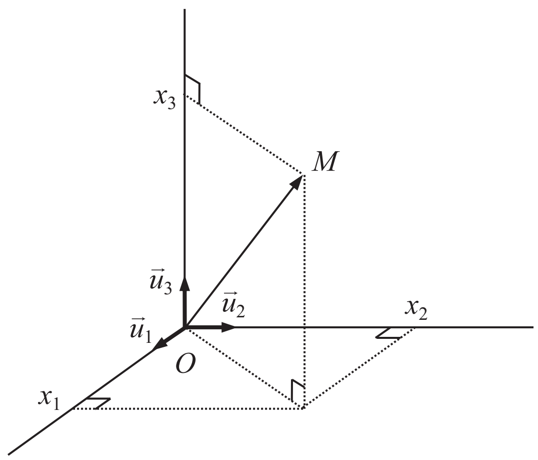


Figure 1.2 ▶ *Coordonnées d'un point et composantes d'un vecteur.*

OUTILS MATHÉMATIQUES : NOTION DE GRANDEUR ALGÉBRIQUE

Considérons le mouvement d'un point matériel M le long d'un axe $(O, \vec{u}_x)$. À chaque instant, son vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$. La composante x correspond à la **mesure algébrique** de la distance entre l'origine O et le point M. On écrit ceci : $x = \overline{OM}$. Algébriser une mesure de distance impose de mettre un signe, positif ou négatif, à la mesure. L'intérêt du signe est de renseigner sur le sens dans lequel s'est fait le mouvement par rapport à l'orientation choisie de l'axe (figure 1.3).

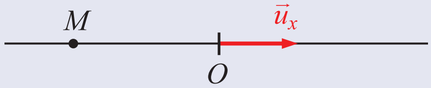


Figure 1.3 *Composante selon $\vec{u}_x$ du vecteur position du point M : $x = \overline{OM} = x_M - x_O < 0$.*

Ainsi, dire à un passant perdu que la boulangerie est à 100 m au bout de la rue ne suffit pas, à moins de lui préciser par le geste le sens dans lequel il doit se déplacer. Si en revanche on convient d'orienter la rue dans le sens du mouvement des voitures, pour une rue par exemple à sens unique, alors l'algébrisation revient à dire que la boulangerie est soit à + 100 m s'il faut se déplacer dans le sens du mouvement des voitures, soit à – 100 m s'il faut se déplacer dans le sens contraire.

Le repérage de la position du point matériel permet de définir la distance à laquelle il se trouve de l'origine O. La mesure de cette distance nécessite la définition d'une unité. Dans le Système international d'unités (SI), le **mètre** (symbole : m) est l'unité de longueur. Depuis la 26e CGPM, elle est définie en prenant la valeur numérique fixée de la vitesse de la lumière dans le vide c égale à 299 792 458 lorsqu'elle est exprimée en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Cette définition dépend donc de celle de la seconde.

La définition du mètre

En doigt, pouce, palme, pied, pas, toise, lieue… À la fin XIIIe siècle, chaque pays, région, voire ville possédait son propre étalon de longueur, ce qui notamment compliquait sérieusement les échanges commerciaux. En pleine révolution française en 1789, on réclame à travers les cahiers de doléances une uniformisation du système des poids et mesures. Lors de l'assemblée constituante du 26 mars 1791 est choisie la grandeur du quart du méridien terrestre pour base du nouveau système de mesures qui sera décimal. De 1792 à 1798, J.-B. Delambre et P. Méchain mesurent ainsi l'arc de méridien par triangulation entre Dunkerque et Barcelone. Avant même la fin de ces travaux, naît le mètre, dix millionième partie du quart du méridien terrestre égale à 0,513243 toises. En 1799, une règle plate de section rectangulaire en platine est choisie comme « étalon définitif des mesures de longueur dans toute la République ». À la 11e Conférence générale des poids et mesures (CGPM) en 1960, le mètre est défini comme la longueur égale à un certain nombre de longueurs d'onde dans le vide d'une radiation correspondant à une transition particulière de l'atome de krypton 86. À la 17e CGPM en 1983, la définition du mètre repose sur la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière dans un intervalle de temps spécifique.

1.4 Relativité du mouvement

1.4.1 Notion de référentiel

Un mouvement n'a pas un caractère absolu, mais un caractère relatif dans le sens où il dépend de l'observateur choisi comme référence pour le décrire. Ainsi, un passant qui attend pour traverser la route voit en l'absence de vent les gouttes de pluie tomber verticalement, alors qu'un chauffeur au volant de sa voiture qui roule voit au même instant ces mêmes gouttes tomber selon une direction formant un certain angle avec la verticale.

