MATHS

PT

Sylvain Gugger

DUNOD

Conception et création de couverture : Dominique Raboin

Avec la collaboration scientifique de Sabrina Bergez,
professeur en classes préparatoires au lycée Saint-Louis (Paris)

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-076252-1

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de deuxième année de classe préparatoire PT. Il s'agit d'un complément à leur cours de mathématiques mettant l'accent sur les notions essentielles à connaître et les méthodes à maîtriser, et permettant de les mettre en œuvre par le biais d'exercices.
Le livre est divisé en quatre parties, seize chapitres et une section de sujets d'annales.

Chaque chapitre commence par une partie nommée *L'essentiel du cours*. On y présente tous les points les plus importants du cours (définitions, propositions, théorèmes, remarques) à la manière d'une fiche. Les preuves ne sont volontairement pas incluses pour se concentrer sur les résultats à connaître, mais peuvent être trouvées dans votre cours au besoin. La première chose à faire pour apprendre un chapitre donné est de retenir cette partie.
On trouve ensuite une partie nommée *Les méthodes à maîtriser*. Elle présente les méthodes en rapport avec le chapitre en cours qu'il faut absolument savoir mettre en pratique. Chaque méthode est illustrée par un exemple corrigé en détail, et comporte un renvoi vers les exercices qui l'utilise. Il est très utile de refaire par soi-même les exemples de chaque méthode sur une feuille blanche lors des révisions du chapitre.

Si la méthode présentée est facilement programmable sur ordinateur, on trouvera ensuite un programme associé en langage Python.

Pour tester la connaissance du cours et des méthodes, chaque chapitre comporte ensuite une *Interro de cours*. Elle comporte généralement des questions de cours (énoncé d'une définition ou d'un théorème), des vrais/faux et des exemples d'application directe des méthodes. Cette partie permettra d'identifier rapidement les éventuelles lacunes sur le chapitre en cours.
La suite du chapitre est consacrée aux *Exercices*. On les a séparé en deux parties : dans la rubrique *S'entraîner*, on trouve un ensemble d'exercices couvrant tous les points du chapitre. Ce sont les plus faciles, en général, mais certaines méthodes étant plus difficiles à mettre en œuvre que d'autres, ils ne sont pas nécessairement de difficulté égale. La rubrique *Approfondir* contient d'autres exercices pour continuer de s'exercer, a priori un peu plus difficiles. Lorsque cela était possible, on a choisi des exercices proposés récemment à l'oral de concours d'entrée aux grandes écoles.
Enfin, la partie *Correction* comporte les corrigés détaillés de l'interrogation de cours et des exercices.

La dernière partie de l'ouvrage est consacrée à des sujets d'annales d'écrits récemment posés aux concours d'entrée aux grandes écoles. On a cherché à rassemblé une collection de sujets de difficulté moyenne couvrant l'ensemble du programme et illustrant les méthodes présentées dans cet ouvrage. Certaines parties ont été réécrites pour parfaitement correspondre au programme de la filière PT (lorsqu'il s'agit de sujets d'autres filières ou antérieurs à la réforme des programmes) et les erreurs d'énoncé ont été corrigées ou sont signalées par une note de bas de page.
Chaque sujet est corrigé de manière détaillée, avec des remarques signalant les questions les plus classiques ou les pièges à éviter.

Durant tout l'ouvrage, on a utilisé un certain nombre de pictogrammes :

pour attirer l'attention du lecteur sur un ou plusieurs points spécifiques.

pour signaler un piège ou une erreur à éviter.

pour mettre l'accent sur une bonne manière de rédiger.

Un grand merci à Sabrina Bergez pour avoir relu en détail l'intégralité de l'ouvrage et pour ses nombreux conseils.

Table des matières

Partie 4 Probabilités

Partie 1

Algèbre

CHAPITRE

Compléments d'algèbre linéaire

1

L'essentiel du cours

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ce chapitre complète le programme d'algèbre linéaire de première année, mais ne reprend pas tous les résultats de base. Pour des rappels plus approfondis, il convient de se reporter à l'ouvrage de première année.

1 Familles quelconques de vecteurs

Définition

On dit qu'une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est **presque nulle** si $\{i \in I\,;\, \lambda_i \neq 0\}$ est fini. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$.

Ceci permet de considérer des combinaisons linéaires $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i$ d'une famille quelconque de vecteurs.

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E. On dit que

- $(e_i)_{i\in I}$ est **libre** si l'écriture d'un vecteur comme combinaison linéaire de $(e_i)_{i\in I}$ est unique :
$$\forall ((\lambda_i)_{i\in I}, (\mu_i)_{i\in I}) \in \left(\mathbb{K}^{(I)}\right)^2,\ \sum_{i\in I} \lambda_i.e_i = \sum_{i\in I} \mu_i.e_i \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = \mu_i.$$
On dit qu'elle est **liée** dans le cas contraire.
- $(e_i)_{i\in I}$ est **génératrice** de E si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de $(e_i)_{i\in I}$:
$$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)},\ x = \sum_{i\in I} \lambda_i.e_i.$$
- $(e_i)_{i\in I}$ est une **base** de E si elle est libre et génératrice de E, c'est-à-dire si tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire de $(e_i)_{i\in I}$.

Ceci généralise les définitions vues pour les familles finies de vecteurs en première année.

Caractérisation des familles libres

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. $(e_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)},\ \sum_{i\in I} \lambda_i.e_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0.$$

Définition

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, pour $x \in E$ l'unique famille $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ vérifiant $x = \sum_{i\in I} \lambda_i.e_i$ est appelée famille des **coordonnées** de x en base $(e_i)_{i\in I}$.

Exemple important

- Dans $\mathbb{K}[X]$, toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.
- La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ (dite base canonique de $\mathbb{K}[X]$).

De manière plus générale, toute famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

2 Sous-espaces vectoriels

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

(1) On appelle **somme** de $F_1, \dots, F_p$ et on note $F_1 + \cdots + F_p$ l'ensemble des $x_1 + \cdots + x_p$, avec $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$.

(2) On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est **directe** et on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ si l'écriture d'un élément de $F_1 + \cdots + F_p$ sous la forme $x_1 + \cdots + x_p$ (avec $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$) est unique.

- Ces deux définitions généralisent la définition de somme de deux espaces vectoriels vue en première année.
- On rappelle que deux espaces vectoriels F et G vérifiant $F \oplus G = E$ sont dits **supplémentaires** dans E.

