

Maïtine Bergounioux

Mathématiques pour le traitement du signal

Cours et exercices corrigés

2^e édition

SMAI'

DUNOD

La série « Mathématiques pour le Master/SMAI » propose une nouvelle génération de livres adaptés aux étudiants de Master niveau M1 et aux élèves ingénieurs. Leur adéquation au cursus LMD et aux outils de calcul modernes sont au service de la qualité scientifique.

La SMAI (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles) assure la direction éditoriale grâce à un comité renouvelé périodiquement et largement représentatif des différents thèmes des mathématiques appliquées et de leur évolution : analyse numérique, probabilités appliquées, statistique, optimisation, systèmes dynamiques et commande, traitement d'images et du signal, finance, recherche opérationnelle, etc. Son ambition est de constituer un ensemble d'ouvrages de référence.

Les auteurs et l'éditeur ne pourront être tenus responsables des éventuels problèmes liés à l'utilisation des informations présentes dans ce livre.

Illustration de couverture : © Digitalvision

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2010, 2014

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-071042-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Avant-propos

Ce cours est issu d'un enseignement donné au sein du MASTER de Mathématiques d'Orléans et s'adresse à des mathématiciens désireux de connaître les techniques de base de traitement du signal. *A contrario*, il peut aussi intéresser des spécialistes de traitement du signal qui souhaitent avoir un point de vue mathématique sur les outils qu'ils utilisent fréquemment. Cet ouvrage se veut donc une introduction à la discipline plus qu'un ouvrage pointu destiné à des spécialistes du domaine. Pour le lecteur qui souhaite en savoir davantage nous renvoyons à la bibliographie qui permet d'approfondir les différents sujets. Nous avons souhaité donner de nombreuses applications tout au long de l'ouvrage et proposons comme tout livre de « cours » qui se respecte quelques exercices ou sujets de travaux pratiques. Nous nous sommes volontairement placés dans un cadre unidimensionnel : les différents concepts (notion de fréquence, transformation de Fourier, transformation en ondelettes, etc.) sont génériques et plus faciles à présenter dans ce contexte. Le cas des signaux bi-dimensionnels que sont les images sera abordé dans [3] : les techniques contenues dans le présent livre y seront adaptées et d'autres méthodes, plus spécifiques au traitement d'image, largement développées. Le signal unidimensionnel le plus accessible par excellence étant le signal sonore, nous avons consacré un court chapitre à l'analyse vocale (ou traitement de la parole), là aussi sous forme d'introduction. Pour le traitement du son musical nous renvoyons à l'ouvrage de P. Guillaume [10] qui fourmille d'exemples en liaison directe avec la musique.

Nous avons choisi de ne parler que de techniques déterministes en laissant de côté les méthodes stochastiques, faute de place et de compétences. Toutefois, le point de vue probabiliste est très utile en signal et très présent dans la manière dont les ingénieurs présentent leurs résultats. Il est aussi fondamental dans la théorie du codage et de l'information (au sens de Shannon) qui n'est pas abordée dans cet ouvrage. Nous renvoyons à [13] chapitre 5, [14] chapitre 10, [16] partie 2 ou [1] Tome 1, chapitres 4 et 5 pour une présentation « stochastique » du traitement du signal.

Une partie des informations, exemples, illustrations contenus dans ce livre a été récoltée au fil de mes investigations sur Internet. Je remercie tous les anonymes (et WIKIPEDIA !) qui ont contribué de fait à enrichir cet ouvrage.

Cette nouvelle édition propose de nouveaux exercices et corrige quelques coquilles. Un chapitre a été ajouté à la première édition : il s'agit d'une ouverture vers

le traitement du signal 2D, c'est-à-dire le traitement d'image. Les outils exposés pour le traitement du signal 1D sont fondamentaux dès qu'on s'intéresse au cas bidimensionnel. Nous donnons en quelques pages des pistes pour la généralisation de ces outils.

Orléans, le 18 mars 2014.

