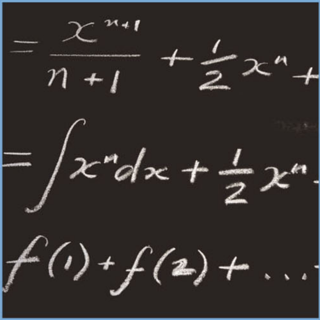
idées reçues

Les Mathématiques



Benoît Rittaud

Le Cavalier Bleu
EDITIONS

idées reçues

Les Mathématiques

idées
reçues

Les Mathématiques

Benoît Rittaud

Sciences & Techniques

Le Cavalier Bleu
EDITIONS

Benoît Rittaud

Benoît Rittaud est mathématicien et maître de conférences à l'université Paris-XIII. Chercheur, il se consacre également à la vulgarisation des mathématiques, au travers d'articles réguliers dans le magazine *La Recherche*, de conférences ainsi que par divers ouvrages.

Du même auteur

– *Le Fabuleux destin de* $\sqrt{2}$, Éditions Le Pommier, 2006
– *L'Assassin des échecs et autres fictions mathématiques,* Éditions Le Pommier, 2004

MATHÉMATIQUES – n. f. pl. – du grec *mathêmatikos*, de *mathêma*, « science ». Discipline s'intéressant à des objets abstraits, dont elle tâche de dégager propriétés et structures à l'aide de raisonnements s'appuyant sur la logique.

Les premiers à s'appeler « mathématiciens » sont les disciples de l'école pythagoricienne, fondée au VIe siècle avant notre ère par le Grec Pythagore, dans le Sud-Est de l'actuelle Italie. Le terme est alors employé pour désigner les « initiés », par opposition aux novices (appelés, eux, « acousmaticiens »), initiés dont les activités pouvaient n'avoir rien à voir, ni de près ni de loin, avec les mathématiques que nous connaissons.

Jusqu'au XIXe siècle, le prestige intellectuel de la géométrie est tel qu'un mathématicien est parfois aussi appelé « géomètre », même si ses travaux ne concernent pas la géométrie proprement dite. L'expansion de domaines mathématiques difficiles à relier à la géométrie traditionnelle (analyse, théorie des ensembles, théorie des nombres…) a finalement rendu caduque cette dénomination.

Depuis le XVIe siècle, l'usage veut que le substantif soit utilisé au pluriel (« les mathématiques »). Au XIXe siècle pourtant, Auguste Comte met en exergue « la » mathématique pour en affirmer l'unité. Le XXe a vu les mathématiciens du groupe Bourbaki proposer eux aussi de rétablir l'emploi du singulier ; pour cette raison, l'œuvre synthétique du groupe Bourbaki s'intitule *Éléments de Mathématique* – la majuscule y étant par ailleurs de rigueur. Malgré le prestige de Bourbaki, cette convention est aujourd'hui tombée en désuétude, au profit de la poésie certaine qui se dégage du pluriel.

Introduction

C'est aujourd'hui un lieu commun que de commencer un ouvrage de vulgarisation mathématique en expliquant d'emblée que ces dernières font peur, que le grand public les fuit comme la peste, et que les mathématiciens ne sont décidément pas doués pour en parler aux non-spécialistes. Bien qu'un peu convenue, cette autoflagellation constitue un progrès : dans des livres plus anciens, on ne trouve pas toujours trace de réflexion critique sur la manière de parler des mathématiques au plus grand nombre. Aujourd'hui, les mathématiciens savent que le grand public n'a pas grand-chose à voir avec le public de leurs élèves ou étudiants. Ils savent aussi qu'être capable de communiquer est un enjeu crucial dans notre société de l'information, et qu'une part de la vitalité de la discipline dépend de notre aptitude à diffuser la « culture mathématique » – un concept qui apparaît à beaucoup comme un oxymore tant les mathématiques se réduisent parfois à de la pure technique dans l'imagerie courante.

Dans les pages qui vont suivre, l'on trouvera peu de mathématiques proprement dites, le but étant autant d'expliquer ce qu'elles sont (sans pour autant entrer dans les détails) que ce qu'elles ne sont pas. Y a-t-il encore des choses à découvrir en mathématiques ? Les mathématiciens vivent-ils dans leur tour d'ivoire ? Faut-il avoir un « don » pour faire des mathématiques ? Les mathématiques sont-elles une science inutile ? Autant de questions récurrentes que se posent beaucoup de gens souvent intrigués, parfois un rien effrayés, par une discipline que l'on croit parfois nimbée de mystères, et à laquelle on attache si souvent ses propres souvenirs d'écolier.