Caractérisation d'une somme directe de n espaces

La somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0.$$

Le fait que les intersections de deux des F_i soient réduites à $\{0\}$ n'implique pas que la somme soit directe (contrairement au cas de deux espaces vectoriels).

Base adaptée

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p.$$

Si pour $i \in [\![1, p]\!]$, e_i est une base de F_i, la famille e obtenue en concaténant $e_1, \ldots, e_p$ est une base de E.

- Une telle base de E est dite **adaptée** à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.
- En particulier, si F et G sont supplémentaires dans E, on obtient une base de E (dite adaptée à $F \oplus G = E$) en concaténant une base de F avec une base de G.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle **hyperplan** de E un supplémentaire d'une droite.

Proposition

- Si H est un hyperplan de E, pour tout $a \in E \backslash H$, $H \oplus \mathbb{K}a = E$.
- Un sous-espace H de E est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

- En dimension 2, les hyperplans sont donc les droites passant par l'origine.
- En dimension 3, les hyperplans sont donc les plans passant par l'origine.

Équation d'un hyperplan

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E.

- Un sous-espace H de E est un hyperplan de E si et seulement si H admet en base e une équation de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$.
- Deux équations en base e de la forme $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.

- Un système linéaire homogène de p équations à n inconnues est donc l'intersection de p hyperplans de $\mathbb{K}^n$.
- Le deuxième point généralise le fait que deux équations définissent la même droite (en dimension 2) ou le même plan (en dimension 3) si et seulement si elles sont proportionnelles.

Équations d'un sous-espace vectoriel

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
- L'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n - p$.
- Un sous-espace de dimension au moins $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.

En se donnant une base e de E, le deuxième point montre qu'un sous-espace de dimension $n - p$ admet un système de p équations cartésiennes.

Ceci généralise le fait que dans l'espace, une droite est représentée par un système de deux équations.

3 Endomorphismes remarquables

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $k \in \mathbb{K}$, on appelle **homothétie** de rapport k l'application $k\,\mathrm{id}_E : x \mapsto kx$.

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E.
- On appelle **projecteur** sur F parallèlement à G l'application p qui à $x \in E$ s'écrivant (de manière unique) $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ associe $p(x) = y$.
- On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application s qui à $x \in E$ s'écrivant (de manière unique) $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ associe $s(x) = y - z$.

Une homothétie, un projecteur et une symétrie sont des applications linéaires.

Caractérisation des projecteurs

Si $p \in \mathscr{L}(E)$, p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$. C'est alors le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Caractérisation des symétries

Si $s \in \mathscr{L}(E)$, s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}_E$. C'est alors la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Toute symétrie est donc involutive, c'est-à-dire bijective de réciproque elle-même.

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \ldots, F_q$ des sous-espaces de E vérifiant $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_q$. On appelle **famille de projecteurs** associée à cette décomposition la famille $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$, où pour $i \in [\![1, q]\!]$, p_i est l'application qui à $x \in E$ associe l'unique $x_i \in F_i$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_q$ (avec $(x_1, \ldots, x_q) \in F_1 \times \cdots \times F_q$).

p_i est alors la projection sur F_i, parallèlement à la somme des autres espaces F_j.

Propriétés

Si $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ est la famille projecteurs associée à $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_q$, on a

- $\forall i \in [\![1, q]\!]$, $p_i \circ p_i = p_i$.
- $\forall i \neq j \in [\![1, q]\!]$, $p_i \circ p_j = 0$.
- $p_1 + \cdots + p_q = \mathrm{id}_E$.

4 Matrices et endomorphismes

Définition

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et si F est un sous-espace de E, on dit que F est **stable** par u si $u(F) \subset F$. On appelle alors **endomorphisme induit** par u sur F l'application $\tilde{u} : F \to F$, $x \mapsto u(x)$.

$\tilde{u}$ est encore linéaire, donc définit un endomorphisme de F (d'où l'appellation endomorphisme induit).

Proposition

Si $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ vérifie $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont stables par u.

Définition

Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, on peut définir une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dite **matrice par blocs** en posant

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Si B et C sont nulles, on dit que M est diagonale par blocs. Si B ou C est nulle, on dit que B est triangulaire (supérieure si C nulle, inférieure si B nulle) par blocs.

Caractérisation matricielle de la stabilité

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace de E, G un supplémentaire de F dans E et e une base adaptée à $F \oplus G = E$. On écrit par blocs la matrice de u en base e : $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ (avec $p = \dim(F)$). Alors F est stable par u si et seulement si $C = 0$.

Définition

On dit que deux matrices A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

- La relation « être semblable à » est une relation d'équivalence dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de E (de dimension n), mais dans des bases différentes (par la formule du changement de base).

Définition

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ (ou $\mathrm{Tr}(A)$) la somme des coefficient diagonaux de A : $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Opérations sur la trace

- tr est linéaire.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$.
- Si $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- Deux matrices semblables ont même trace.

Deux matrices de même trace ne sont pas forcément semblables. En taille 2 par exemple, $A = I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables et ont même trace.

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **trace** de u et on note $\mathrm{tr}(u)$ (ou $\mathrm{Tr}(u)$) le scalaire $\mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_e(u))$, où e est une base de E.

Le scalaire $\mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_e(u))$ ne dépend pas de la base choisie puisque deux matrices semblables ont même trace.

Opérations sur la trace

- tr est linéaire.
- Si $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.

Le tableau suivant récapitule les liens entre une matrice M, une application linéaire u qu'elle représente, et une famille de vecteurs e' qu'elle représente.

Matrice M	**Application linéaire u**	**Famille e'**
Produit	Composition	
M inversible	u bijectif	e' base de E
M^{-1}	u^{-1}	$P_{e'}^{e}$
$\mathrm{rg}(M)$	$\mathrm{rg}(u)$	$\mathrm{rg}(e')$
$\mathrm{Ker}(A)$	$\mathrm{Ker}(u)$	
$\mathrm{Im}(A)$	$\mathrm{Im}(u)$	
$\mathrm{tr}(A)$	$\mathrm{tr}(u)$	
$\det(A)$	$\det(u)$	$\det_e(e')$

Les méthodes à maîtriser

Méthode 1.1 : Savoir montrer qu'une somme d'espaces est directe

1. Lorsqu'on a une somme de deux espaces F et G, il suffit de montrer que $F \cap G = \{0\}$.
2. Lorsqu'on a une somme de n espaces $E_1, \ldots, E_n$, il faut prendre un n-uplet

$$(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \text{ tel que } x_1 + \cdots + x_n = 0$$

et montrer que les x_i sont tous nuls.

