Sommaire

CHAPITRE
1

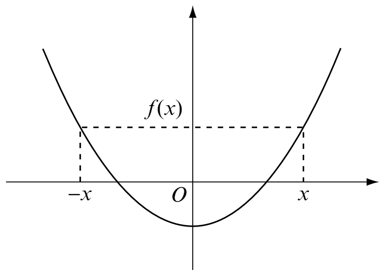
Notions de base

A. Vocabulaire usuel relatif aux fonctions

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}$ son domaine de définition, I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

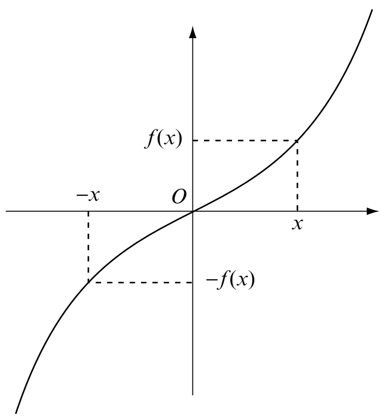
1. Parité – Périodicité

- f est **paire** lorsque : pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$ et $f(-x) = f(x)$.



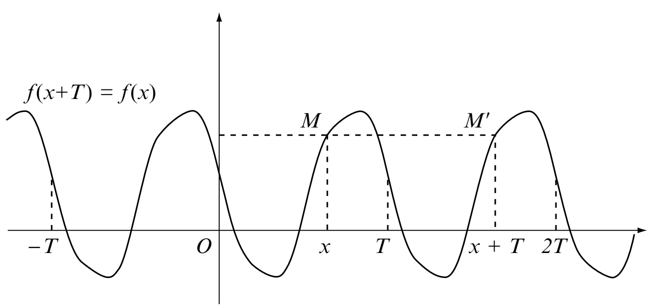
Le tracé de $\mathscr{C}$ s'effectue pour les x positifs
et est complété par symétrie par rapport à $y'Oy$.

- f est **impaire** lorsque : pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$ et $f(-x) = -f(x)$.



Le tracé de $\mathscr{C}$ s'effectue pour les x positifs
et est complété par symétrie par rapport à O.

- f est **périodique** de période T lorsque : pour tout $x \in \mathcal{D}$, $x + T \in \mathcal{D}$ et $f(x+T) = f(x)$.



M' est l'image de M par la translation de vecteur $T\,\vec{i}$. L'étude de f se fait donc sur un intervalle de longueur T. On trace la portion de courbe correspondante, puis on effectue les translations de vecteur $kT\,\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2. Fonctions bornées

On dit que :

- f est **majorée** sur I lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I, f(x) \leqslant M$.
- f est **minorée** sur I lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in I, f(x) \geqslant m$. ✎
- f est **bornée** sur I lorsque f est majorée et minorée sur I ; donc :

  f est bornée sur I lorsqu'il existe M tel que : $\forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$.
- f est positive sur I lorsque : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0$.
- f est négative sur I lorsque : $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant 0$.

✎ m et M ne doivent pas dépendre de x.

3. Fonctions monotones

On dit que :

- f est **croissante** sur I lorsque :
$$\forall (x, x') \in I^2,\ (x < x' \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x')).$$
- f est **strictement croissante** sur I lorsque :
$$\forall (x, x') \in I^2,\ (x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x')).$$
- f est **décroissante** sur I (resp. **strictement décroissante** sur I) lorsque :
$$\forall (x, x') \in I^2,\ (x < x' \Longrightarrow f(x) \geqslant f(x')) \quad \text{[resp. } (x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'))\text{]}.$$
- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I lorsque f est croissante ou décroissante sur I (resp. strictement croissante ou strictement décroissante sur I).

Pour montrer que f est monotone, on peut étudier le signe de son taux d'accroissement $\dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ $(x \neq x')$. *Par exemple :*

f est croissante sur $I \Longleftrightarrow \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geqslant 0$ pour tout $(x, x') \in I^2$ tel que $x \neq x'$.

4. Restriction d'une fonction

- On appelle **restriction de f à la partie A de $\mathbb{R}$**, la fonction notée $f_{|A}$ qui à tout x de $\mathcal{D} \cap A$ associe le réel $f_{|A}(x) = f(x)$.

Par exemple :

Soit $f(x) = \sqrt{x^2}$.

$f_{|\mathbb{R}^+}$ est définie par $f_{|\mathbb{R}^+}(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

$f_{|\mathbb{R}^-}$ est définie par $f_{|\mathbb{R}^-}(x) = -x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^-$.

5. Image et image réciproque d'une partie par une fonction

Soit E un ensemble et f une fonction de E dans $\mathbb{R}$.

- Soit A une partie de E. On appelle **image de A par f**, l'ensemble des images par f des éléments de A. On le note $f(A)$.