

# Sommaire

<b>Chapitre 1 . Notions de base</b> . . . . .	7
A. Vocabulaire usuel relatif aux fonctions . . . . .	8
B. Fonctions usuelles . . . . .	11
<b>Chapitre 2 . Suites réelles</b> . . . . .	17
A. Rappels . . . . .	18
B. Convergence d'une suite réelle . . . . .	20
C. Limite d'une suite dans $\mathbb{R}$ . . . . .	25
D. Comparaison des suites . . . . .	32
<i>Méthodes</i> . . . . .	37
<i>Exercices</i> . . . . .	43
<i>Solutions des exercices</i> . . . . .	50
<b>Chapitre 3 . Fonctions d'une variable : limite et continuité</b> . . . . .	77
A. Limite d'une fonction . . . . .	78
B. Théorèmes sur les limites . . . . .	82
C. Comparaison des fonctions . . . . .	85
D. Continuité d'une fonction . . . . .	88
E. Propriétés des fonctions continues . . . . .	90
<i>Méthodes</i> . . . . .	94
<i>Exercices</i> . . . . .	103
<i>Solutions des exercices</i> . . . . .	109
<b>Chapitre 4 . Fonctions d'une variable : dérivation</b> . . . . .	131
A. Dérivabilité . . . . .	132
B. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis . . . . .	137
C. Dérivées successives . . . . .	142
D. Fonctions convexes . . . . .	144
<i>Méthodes</i> . . . . .	149
<i>Exercices</i> . . . . .	155
<i>Solutions des exercices</i> . . . . .	160
<b>Chapitre 5 . Intégration sur un segment</b> . . . . .	181
A. Intégrale d'une fonction en escalier . . . . .	182
B. Intégrale d'une fonction continue sur un segment . . . . .	184
C. Primitivation et intégration . . . . .	192
D. Calcul des primitives et des intégrales . . . . .	197

<i>Méthodes</i> . . . . .	201
<i>Exercices</i> . . . . .	211
<i>Solutions des exercices</i> . . . . .	218

**Chapitre 6 . Formules de Taylor développements limités . . . . . 247**

A. Formules de Taylor . . . . .	248
B. Développements limités . . . . .	250
<i>Méthodes</i> . . . . .	255
<i>Exercices</i> . . . . .	260
<i>Solutions des exercices</i> . . . . .	265

**Chapitre 7 . Séries numériques . . . . . 285**

A. Généralités . . . . .	286
B. Séries à termes positifs . . . . .	289
C. Séries de référence . . . . .	292
<i>Méthodes</i> . . . . .	296
<i>Exercices</i> . . . . .	300
<i>Solutions des exercices</i> . . . . .	306

**Chapitre 8 . Fonctions numériques de deux variables réelles . . . . . 325**

A. Rappels sur $\mathbb{R}^2$ – Éléments de topologie . . . . .	326
B. Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ . . . . .	330
<i>Méthodes</i> . . . . .	339
<i>Exercices</i> . . . . .	344
<i>Solutions des exercices</i> . . . . .	347

# *Notions de base*

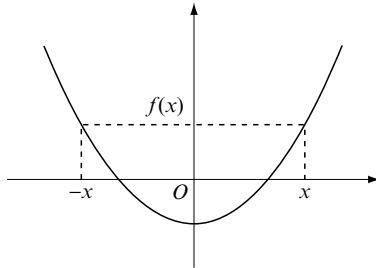
<b>A. Vocabulaire usuel relatif aux fonctions</b> . . . . .	8
1. Parité – Périodicité . . . . .	8
2. Fonctions bornées . . . . .	9
3. Fonctions monotones . . . . .	9
4. Restriction d'une fonction . . . . .	9
5. Image et image réciproque d'une partie par une fonction . . . . .	9
<b>B. Fonctions usuelles</b> . . . . .	11
1. Valeur absolue . . . . .	11
2. Partie entière . . . . .	11
3. Logarithme népérien . . . . .	11
4. Exponentielles . . . . .	12
5. Puissances . . . . .	13
6. Croissances comparées des fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances . . . . .	13
7. Fonctions trigonométriques . . . . .	13

# A. Vocabulaire usuel relatif aux fonctions

Dans ce paragraphe,  $f$  désigne une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{D}$  son domaine de définition,  $I$  un intervalle inclus dans  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ .

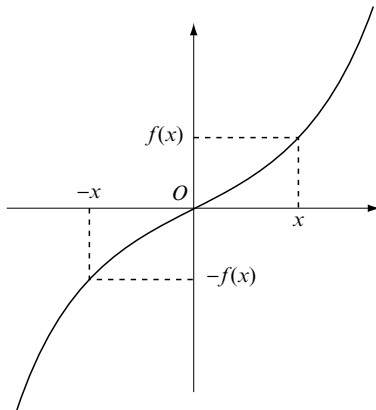
## 1. Parité – Périodicité

■  $f$  est **paire** lorsque : pour tout  $x \in \mathcal{D}$ ,  $-x \in \mathcal{D}$  et  $f(-x) = f(x)$ .