Exemple d'application

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère F l'ensemble des fonctions constantes, G l'ensemble des fonctions impaires et H l'ensemble des fonctions h telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) = 0$. Montrer que la somme $F + G + H$ est directe.

Le fait que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E est laissé en exercice.
Soit $(f, g, h) \in F \times G \times H$ tel que $f + g + h = 0$. Comme g est impaire, $g(0) = 0$. Ainsi, en prenant la valeur en 0, on a $f(0) = 0$. Comme f est constante, f est constante nulle.
Par suite, $g + h = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $h(x) = 0$, donc $g(x) = 0$. Comme g est impaire, g est donc constante nulle, et on en déduit que $h = 0$.
Ainsi la somme $F + G + H$ est directe.

➔ Voir exercices **1.1** et **1.9**.

Méthode 1.2 : Exploiter les propriétés des hyperplans

Pour montrer qu'une partie H de E est un hyperplan de E, il suffit de montrer qu'on a la relation $\dim(H) = \dim(E) - 1$.
Lorsqu'on a un hyperplan H, tout élément a qui n'est pas dans H vérifie $H \oplus \mathbb{K}.a = E$.
Une autre manière de montrer que H est un hyperplan de E est de vérifier que H admet une équation de la forme $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ avec les a_i non tous nuls.

Exemple d'application

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]\,;\, 3P(2) = 2P(1)\}$ est un hyperplan de $E = \mathbb{R}_n[X]$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

Les éléments de F sont les polynômes P vérifiant $3P(2) = 2P(1)$, i.e. $3P(2) - 2P(1) = 0$. Si P a pour coordonnées $(c_0, \ldots, c_n)$ en base canonique, cette relation équivaut à

$$0 = 3(c_0 + 2c_1 + \cdots + 2^n c_n) - 2(c_0 + c_1 + \cdots + c_n) = \sum_{i=0}^{n} (3 \times 2^i - 2) c_i$$

qui est l'équation d'un hyperplan (le coefficient devant c_0 vaut 1 donc est non nul). Ainsi F est un hyperplan de E. On en déduit que $\dim(F) = n$.

➔ Voir exercices **1.7**, **1.14** et **1.10**.

Méthode 1.3 : Savoir montrer que f est un projecteur ou une symétrie

Il faut pour cela utiliser la caractérisation. On montre que f est linéaire, puis que $f \circ f = f$ (projecteur) ou que $f \circ f = \mathrm{id}_E$ (symétrie).
Dans les deux cas on peut retrouver les deux espaces supplémentaires associés à partir de f ($\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ si f projecteur, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$ si f symétrie).

Exemple d'application

Soient E est un $\mathbb{K}$-e.v., p et q des projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p = 0$, montrer que $p + q$ est un projecteur.

$p + q$ est linéaire (car p et q le sont) et

$$(p+q) \circ (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$$

(car p et q projecteurs). Ainsi $p + q$ est un projecteur.

Voir exercice **1.2**.

Méthode 1.4 : Exploiter une relation polynomiale pour le calcul de puissance/d'inverse

Lorsqu'on a une relation de la forme $a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d = 0$, on peut facilement déterminer l'inverse de A (il suffit de la manipuler pour obtenir une relation $AB = I_n$).
De plus, si $p \in \mathbb{N}$ et si on écrit $X^p = PQ_p + R_p$ la division euclidienne de X^p par le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$, on a $A^p = R_p(A)$, ce qui permet de calculer les puissances successives de A (pour peu que l'on arrive à calculer facilement R_p).

Exemple d'application

Calculer l'inverse et les puissances successives de $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On pourra constater que $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.

Notons tout d'abord que $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.

Par suite, $A^2 - 5A = 6I_2$ et en posant $B = \dfrac{1}{6}A - \dfrac{5}{6}I_2$, on trouve $AB = I_2$. A est donc inversible, d'inverse $B = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Notons $P = X^2 - 5X + 6$ et pour $p \in \mathbb{N}$, $X^p = Q_p P + R_p$ la division euclidienne de X^p par P. Notons que les racines de P sont 2 et 3, donc $R_p(2) = 2^p$ et $R_p(3) = 3^p$. Comme $\deg(R_p) < \deg(P) = 2$, R_p est de la forme $a_p X + b_p$, avec $(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$. Les deux équations précédentes donne alors le système $\begin{cases} 2a_p + b_p = 2^p \\ 3a_p + b_p = 3^p \end{cases}$. La combinaison $L_2 - L_1$ donne $a_p = 3^p - 2^p$.
Par suite $b_p = 2^p - 2a_p = 3 \times 2^p - 2 \times 3^p$. Ainsi

$$A^p = R_p(A) = a_p A + b_p I_2 = \begin{pmatrix} 2 \times 3^p - 2^p & -3^p + 2^p \\ 2 \times 3^p - 2^{p+1} & -3^p + 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Comme vu ici, on exploite souvent les racines de P pour déterminer les coefficients de R_p.

Voir exercices **1.5** et **1.6**.

Méthode 1.5 : Savoir montrer que deux matrices sont semblables

Le théorème de changement de base permet de montrer que deux matrices sont semblables : il suffit de trouver un endomorphisme que ces deux matrices représentent, mais dans des bases différentes.

Exemple d'application

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A^2 = A$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Posons $E = \mathbb{K}^n$ et e la base canonique de E. On a $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_e(u)$. La relation $A^2 = A$ donne $\mathrm{Mat}_e(u \circ u) = \mathrm{Mat}_e(u)$, donc $u \circ u = u$. Ainsi u est un projecteur de E.

On a donc $F = \mathrm{Im}(u)$ et $G = \mathrm{Ker}(u)$ supplémentaires dans E. Pour $y \in F$, $u(y) = y$, et pour $z \in G$, $u(z) = 0$. Ainsi, si e' est une base de E adaptée à $F \oplus G = E$, en notant $p = \dim(F)$, on a $\mathrm{Mat}_{e'}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $A = \mathrm{Mat}_e(u)$ est semblable à $\mathrm{Mat}_{e'}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Voir exercices **1.8**, **1.12** et **1.13**.