On appelle **référentiel**, noté $\mathcal{R}$, un solide auquel est lié l'observateur décrivant le mouvement d'un point matériel M. Ce référentiel est muni d'un repère d'espace permettant de repérer la position du point et d'une horloge permettant de dater ces positions. Nous choisirons souvent comme référentiel d'étude le référentiel terrestre ou référentiel du laboratoire, c'est-à-dire tout solide fixe par rapport à la surface de la Terre.

Exemple : mouvement rétrograde de Mars

La Terre et la planète Mars ont un mouvement quasi-circulaire autour du Soleil lorsqu'il est choisi comme référence (référentiel héliocentrique). En prenant la Terre comme référence (référentiel géocentrique), Mars présente environ tous les deux ans un mouvement rétrograde (figure 1.4). Cette rétrogradation apparaît lorsque la Terre, plus rapide sur son orbite autour du Soleil, dépasse Mars.

Figure 1.4 *Rétrogradation de Mars par rapport à la Terre.*

1.4.2 Caractère absolu du temps

Introduite par Newton, la mécanique classique ou mécanique newtonienne repose sur l'hypothèse d'un temps absolu. Cela signifie que deux observateurs liés à deux référentiels différents mesureront la même durée séparant deux événements. En revanche, la distance séparant ces deux événements dépend bien du référentiel. La mécanique classique introduit donc une dissymétrie de traitement entre espace et temps. Deux siècles après Newton, Einstein rejettera cette hypothèse dans le cadre de sa théorie de la relativité restreinte affirmant l'impossibilité de dissocier espace et temps. La notion de temps absolu demeure cependant valide avec une excellente approximation tant que les vitesses relatives des différents observateurs mesurant le temps restent faibles devant la célérité de la lumière dans le vide.

2 Différents systèmes de repérage

■ *Les coordonnées cartésiennes ont été nommées ainsi en hommage à René Descartes (1596-1650), philosophe et mathématicien français.*

2.1 Le repérage cartésien

Un point matériel M peut être repéré par ses **coordonnées cartésiennes** (x, y, z) dans un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ où $x, y, z \in\,]-\infty\,;+\infty[$ (figure 1.5).

Définition

Le vecteur position d'un point matériel M s'écrit en repérage cartésien : $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$.
Sa norme est : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

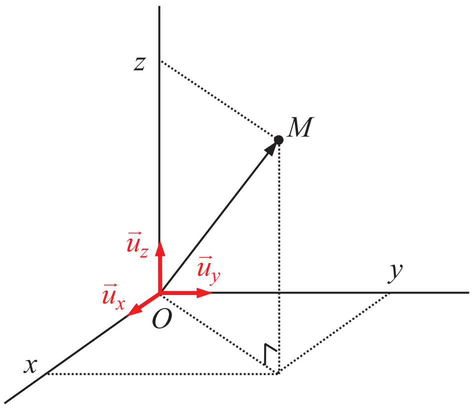


Figure 1.5
Repérage cartésien.

Si le repère cartésien est lié au référentiel d'étude $\mathcal{R}$, alors les trois vecteurs de la base sont des vecteurs constants dans ce référentiel, c'est-à-dire qu'ils ne dépendent pas de la position du point M au cours du temps. Cela implique que leur dérivée temporelle est nulle dans le référentiel $\mathcal{R}$: $\dfrac{d\vec{u}_x}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_y}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{0}$.

La base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est directe.

OUTILS MATHÉMATIQUES : DÉRIVATION D'UNE GRANDEUR VECTORIELLE

Soit $\vec{a}(t)$ une grandeur physique vectorielle dépendant du temps. Supposons que cette grandeur varie de $\Delta\vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$ entre les instants t et $t + \Delta t$ dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$. La dérivée temporelle de cette grandeur est la limite de son taux de variation lorsque $\Delta t \to 0$, traduisant comment le vecteur change localement en norme, en direction et en sens dans le référentiel $\mathcal{R}$: $\dfrac{d\vec{a}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}$.

Pour signifier que cette dérivée dépend du référentiel, on voit souvent la notation $\left.\dfrac{d\vec{a}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$ que nous éviterons par souci de simplification en l'absence de toute ambiguïté.

Les règles de dérivation connues pour les grandeurs scalaires se transposent pour les grandeurs vectorielles, en particulier si $f(t)$ est une fonction scalaire du temps, alors : $\dfrac{d}{dt}[f(t)\vec{a}(t)] = \vec{a}\dfrac{df}{dt} + f\dfrac{d\vec{a}}{dt}$.

2.2 Le repérage polaire

À deux dimensions, un point matériel M peut être repéré par ses **coordonnées polaires** (ρ,θ) dans un repère polaire $(O,\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta)$ (figure 1.6).