RÉALITÉ CONTEMPORAINE DES MATHÉMATIQUES

« Les mathématiques sont la science de l'exactitude. »

Ne dirons-nous pas que le nombre trois
périra et souffrira tout au monde
plutôt que de se résigner à devenir pair, en restant trois ?

Platon, *Phédon,* IVe siècle avant notre ère

Outre la politesse des rois, l'exactitude est l'horizon indépassable des mathématiques. On ne transige pas avec le résultat d'un calcul, qu'il soit mental, écrit ou informatique, et il est rigoureusement défendu de modifier l'énoncé d'un théorème sans raison valable. Les mathématiques ne sont certes pas la seule discipline qui puisse revendiquer ainsi une telle obsession de l'exactitude, mais ce sont elles qui sont le mieux parvenues à asseoir cette réputation. Celle-ci provient de plusieurs facteurs, l'un des principaux étant la permanence et l'extraordinaire longévité des affirmations mathématiques. Pour ne citer qu'un exemple parmi les plus simples, depuis que les hommes étudient l'arithmétique, personne n'a jamais pu contester qu'ajouter un nombre pair à un nombre impair produit toujours un nombre impair.

Il y a d'abord un aspect inconfortable à cet état de fait, qui ne laisse aucune place à la nuance. Impossible, pour justifier sa paresse, de se défendre en affirmant que les mathématiques d'aujourd'hui seront de toute façon contredites par de nouvelles découvertes. Mais surtout, il y a un côté effrayant à se représenter une logique tellement irrésistible que ses conclusions sont gravées dans le marbre, immuables et éternelles. Une telle force a quelque chose de surnaturel, au sens premier du mot. L'exactitude mathématique est-elle vraiment humaine ? Ne devrait-on pas plutôt considérer qu'elle ne saurait être que réservée à des individus un peu étranges, à regarder avec au moins autant de crainte que d'envie ? Cela expliquerait ce fameux « blocage » en mathématiques dont les journaux en mal de sujets accrocheurs nous rebattent les oreilles à intervalles réguliers…

Commençons par dissiper un malentendu : l'exactitude des mathématiques concerne le raisonnement davantage que les objets étudiés. Pendant longtemps certes, les cercles, triangles et droites parallèles de la géométrie classique, parangons d'exactitude abstraite, servaient d'emblèmes à toutes les mathématiques, et cette image est encore vivace dans la perception commune. En réalité, les choses ont évolué, et il y a longtemps que les mathématiciens s'intéressent aussi à des objets moins désincarnés. La théorie des probabilités, par exemple, aujourd'hui un pilier des mathématiques, est née de l'étude des jeux de dés et sert à quantifier l'incertitude dans de nombreux domaines, qui vont de l'analyse de données au calcul de haute précision. Les mathématiques appliquées concernent des objets on ne peut plus concrets : files d'attente à un standard téléphonique, transmission de données bancaires, biomécanique, imagerie numérique, etc. Pour être en mesure de raisonner mathématiquement sur de tels objets, on effectue une modélisation, c'est-à-dire que l'on produit un concept abstrait qui rend compte aussi bien que possible de l'objet à étudier, concept à partir duquel il est possible d'appliquer les règles de la logique. Ces règles, si elles sont utilisées comme il convient, permettent de tirer des conclusions qui, tout en étant mathématiquement exactes, ne sont pas aussi définitives que le théorème de

Pythagore. Un cas typique est celui des intervalles de confiance pour un sondage : une fois triés les résultats d'une enquête et connues les conditions de sa réalisation, le mathématicien dira par exemple qu'il y a 95 % de chances pour que le score de tel candidat à telle élection se situe entre 35 et 37 %. Il s'agit bien d'une affirmation exacte, qui n'en porte pas moins sur une situation d'incertitude.

On doit à Aristote, au IVe siècle avant notre ère, d'avoir érigé la logique au rang de discipline. L'emblème de la logique aristotélicienne est la notion de syllogisme qui, selon le philosophe grec, « est un discours dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le fait de ces données » (*Premiers analytiques*). L'exemple le plus fameux de syllogisme est le suivant : tout homme est mortel, Socrate est un homme, donc Socrate est mortel (en réalité, cet exemple n'est pas le meilleur que l'on puisse imaginer, car « Socrate » est un objet particulier alors qu'un syllogisme a plutôt pour vocation de traiter d'objets généraux). Selon Aristote, le raisonnement par syllogismes devait permettre d'éviter toute erreur de raisonnement dans une démonstration et, donc, constituer une voie efficace dans la recherche de la vérité. Très utilisé à l'époque médiévale par les penseurs scolastiques, le raisonnement par syllogisme sera critiqué à l'époque moderne pour son caractère alambiqué, qui donnait un vernis de rigueur mais n'empêchait nullement les erreurs.