Interro de cours

1. Donner la définition de $E_1 + \cdots + E_n$ est directe.

2. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux, $E_1, \ldots, E_n$ étant des sous-espaces de E.

(a) Si $E_i \cap E_j = \{0\}$ pour tout $i \neq j \in [\![1, p]\!]$, $E_1 + \cdots + E_n$ est directe.

(b) Si $E_1 + \cdots + E_n$ est directe, $E_i \cap E_j = \{0\}$ pour tout $i \neq j \in [\![1, p]\!]$.

(c) $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad x_1 + \cdots + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

(d) La somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si tout élément de E peut s'écrire sous la forme $x_1 + \cdots + x_n$, avec $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

3. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour $i \in [\![0, n]\!]$, $F_i = \{P \in E\,;\ \forall j \in [\![0, n]\!] \backslash \{i\},\ P(j) = 0\}$. Montrer que $F_0 + \cdots + F_n$ est directe et que cette somme vaut E.

4. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux, E étant un espace de dimension finie égale à n.

(a) H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

(b) H est un hyperplan de E si et seulement si on a $a \in E$ tel que $H \oplus \mathbb{K}a = E$.

(c) Deux hyperplans égaux ont la même équation.

(d) Deux hyperplans ayant des équations proportionnelles sont égaux.

5. Soient $E = \mathbb{C}$ (vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel), $F = \mathbb{R}$ et $G = i\mathbb{R}$. On a $F \oplus G = E$, décrire la projection sur F parallèlement à G, la projection sur G parallèlement à F et la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

6. Quelle est la caractérisation d'un projecteur ? D'une symétrie ? Dans ce cas, rappeler les espaces supplémentaires de E associés.

7. Rappeler la définition de la trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

8. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

(a) Deux matrices semblables ont même rang.

(b) Deux matrices de même rang sont semblables.

(c) Deux matrices semblables ont même trace.

(d) Deux matrices de même trace sont semblables.

9. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 = I_n$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$.

10. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible, l'inverse et les puissances successives de A.

Exercices

S'entraîner

Exercice 1.1

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que pour tout $p \in [\![2, n]\!]$, $(F_1 + \cdots + F_{p-1}) \cap F_p = \{0\}$. Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

Exercice 1.2

Soient p et q deux projecteurs de E (un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) tels que $p \circ q = 0$. On considère $r = p + q - q \circ p$.

1. Montrer que r est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Exercice 1.3

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Montrer que M est inversible si et seulement si A et C sont inversibles.
Donner alors M^{-1} en fonction de A, B et C.

Exercice 1.4

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. Montrer qu'on a $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

2. Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q = I_n$. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_n)) = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{tr}(A^k)$.

On pourra appliquer la question précédente à $B = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} A^k$.

Exercice 1.5

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
2. Si A est inversible, en déduire l'expression de A^{-1}.

Exercice 1.6

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 6A + 8I_2 = 0$.
2. En déduire que A est inversible, et donner l'expression de A^{-1}.
3. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le but de cet exercice est de montrer que si $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces stricts de E (c'est-à-dire différents de E), $F_1 \cup \cdots \cup F_p \neq E$.

1. Montrer que tout sous-espace strict de E est inclus dans un hyperplan de E. En déduire qu'il suffit de montrer le résultat voulu lorsque $F_1, \ldots, F_p$ sont des hyperplans (ce que l'on suppose dans la suite).

2. Soit e une base de E. Montrer que $x \in F_1 \cup \ldots F_p$ si et seulement si ses coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ en base e vérifient

$$(a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n) \ldots (a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n) = 0$$

où pour $i \in [\![1, p]\!]$, $(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

3. En exploitant le fait que $P = (a_{1,1} + \cdots + a_{1,n}X^{n-1}) \ldots (a_{p,1} + \cdots + a_{p,n}X^{n-1})$ est non nul, montrer que $F_1 \cup \cdots \cup F_p \neq E$.

Exercice 1.8

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$ (où u^n désigne $u \circ \cdots \circ u$, avec n fois u).

1. Si $x \in E \backslash \operatorname{Ker}(u^{n-1})$, montrer que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■ Approfondir

Exercice 1.9

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $E_1, \ldots, E_n, F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $E_i \subset F_i$ et

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n.$$

Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i = F_i$.

Exercice 1.10

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs vérifiant

$$\forall f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}), \quad f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Exercice 1.11

Soient E un espace de dimension n, $(p_1, \ldots, p_q)$ une famille d'endomorphismes de E vérifiant

$$\forall i \in [\![1, q]\!],\ p_i \circ p_i = p_i, \qquad \forall i \neq j \in [\![1, q]\!],\ p_i \circ p_j = 0 \quad \text{et} \quad p_1 + \cdots + p_q = \mathrm{id}_E.$$

1. Justifier que pour $i \in [\![1, q]\!]$, p_i est un projecteur sur un espace F_i que l'on précisera.
2. Montrer que $F_1 \oplus \cdots \oplus F_q = E$ et que $(p_1, \ldots, p_q)$ est la famille de projecteurs associée.

Exercice 1.12

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de trace nulle.

1. Montrer que si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant $\forall x \in E$, $(x, u(x))$ liée, alors u est une homothétie.
2. En déduire que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & N \end{pmatrix}$, avec $N \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.
3. Montrer que M est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 1.13

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 = -I_n$, $E = \mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Montrer si $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $(x, u(x))$ est libre. Si $y \notin \mathrm{Vect}(x, u(x))$, montrer que $(x, u(x), y, u(y))$ est libre.
2. En déduire que A est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Donner une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ en fonction des matrices $E_{i,j}$ (dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient (i, j) qui vaut 1).
2. Soit f une forme linéaire de E vérifiant $\forall (A, B) \in E^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace.
3. Soit g un endomorphisme de E vérifiant $\forall (A, B) \in E^2$, $g(AB) = g(BA)$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g préserve la trace (c'est-à-dire que pour tout $A \in E$, $\mathrm{tr}(g(A)) = \mathrm{tr}(A)$).

Corrections

Interro de cours

1. La somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si l'écriture d'un élément x de cet espace sous la forme $x_1 + \cdots + x_n$, avec $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ est unique.