Table des matières

1	Introduction	11
2	Analyse spectrale des signaux unidimensionnels	17
2.1	Signaux analogiques périodiques	17
2.1.1	Les séries de Fourier	17
2.1.2	Représentation ponctuelle d'une série de Fourier	24
2.1.3	Exemples et terminologie	27
2.2	La transformation de Fourier discrète (DFT) et la FFT	32
2.2.1	Calcul des coefficients de Fourier	32
2.2.2	Propriétés de la transformée de Fourier discrète	35
2.2.3	L'algorithme de FFT	38
2.2.4	Utilisation de la FFT sous SCILAB [©] ou MATLAB [©]	42
2.3	La transformation de Fourier	43
2.3.1	Propriétés de la transformation de Fourier	45
2.3.2	Théorème d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	52
2.4	L'espace de Schwartz	56
2.4.1	Les fonctions à décroissance rapide	56
2.4.2	L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	57
2.4.3	Transformation de Fourier inverse sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	59
2.5	Transformation de Fourier-Plancherel	60
2.5.1	Extension à $L^2(\mathbb{R})$	60
2.5.2	Coefficient de Fourier versus Transformation de Fourier	63
2.5.3	Application : calcul de transformées de Fourier usuelles	63
2.6	La transformation de Laplace	65
2.7	Exercices	67
2.8	Travaux pratiques	72
2.9	Solutions	75
3	Analyse corrélative des signaux	81
3.1	Relations statistiques entre plusieurs variables	81
3.1.1	Notations-Abréviations	81

3.1.2	Matrice des covariances	82
3.1.3	Analyse en composantes principales (ACP)	83
3.2	Fonctions de corrélation de signaux	83
3.2.1	Définitions	83
3.2.2	Quelques propriétés des fonctions de corrélation des signaux analogiques	86
3.2.3	Densité spectrale de puissance	89
3.2.4	Cas des signaux numériques	90
3.2.5	Exemples	90
3.3	Détection de signaux périodiques	92
3.3.1	Détection par autocorrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit	93
3.3.2	Détection par intercorrélation d'un signal périodique noyé dans du bruit	94
3.4	Mesure de retard entre signaux aléatoires	95
3.5	Exercices	99
3.6	Travaux pratiques	102
3.7	Solutions	103
4	Filtrage	111
4.1	Systèmes	111
4.1.1	Quelques définitions	112
4.1.2	Propriétés algébriques des systèmes	113
4.2	Filtres linéaires	116
4.2.1	Filtres fondamentaux	118
4.2.2	Masse (impulsion) de Dirac	120
4.3	Filtrage analogique	123
4.3.1	Filtres dynamiques	123
4.3.2	Exemples	125
4.3.3	Filtrage et corrélation	131
4.3.4	Exemples de filtres du premier et du deuxième ordre (d'après [18])	133
4.4	Filtrage numérique	134
4.4.1	Filtrage numérique linéaire	134
4.4.2	Filtres linéaires discrets et équations aux différences	137
4.4.3	Transformation en z	139
4.4.4	Fonction de transfert	143
4.4.5	Exemples	143
4.5	Exercices	144
4.6	Travaux pratiques	150
4.7	Solutions	151

5	Échantillonnage.	163
5.1	Peigne et mesure de Dirac	163
5.1.1	Peigne de Dirac	164
5.1.2	Convolution entre une fonction et Δ_a	166
5.1.3	Transformée de Fourier de δ_a	167
5.1.4	Développement en série de Fourier du peigne de Dirac	168
5.1.5	Transformée de Fourier du peigne de Dirac	171
5.1.6	Transformée de Fourier d'un signal périodique.	172
5.2	Formule de Poisson dans $L^1(\mathbb{R})$	173
5.2.1	Application à l'étude d'un signal échantillonné	176
5.3	Théorème d'échantillonnage de Shannon	177
5.3.1	Démonstration dans le cas général.	182
5.3.2	Échantillonnage et calcul numérique du spectre - Aliasing	185
5.4	Exercices	189
5.5	Travaux pratiques.	192
5.6	Solutions	195
6	Analyse temps-fréquence	201
6.1	Introduction	201
6.2	Principe d'incertitude	203
6.2.1	Comportements temporel et spectral d'un signal	203
6.2.2	Signaux à durée finie ou à spectre borné	205
6.2.3	Troncature du signal en temps ou en fréquence.	207
6.3	Transformée de Fourier à fenêtre glissante (STFT)	207
6.3.1	Fenêtrage	207
6.3.2	Les formules de Gabor	211
6.3.3	Comparaison des méthodes de Fourier et Gabor	215
6.3.4	Méthodes d'analyse	217
6.3.5	Estimation de la densité spectrale de puissance d'un signal numérique	217
6.4	Distribution de Wigner-Ville	219
6.5	La classe de Cohen	222
6.5.1	Positivité	222
6.5.2	La classe de Cohen.	222
6.6	Exemples : chirps.	223
6.7	Exercices	226
6.8	Travaux pratiques.	227
6.9	Solutions	229