À l'origine plutôt affaire de philosophes, l'étude de la logique en tant que telle est devenue un sujet principalement mathématique au XXe siècle, notamment sous l'impulsion de Kurt Gödel. Cette partie des mathématiques, qui est toujours un domaine de recherche actif, notamment en raison de son utilité en informatique, ne doit pas être confondue avec les quelques règles de logique courante qui président au travail mathématique ordinaire. L'extraordinaire puissance de ces quelques règles, avec lesquelles se construit l'essentiel de l'édifice mathématique, ne doit pas masquer le fait que ses principes fondateurs sont somme toute assez banals. Ces règles n'ont rien de bien mystérieux, et tiennent facilement sur quelques lignes. « La logique concerne le monde réel, exactement comme la zoologie, même si les êtres logiques sont plus généraux et plus abstraits » expliquait Bertrand Russell. C'est si vrai que, dans les programmes d'enseignement des mathématiques, la partie réservée à l'apprentissage de la logique mathématique proprement dite est, pour ainsi dire, inexistante, et l'expérience montre que l'y insérer n'est que rarement d'une grande utilité.

Un peu de logique élémentaire

La logique permet d'opérer sur des énoncés appelés « assertions », comme : « ABC est un triangle rectangle », « x est un nombre plus grand que 7 », etc.

Une assertion A étant posée, la **négation** de A est notée non(A) (le « contraire de A », en langage courant). Le **principe du tiers exclu** pose que, quelle que soit l'assertion A, soit A est vraie, soit non(A) est vraie (et les deux ne peuvent jamais être vraies simultanément).

Considérons deux assertions, A et B. On dit que A **implique** B si, à chaque fois que A est vraie, B l'est aussi. Par exemple, « x est un nombre plus grand que 7 » implique « x est un nombre plus grand que 2 ». On note : A => B (les logiciens notent plutôt A –> B). L'implication est une relation **transitive**, c'est-à-dire que si A => B et que B => C, alors A => C.

Lorsque A implique B et que B implique A, les deux assertions sont dites **équivalentes**, ce que l'on note A <=> B. Le théorème de Pythagore, par exemple, énonce l'équivalence entre les assertions « ABC est un triangle rectangle en A » et « $AB^2+AC^2 = BC^2$ ».

Le principe du tiers exclu permet de montrer que A => B est équivalent à non(B) => non(A) : c'est la **contraposition**, qui indique qu'une démarche pour démontrer que A implique B consiste à supposer non(B) vraie, et à en déduire que non(A) est vraie.

Enfin, le **raisonnement par l'absurde** consiste, pour démontrer qu'une assertion est vraie, à supposer qu'elle est fausse et à en tirer des conséquences jusqu'à déboucher sur quelque chose de contradictoire.

Pour aller plus loin

Albrecht Beutelspacher, *Pourquoi j'ai toujours été nul(le) en maths*, Belin, 2007. Quelques réflexions d'un mathématicien sur sa discipline, plus ou moins accessibles au profane.

Jean-Paul Collette, *Histoire des mathématiques*, Renouveau pédagogique, 1979. Un traité classique et accessible, qui donne en deux volumes un panorama de l'histoire de la discipline, des origines au début du XXe siècle.

Amy Dahan-Dalmedico, *Jacques-Louis Lions, un mathématicien d'exception*, La Découverte, 2005. Une très belle biographie de ce mathématicien français de premier plan, qui favorisa l'émergence des mathématiques appliquées dans la seconde moitié du XXe siècle.

Apostolos Doxiadis, *Oncle Petros et la conjecture de Goldbach*, Christian Bourgois, 2000. Un roman sur la vie d'un mathématicien imaginaire du XXe siècle, à la fois très vivant et bien écrit – qualités rares dans le domaine.

Responsable éditorial : Marie-Laurence Dubray.
Remerciements de l'Éditeur à : Hélène Latreille, Lara Ohana, Cécile Tresfels.
Imprimé en France en février 2008 sur les presses de l'imprimerie
Darantière à Quetigny.

ISBN 978-2-84670-196-9 / Dépôt légal : mars 2008.