2. **(a) est faux :** Dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel par exemple, $F = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{R}i$ et $H = \mathbb{R}j$ (où $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$) vérifient $F \cap G = F \cap H = G \cap H = \{0\}$, mais la somme $F + G + H$ n'est pas directe (sinon elle serait de dimension 3, ce qui est absurde puisque $\mathbb{C}$ est de dimension 2).
(b) est vrai : Si $i \neq j \in [\![1, p]\!]$ et $x \in E_i \cap E_j$, on a $0 = x + (-x)$, avec $x \in E_i$ et $-x \in E_j$, donc $x = -x = 0$ (puisque la somme est directe). Ainsi $E_i \cap E_j = \{0\}$.
(c) est vrai : C'est un théorème du cours.
(d) est faux : La somme est directe si l'écriture est unique (pas si elle existe). Pour un contre-exemple, les espaces F, G et H du a conviennent : tout élément de $\mathbb{C}$ peut s'écrire sous la forme $x + iy + 0$ avec $x \in F$, $iy \in G$ et $0 \in H$, mais la somme n'est pas directe.

3. Soit $(P_0, \ldots, P_n) \in F_0 \times \cdots \times F_n$ tel que $P_0 + \cdots + P_n = 0$. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, en prenant la valeur en i, on obtient $P_i(i) = 0$ (puisque pour $j \neq i$, $P_j(i) = 0$). Ainsi P_i admet tous les entiers entre 0 et n comme racines, ce qui lui fait $n + 1$ racines au moins. Comme $\deg(P_i) \leqslant n$, on en déduit que $P_i = 0$, et comme ceci vaut pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, la somme $F_0 + \cdots + F_n$ est directe.
De plus $\dim(F_i) \geqslant 1$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ (F_i contient au moins le polynôme $\prod\limits_{j \neq i} (X - j)$), donc

$$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_n) = \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_n) \geqslant n + 1 = \dim(E)$$

et on en déduit que $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$.

4. **(a) est vrai :** C'est un théorème du cours.
(b) est faux : H est un hyperplan de E si et seulement si on a $a \in E$ **non nul** tel que $H \oplus \mathbb{K}a = E$. Dans la caractérisation donnée par l'énoncé, a peut être nul, et dans ce cas $H = E$ n'est pas un hyperplan.
(c) est faux : Dans $\mathbb{R}^2$, $x+y = 0$ et $2x+2y = 0$ sont deux équations définissant le même hyperplan (mais ne sont pas égales).
(d) est vrai : C'est un théorème du cours.

5. Si $z \in \mathbb{C}$, l'unique écriture de z comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$. La projection sur F parallèlement à G est donc la fonction Re, la projection sur G parallèlement à F est l'application $i\,\mathrm{Im}$.
Enfin, la symétrique par rapport à F, parallèlement à G est $z \mapsto \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z) = \overline{z}$. C'est donc la conjugaison.

6. p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$. Dans ce cas, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}_E$. Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$, parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

7. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{tr}(u)$ est la trace de la matrice de u dans une base de E (ce scalaire ne dépend pas de la base choisie car deux semblables ont même trace).

8. (a) est vrai : Si A et B sont semblables, elle représente le même endomorphisme u dans deux bases différentes. Ainsi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(B)$.
(b) est faux : Deux matrices de même rang ne sont pas nécessairement semblables. Par exemple $A = I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables mais ont même rang (2). En effet, si on avait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP$, alors $B = P^{-1}P = I_2$... absurde !
(c) est vrai : C'est un théorème du cours.
(d) est faux : Deux matrices de même trace ne sont pas nécessairement semblables. Par exemple $A = I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables (comme vu au b) mais ont même trace (2).

9. On pose $E = \mathbb{R}^n$, e la base canonique de E, et on considère $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_e(u) = A$. La relation $A^2 = I_n$ donne $u^2 = \mathrm{id}_E$, donc u est une symétrie. C'est la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$.
Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. Si $p = \dim(F)$, pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a $u(f_i) = f_i$ et pour $i \in [\![p+1, n]\!]$, on a $u(f_i) = -f_i$. La matrice de u en base f est donc $B = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$.

10. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$. Par suite $A(3I_2 - A) = 2I_2$, ce qui montre que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(3I_2 - A) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.
Notons $P = X^2 - 3X + 2$ et pour $p \in \mathbb{N}$, $X^p = Q_pP + R_p$ est la division euclidienne de X^p par P. On a $A^p = R_p(A)$. Comme $\deg(R_p) < \deg(P) = 2$, R_p est de la forme $a_pX + b_p$, avec $(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$. Les racines de P sont 1 et 2, donc $R_p(1) = 1$ et $R_p(2) = 2^p$, ce qui montre que a_p et b_p sont solutions du système $\begin{cases} a_p + b_p = 1 \\ 2a_p + b_p = 2^p \end{cases}$
En effectuant la combinaison $L_2 - L_1$, on obtient $a_p = 2^p - 1$. Par suite $b_p = 1 - a_p = 2 - 2^p$. Ainsi

$$A^p = R_p(A) = a_pA + b_pI_2 = \begin{pmatrix} 3 - 2^{p+1} & -2^{p+1} + 2 \\ 3 \times 2^p - 3 & 3 \times 2^p - 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.1

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Alors

$$x_n = -x_1 - \cdots - x_{n-1} \in F_1 + \cdots + F_{n-1},$$

donc $x_n \in (F_1 + \cdots + F_{n-1}) \cap F_n = \{0\}$ et $x_n = 0$.
On a alors $x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0$, puis $x_{n-1} = -x_1 - \cdots - x_{n-2} \in F_1 + \cdots + F_{n-2}$. Ainsi il vient $x_{n-1} \in (F_1 + \cdots + F_{n-2}) \cap F_{n-1} = \{0\}$ et $x_{n-1} = 0$.
On continue ainsi jusqu'à arriver à $x_1 = 0$. On a alors $x_1 = \cdots = x_n = 0$ donc la somme est directe.

Il ne suffit pas d'avoir $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tout $i \neq j$ pour obtenir que la somme est directe !

Exercice 1.2

1. On calcule $r \circ r$, en développant (par bilinéarité de la composition) et en utilisant le fait que $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$.

$$\begin{aligned} r \circ r &= (p + q - q \circ p) \circ (p + q - q \circ p) \\ &= p \circ p + p \circ q - p \circ q \circ p + q \circ p + q \circ q - q \circ q \circ p - q \circ p \circ p - q \circ p \circ q + q \circ p \circ q \circ p \\ &= p + 0 - 0 \circ p + q \circ p + q - q \circ p - q \circ p - q \circ 0 + q \circ 0 \circ p = p + q - q \circ p = r. \end{aligned}$$

Dans le développement, bien prendre garde que $q \circ p$ est a priori différent de $p \circ q$!

2. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$, alors

$$r(x) = p(x) + q(x) - (q \circ p)(x) = 0 + 0 - q(p(x)) = -q(0) = 0$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(r)$ et $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(r)$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(r)$. Alors $0 = r(x) = p(x) + q(x) - (q \circ p)(x)$. On a donc $p(x) = q(p(x)) - q(x)$. En appliquant p de chaque côté, il vient

$$p(x) = p(p(x)) = p(q(p(x))) - p(q(x)) = (p \circ q \circ p)(x) - (p \circ q)(x) = (0 \circ p)(x) - 0 = 0$$

et $x \in \mathrm{Ker}(p)$. Par suite, $r(x) = 0 + q(x) - q(0) = q(x)$, donc $q(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(q)$. On a donc $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$, ce qui montre que $\mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
En conclusion, $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

3. Soit $x \in \mathrm{Im}(r)$. Alors on a $a \in E$ tel que

$$x = r(a) = p(a) + q(a) - (q \circ p)(a) = p(a) + q(a) - q(p(a)) = p(a) + q(a - p(a)) \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$$

donc $\mathrm{Im}(r) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Alors on a $(y, z) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Im}(q)$ tel que $x = y + z$. Comme $y \in \mathrm{Im}(p)$, on a $b \in E$ tel que $y = p(b)$; comme $z \in \mathrm{Im}(q)$, on a $c \in E$ tel que $z = q(c)$. On a donc $x = p(b) + q(c)$. On calcule alors

$$\begin{aligned} r(x) &= p(x) + q(x) - (q \circ p)(x) = p(p(b) + q(c)) + q(p(b) + q(c)) - q(p(p(b) + q(c))) \\ &= (p \circ p)(b) + (p \circ q)(c) + (q \circ p)(b) + (q \circ q)(c) - (q \circ p \circ p)(b) - (q \circ p \circ q)(c) \\ &= p(b) + 0 + (q \circ p)(b) + q(c) - (q \circ p)(b) - (q \circ 0)(c) = p(b) + q(c) = x. \end{aligned}$$

Ainsi $x = r(x) \in \mathrm{Im}(r)$ et $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(r)$.

Lorsque p est un projecteur, pour montrer qu'un vecteur x de E est dans $\mathrm{Im}(p)$, il suffit de calculer $p(x)$. Si x est effectivement dans $\mathrm{Im}(p)$, on doit trouver $p(x) = x$, ce qui prouve que $x \in \mathrm{Im}(p)$.

À ce stade, on a montré que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Il reste à montrer que la somme est directe. Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Comme $y \in \mathrm{Im}(p)$, on a $a \in E$ tel que $y = p(a)$; comme $y \in \mathrm{Im}(q)$, on a $b \in E$ tel que $y = q(b)$. On a alors $p(a) = q(b)$. En composant par p, il vient

$$y = p(a) = p(p(a)) = p(q(b)) = (p \circ q)(b) = 0$$

donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}$, ce qui montre que la somme est directe.

Exercice 1.3

• Supposons M inversible. Soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0$.
Posons $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0_{n-p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (où 0_{n-p} désigne le vecteur colonne nul de taille $n-p$). Un calcul par blocs donne $MY = \begin{pmatrix} AX \\ 0_{n-p} \end{pmatrix} = 0$, donc $Y = 0$ puisque M est inversible. Ainsi $X = 0$ et A est inversible.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n-p,1}(\mathbb{K})$ tel que $CX = 0$. On ne peut pas directement poser $Y = \begin{pmatrix} 0_p \\ X \end{pmatrix}$ ici, puisqu'un calcul par blocs donne $MY = \begin{pmatrix} BX \\ CX \end{pmatrix} \neq 0$ a priori.
On se donne plutôt $Y = \begin{pmatrix} U \\ X \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $U \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ à déterminer. Un calcul par blocs donne $MY = \begin{pmatrix} AU + BX \\ CX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AU + BX \\ 0_{n-p} \end{pmatrix}$. Pour obtenir $MY = 0$, on choisit donc U de sorte que $AU + BX = 0$ soit $AU = -BX$ i.e. $U = -A^{-1}BX$ (licite car A est inversible). On a alors $MY = 0$, donc $Y = 0$ (puisque M est inversible) et en particulier $X = 0$, ce qui montre que C est inversible.

• Réciproquement, supposons A et C inversibles. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = 0$. On décompose X sous la forme $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec $X_1 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $X_2 \in \mathscr{M}_{n-p,1}(\mathbb{K})$. Un calcul par blocs donne alors $MX = \begin{pmatrix} AX_1 + BX_2 \\ CX_2 \end{pmatrix}$, donc $AX_1 + BX_2 = 0_p$ et $CX_2 = 0_{n-p}$. Comme C est inversible, on en déduit que $X_2 = 0$. Par suite $AX_1 = 0$, et comme A est inversible, $X_1 = 0$.
Ainsi $X = 0$ et M est inversible.

> Comme vu en première année, dans les exercices un peu théoriques, la caractérisation de M inversible la plus pratique est $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ MX = 0 \Rightarrow X = 0$.

On a montré l'équivalence souhaitée. Si maintenant M (et donc A et C) est inversible, on cherche M^{-1} sous la forme $N = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B_1 \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C_1 \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ (il semble raisonnable d'espérer que l'inverse d'une matrice triangulaire par blocs soit encore triangulaire par blocs).
En faisant le calcul par blocs, la relation $MN = I_n$ donne

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_1 & AB_1 + BC_1 \\ 0 & CC_1 \end{pmatrix}.$$

On veut donc $AA_1 = I_p$, $CC_1 = I_{n-p}$ et $AB_1 + BC_1 = 0$. Il faut donc choisir $A_1 = A^{-1}$, $C_1 = C^{-1}$ et $B_1 = -A^{-1}BC_1 = -A^{-1}BC^{-1}$.
En prenant $N = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$, le calcul plus haut montre que $MN = I_n$. Ainsi on a $M^{-1} = N$.