- $\rho \in [0\,;+\infty[$ est la distance entre l'origine O et le point M : $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$;
- $\theta \in [0\,;2\pi]$ est l'angle orienté entre le vecteur unitaire $\vec{u}_x$ de la base cartésienne et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du point M : $\theta = (\vec{u}_x,\overrightarrow{OM})$;
- $\vec{u}_\rho$ est le **vecteur radial** colinéaire et de même sens que le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du point M : $\vec{u}_\rho = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$;
- $\vec{u}_\theta$ est le **vecteur orthoradial** obtenu par rotation du vecteur $\vec{u}_\rho$ de $+\pi/2$ dans le sens des θ croissants.

On passe des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes par les relations : $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$.

Définition

Le vecteur position d'un point matériel M s'écrit en repérage polaire : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$. Sa norme est : $\|\overrightarrow{OM}\| = \rho$.

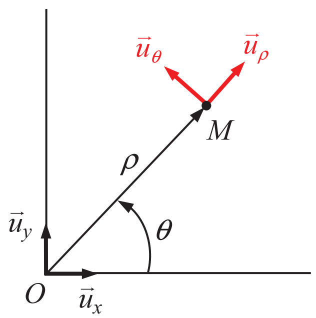


Figure 1.6 *Repérage polaire.*

Il peut sembler étonnant que la coordonnée θ n'apparaisse pas explicitement dans l'expression du vecteur position. En fait, c'est cette coordonnée qui définit la direction et le sens du vecteur radial $\vec{u}_\rho$.

Si le repère cartésien est lié au référentiel d'étude $\mathcal{R}$, alors les deux vecteurs de la base polaire ne sont pas des vecteurs constants dans ce référentiel, c'est-à-dire qu'ils dépendent de la position du point M au cours du temps. On dit que la base polaire est mobile. Cela implique que leur dérivée temporelle est *a priori* non nulle dans le référentiel $\mathcal{R}$.

On écrit de façon contractée $\dot{g} = \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ et $\ddot{g} = \dfrac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}t^2}$ pour toute grandeur physique $g(t)$ fonction du temps.

Dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ auquel est lié le repère cartésien, les dérivées temporelles des vecteurs de la base polaire s'écrivent : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho$.

DÉMONSTRATION

On justifie ces deux expressions en exprimant chaque vecteur de la base polaire « mobile » dans la base cartésienne « fixe » dans le référentiel $\mathcal{R}$. Les vecteurs de la base polaire sont définis en un point M différent de O mais peuvent être représentés en O par souci de lisibilité (figure 1.7). Leurs projections dans la base cartésienne s'écrivent : $\vec{u}_\rho = \cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y$ et $\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y$. On dérive alors par rapport au temps en se rappelant que $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ sont des vecteurs constants dans $\mathcal{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{dt}}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{dt}}\vec{u}_y = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}(-\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y) = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{dt}}\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{dt}}\vec{u}_y = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}(\cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y) = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho$$

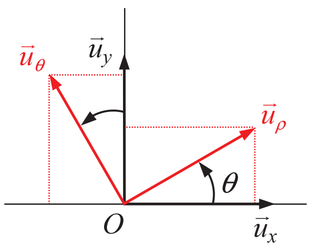


Figure 1.7 *Composantes des vecteurs de la base polaire dans la base cartésienne.*

2.3 Le repérage cylindrique

À trois dimensions, un point matériel M peut être repéré par ses **coordonnées cylindriques** (ρ, θ, z) dans un repère cylindrique $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ (figure 1.8). Ce repérage n'est qu'une généralisation du repérage polaire où la coordonnée z et le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ sont communs au repérage cartésien. La coordonnée ρ correspond dans ce cas à la distance du point M à l'axe $(O, \vec{u}_z)$.

Définition

Le vecteur position d'un point matériel M s'écrit en repérage cylindrique : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$.
Sa norme est : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$.

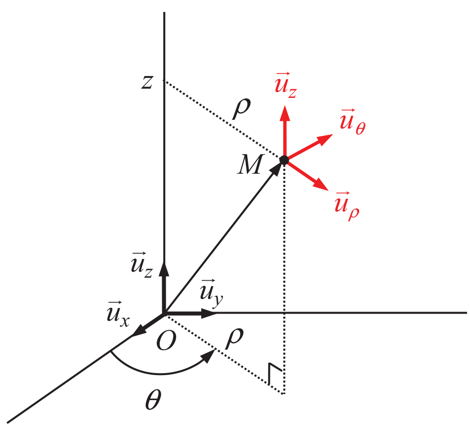


Figure 1.8 *Repérage cylindrique.*