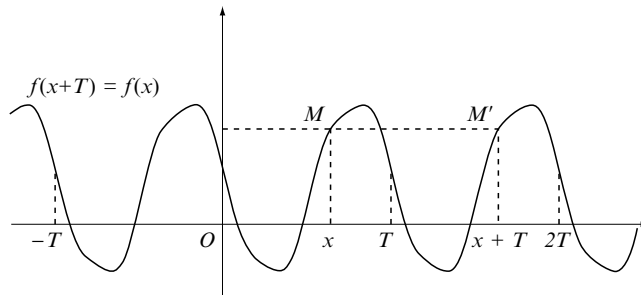
Le tracé de  $\mathcal{C}$  s'effectue pour les  $x$  positifs et est complété par symétrie par rapport à  $y'Oy$ .

■  $f$  est **impaire** lorsque : pour tout  $x \in \mathcal{D}$ ,  $-x \in \mathcal{D}$  et  $f(-x) = -f(x)$ .



Le tracé de  $\mathcal{C}$  s'effectue pour les  $x$  positifs et est complété par symétrie par rapport à  $O$ .


■  $f$  est **périodique** de période  $T$  lorsque : pour tout  $x \in \mathcal{D}$ ,  $x + T \in \mathcal{D}$  et  $f(x + T) = f(x)$ .




$M'$  est l'image de  $M$  par la translation de vecteur  $T\vec{i}$ . L'étude de  $f$  se fait donc sur un intervalle de longueur  $T$ . On trace la portion de courbe correspondante, puis on effectue les translations de vecteur  $kT\vec{i}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

## 2. Fonctions bornées

On dit que :

  $m$  et  $M$  ne doivent pas dépendre de  $x$ .

- $f$  est **majorée** sur  $I$  lorsqu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall x \in I, f(x) \leq M$ .
- $f$  est **minorée** sur  $I$  lorsqu'il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall x \in I, f(x) \geq m$ . 
- $f$  est **bornée** sur  $I$  lorsque  $f$  est majorée et minorée sur  $I$ ; donc :  
 $f$  est bornée sur  $I$  lorsqu'il existe  $M$  tel que :  $\forall x \in I, |f(x)| \leq M$ .
- $f$  est positive sur  $I$  lorsque :  $\forall x \in I, f(x) \geq 0$ .
- $f$  est négative sur  $I$  lorsque :  $\forall x \in I, f(x) \leq 0$ .

## 3. Fonctions monotones

On dit que :

- $f$  est **croissante** sur  $I$  lorsque :  
 $\forall (x, x') \in I^2, (x < x' \implies f(x) \leq f(x'))$ .
- $f$  est **strictement croissante** sur  $I$  lorsque :  
 $\forall (x, x') \in I^2, (x < x' \implies f(x) < f(x'))$ .
- $f$  est **décroissante** sur  $I$  (resp. **strictement décroissante** sur  $I$ ) lorsque :  
 $\forall (x, x') \in I^2, (x < x' \implies f(x) \geq f(x'))$  [resp.  $(x < x' \implies f(x) > f(x'))$ ].
- $f$  est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur  $I$  lorsque  $f$  est croissante ou décroissante sur  $I$  (resp. strictement croissante ou strictement décroissante sur  $I$ ).

**Pour montrer que  $f$  est monotone**, on peut étudier le signe de son taux d'accroissement

$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$  ( $x \neq x'$ ). Par exemple :

$f$  est croissante sur  $I \iff \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq 0$  pour tout  $(x, x') \in I^2$  tel que  $x \neq x'$ .

## 4. Restriction d'une fonction

- On appelle **restriction de  $f$  à la partie  $A$  de  $\mathbb{R}$** , la fonction notée  $f|_A$  qui à tout  $x$  de  $\mathcal{D} \cap A$  associe le réel  $f|_A(x) = f(x)$ .

Par exemple :

Soit  $f(x) = \sqrt{x^2}$ .

$f|_{\mathbb{R}^+}$  est définie par  $f|_{\mathbb{R}^+}(x) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .

$f|_{\mathbb{R}^-}$  est définie par  $f|_{\mathbb{R}^-}(x) = -x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^-$ .

## 5. Image et image réciproque d'une partie par une fonction

Soit  $E$  un ensemble et  $f$  une fonction de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

- Soit  $A$  une partie de  $E$ . On appelle **image de  $A$  par  $f$** , l'ensemble des images par  $f$  des éléments de  $A$ . On le note  $f(A)$ .