Exercice 1.4

1. Notons F et G les espaces supplémentaires associée à p (on a $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$, ou l'inverse). Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $F \oplus G = E$. Notant $d = \dim(F)$, pour $i \in [\![1, d]\!]$, $p(e_i) = e_i$, et pour $i \in [\![d+1, n]\!]$, $p(e_i) = 0$. Ainsi la matrice de p en base e est $\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Par suite, $\operatorname{tr}(p) = d = \dim(F) = \dim(\operatorname{Im} p) = \operatorname{rg}(p)$.

Cette formule est très classique, il faut savoir la reprouver rapidement.

2. Pour appliquer la question précédente à B, il faut d'abord montrer que B est une matrice de projection, soit $B^2 = B$. Notons que comme $A^q = I_n$, on a

$$AB = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^{k+1} = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} A^k = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q-1} A^k + \frac{1}{q} I_n = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^k = B.$$

On en déduit par récurrence aisée que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B = B$, puis

$$B^2 = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^k B = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} B = B.$$

Ainsi B est une matrice de projection, et par la question précédente, $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{rg}(B)$.
Par linéarité de la trace, $\operatorname{tr}(B) = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{tr}(A^k)$. Pour avoir la formule voulue, il faut donc montrer que $\operatorname{rg}(B) = \dim(\operatorname{Ker}(A - I_n))$. Ceci sera le cas si on arrive à montrer que $\operatorname{Im}(B) = \operatorname{Ker}(A - I_n)$.
Soit $X \in \operatorname{Ker}(A - I_n)$. Alors $AX = X$, donc pour tout $k \in [\![0, q-1]\!]$, $A^k X = X$, ce qui montre que $X = BX$. Par suite $X \in \operatorname{Im}(B)$ et $\operatorname{Ker}(A - I_n) \subset \operatorname{Im}(B)$.
Réciproquement, soit $Y \in \operatorname{Im}(B)$. On a $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = BX$. Par suite

$$AY = ABX = BX = Y$$

(puisque $AB = B$, comme vu plus haut) et $Y \in \operatorname{Ker}(A - I_n)$, puis $\operatorname{Im}(B) \subset \operatorname{Ker}(A - I_n)$.
En conclusion, $\operatorname{Im}(B) = \operatorname{Ker}(A - I_n)$, donc $\operatorname{rg}(B) = \dim(\operatorname{Ker}(A - I_n))$, ce que l'on voulait montrer.

Exercice 1.5

1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$, donc

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A = \begin{pmatrix} a^2 + bc - a(a+d) & ab + bd - b(a+d) \\ ac + cd - c(a+d) & bc + d^2 - d(a+d) \end{pmatrix} = (bc - ad)I_2$$

ce qui montre que $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.

2. Si A est inversible, on a $\det(A) \neq 0$, donc la relation plus haut se réécrit

$$\frac{1}{\det(A)}(\operatorname{tr}(A)I_2 - A)A = I_2.$$

Ainsi A est inversible, et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{tr}(A)I_2 - A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.6

1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -18 & 12 \\ -6 & 22 & -12 \\ -6 & 18 & -8 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - 6A + 8I_2 = 0$.

2. D'après la question précédente, on a $A(6I_2 - A) = 8I_2$, donc A est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(6I_2 - A) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Notons $P = X^2 - 6X + 8$ et pour $p \in \mathbb{N}$, $X^p = Q_pP + R_p$ est la division euclidienne de X^p par P. On a $A^p = R_p(A)$. Comme $\deg(R_p) < \deg(P) = 2$, R_p est de la forme $a_pX + b_p$, avec $(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$. Les racines de P sont 2 et 4, donc $R_p(2) = 2^p$ et $R_p(4) = 4^p$, ce qui montre que a_p et b_p sont solutions du système $\begin{cases} 2a_p + b_p = 2^p \\ 4a_p + b_p = 4^p \end{cases}$

En effectuant la combinaison $L_2 - L_1$, on obtient $2a_p = 4^p - 2^p$ donc $a_p = 2 \times 4^{p-1} - 2^{p-1}$. Par suite $b_p = 2^p - 2a_p = 2^{p+1} - 4^p$. Ainsi

$$A^p = R_p(A) = a_pA + b_pI_3 = \begin{pmatrix} 2 \times 4^{p-1} + 2^{p-1} & -6 \times 4^{p-1} + 3 \times 2^{p-1} & 4^p - 2^p \\ -2 \times 4^{p-1} + 2^{p-1} & 6 \times 4^{p-1} - 2^{p-1} & -4^p + 2^p \\ -2 \times 4^{p-1} + 2^{p-1} & 6 \times 4^{p-1} - 3 \times 2^{p-1} & -4^p + 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.7

1. Soit F un sous-espace strict de E, et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de F (avec $d = \dim(F)$). Comme $(e_1, \ldots, e_d)$ est libre dans E, on peut la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On pose alors $H = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Comme $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est libre, $\dim(H) = n - 1$ et H est un hyperplan de E.
De plus, $F \neq E$, donc $d < n$, ce qui montre que $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_d) \subset H$. Ainsi F est un inclus dans un hyperplan de E. Pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, on a donc H_i un hyperplan de E contenant F_i. Si l'on arrive à montrer que $H_1 \cup \cdots \cup H_p \neq E$, comme $F_1 \cup \cdots \cup F_p \subset H_1 \cup \cdots \cup H_p$, $F_1 \cup \cdots \cup F_p \neq E$. Il suffit donc de montrer le résultat voulu lorsque $F_1, \ldots, F_p$ sont des hyperplans de E.

2. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Comme F_i est un hyperplan de E, il admet une équation de la forme

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = 0,$$

avec $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x en base e et $(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}) \neq (0, \ldots, 0)$.
On a alors $x \in F_1 \cup \cdots \cup F_p$ si et seulement si il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $\varphi_i(x) = 0$, ce qui équivaut à $\varphi_1(x) \ldots \varphi_p(x) = 0$ puis à

$$(a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n) \ldots (a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n) = 0.$$

3. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, $P_i = a_{i,1} + a_{i,2}X + \cdots + a_{i,n}X^{n-1}$ n'est pas le polynôme nul d'après la question précédente (l'un de ses coefficients est non nul). Ainsi $P = P_1 \ldots P_p \neq 0$, et on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) \neq 0$ (sinon P aurait une infinité de racines).
Soit alors x l'élément de E dont les coordonnées en base e sont $(1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1})$. Comme $P(\lambda) \neq 0$, d'après la question précédente, $x \notin F_1 \cup \cdots \cup F_p$, ce qui prouve que $F_1 \cup \cdots \cup F_p \neq E$.

Exercice 1.8

1. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{n-1}u^{n-1}(x) = 0$. En appliquant u^{n-1} à cette relation, comme pour $p \geqslant n$, $u^p = u^{p-n} \circ u^n = 0$, on a

$$0 = u^{n-1}(0) = \lambda_0 u^{n-1}(x) + \lambda_1 u^n(x) + \cdots + \lambda_{n-1}u^{2n-2}(x) = \lambda_0 u^{n-1}(x).$$

Par hypothèse, $u^{n-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$.
La relation initiale devient donc $\lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{n-1}u^{n-1}(x) = 0$. En appliquant maintenant u^{n-2}, on a

$$0 = u^{n-2}(0) = \lambda_1 u^{n-1}(x) + \cdots + \lambda_{n-1}u^{2n-3}(x) = \lambda_1 u^{n-1}(x)$$

ce qui donne $\lambda_1 = 0$. On continue ainsi en appliquant u^{n-3}, $u^{n-4}, \ldots$ ce qui donne $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 0$, jusqu'à obtenir $\lambda_{n-1}u^{n-1}(x) = 0$ dont on déduit finalement $\lambda_{n-1} = 0$.
Ainsi la famille $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre. Comme c'est une famille à $n = \dim(E)$ éléments, on en déduit que c'est une base de E. Dans cette base, la matrice de u est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Notons e une base de E et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_e(u) = A$. Les relations $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$ donnent $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. On peut donc trouver $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(u^{n-1})$. D'après la question précédente, $f = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E et la matrice de u dans cette base est B. A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, donc sont semblables.

Exercice 1.9

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a déjà $E_i \subset F_i$. Soit $x \in F_i$. Comme

$$x \in F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$$

on a $(y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tel que $x = y_1 + \cdots + y_n$.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $x_k = x$ si $k = i$, et $x_k = 0$ si $k \neq i$. On a $x_k \in E_k \subset F_k$ et

$$x_1 + \cdots + x_n = x = y_1 + \cdots + y_n.$$

Or la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe, donc par unicité de l'écriture de x, $x_k = y_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. En particulier, $y_i = x_i = x$, donc $x \in E_i$. Ainsi $F_i \subset E_i$ puis $E_i = F_i$.

Exercice 1.10

Supposons que $(e_1, \ldots, e_n)$ ne soit pas une base de E.

Alors $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est un sous-espace strict de E (puisque la famille n'est pas génératrice). Comme vu dans l'exercice **1.7**, F est contenu dans un hyperplan H de E.
Notons $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ une équation de cet hyperplan, dans une base e de E, avec $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$.
On pose alors $f : x \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ (où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de x en base e). On vérifie facilement que f est linéaire de E dans $\mathbb{K}$ et on a $H = \mathrm{Ker}(f)$.
Comme les e_i sont dans F donc dans H, on a $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0$, donc f est nulle par hypothèse. Ceci donne $H = E$... absurde ! Ainsi $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Exercice 1.11

1. Comme $p_i \circ p_i = p_i$, p_i est un projecteur sur $F_i = \mathrm{Im}(p_i)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p_i)$.

2. Notons que le fait que $F_1 + \cdots + F_q = E$ vient directement de la relation $p_1 + \cdots + p_q = \mathrm{id}_E$. En effet, si $x \in E$, on a $x = p_1(x) + \cdots + p_q(x)$ et $p_i(x) \in F_i$ pour $i \in [\![1, q]\!]$. Ainsi $E \subset F_1 + \cdots + F_q$ et comme l'inclusion réciproque est triviale, $F_1 + \cdots + F_q = E$.
Reste à montrer que la somme est directe. Soit $(x_1, \ldots, x_q) \in F_1 \times \cdots \times F_q$ tel que $x_1 + \cdots + x_q = 0$. Pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on a $a_i \in E$ tel que $x_i = p_i(a_i)$. Par suite, si $j \in [\![1, q]\!]$,

$$p_j(x_i) = p_j(p_i(a_i)) = (p_j \circ p_i)(a_i) = 0$$

si $j \neq i$ et $p_j(x_j) = (p_j \circ p_j)(a_j) = p_j(a_j) = x_j$. Ainsi en appliquant p_j à la relation précédente, on trouve

$$0 = p_j(0) = p_j(x_1) + \cdots + p_j(x_q) = x_j.$$

Ainsi $F_1 \oplus \cdots \oplus F_q = E$.
Si maintenant $x \in E$ a pour décomposition $x = x_1 + \cdots + x_p$, avec $x_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, en appliquant p_j, on trouve comme plus haut que $p_j(x_i) = 0$ si $i \neq j$ et $p_j(x_j) = x_j$ donc

$$p_j(x) = p_j(x_1) + \cdots + p_j(x_p) = x_j$$

ce qui montre que $(p_1, \ldots, p_q)$ est la famille de projecteurs associée à $F_1 \oplus \cdots \oplus F_q = E$.

Exercice 1.12

1. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(e_i, u(e_i))$ est liée, et comme $e_i \neq 0$, on a $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \lambda_i e_i$.
Si $i \neq j \in [\![1, n]\!]$, $e_i + e_j \neq 0$, donc on a de même $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i + e_j) = \alpha_{i,j}(e_i + e_j)$. Or par linéarité de u, $u(e_i + e_j) = u(e_i) + u(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$. Comme (e_i, e_j) est libre, on en déduit que $\lambda_i = \alpha_{i,j} = \lambda_j$.
Tous les λ_i sont donc égaux, et en notant λ leur valeur commune, u coïncide avec $\lambda \mathrm{id}_E$ sur une base de E, donc $u = \lambda \mathrm{id}_E$.

2. Soient $E = \mathbb{K}^n$, e la base canonique de E et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_e(u) = M$. D'après la question précédente, si pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ est liée, u est une homothétie. Comme $\mathrm{tr}(u) = 0$, u est alors l'homothétie de rapport 0, donc est constante nulle. On a alors M de la forme voulue.
Supposons donc qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x))$ soit libre. Par le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en une base $f = (f_1, \ldots, f_n)$ de E. Dans cette base, la matrice de