7	Analyse temps-échelle Ondelettes	235
7.1	Transformée en ondelettes	235
7.1.1	Définition des ondelettes	239
7.1.2	Ondelettes dans l'espace physique.	241
7.1.3	Transformée de Fourier des ondelettes	242
7.2	Transformée en ondelettes continue : inversion	243
7.2.1	Exemples	244
7.3	Les ondelettes orthogonales.	248
7.3.1	Problème des moments de l'ondelette	251
7.4	Analyse multi-résolution dans $L^2(\mathbb{R})$	252
7.5	Algorithme rapide de décomposition en ondelettes.	256
7.6	Filtrage par ondelettes	260
7.7	Exercices	261
7.8	Travaux pratiques.	263
7.9	Solutions	265
8	Introduction à l'analyse vocale	269
8.1	Caractéristiques physiques et perceptives des sons	269
8.1.1	Sons périodiques simples : hauteur, intensité	269
8.1.2	Sons périodiques complexes : hauteur, intensité, timbre	271
8.1.3	Sons apériodiques	272
8.1.4	Résumé des qualités d'un son	273
8.2	Reconnaissance des sons voisés	275
8.2.1	Sons voisés, non voisés, pitch	275
8.2.2	Spectrogramme de parole	276
8.2.3	Analyse LPC - Prédiction linéaire	281
8.3	Exemple	282
8.3.1	Reconnaissance automatique d'un son voisé par corrélation	282
8.3.2	Les formants	283
8.4	Exercices	284
8.5	Travaux pratiques (chapitre 8 et synthèse)	286
8.6	Solutions	290
9	Vers le traitement des images	291
9.1	Image analogique/ image numérique	291
9.2	Échantillonnage et quantification.	292
9.3	La transformation de Fourier 2D : outil de filtrage	293
9.4	Corrélation d'images numériques	295
9.4.1	Application à la reconnaissance d'empreintes digitales	296
9.4.2	Application à l'analyse de la texture d'une image.	299

A	Espaces de Hilbert	.301
A.1	Quelques rappels d'intégration et d'analyse fonctionnelle	301
A.1.1	Théorèmes fondamentaux	301
A.1.2	Résultats d'analyse fonctionnelle	302
A.2	Espaces de Hilbert - Généralités	304
A.2.1	Produit hermitien	304
A.2.2	Un exemple fondamental : l'espace $L^2(0, a)$.	305
A.3	Orthogonalité	306
A.4	Projection sur un convexe fermé	307
A.5	Systèmes orthogonaux, bases hilbertiennes.	308
	Index.	.313
	Bibliographie	.318

Chapitre 1

Introduction

L'utilisation de mathématiques de haut niveau en traitement du signal et pour l'apprentissage est une tendance nouvelle rendue nécessaire par la quantité et la complexité croissantes d'informations aujourd'hui disponibles, qui engendrent un besoin d'automatisation des méthodes d'analyse, de traitement de l'information et de la prise de décisions.

Les applications les plus classiques concernent l'analyse et la transformation d'informations sonores et d'images, mais des problèmes similaires sont posés par d'autres signaux tels que des enregistrements de séquences d'ADN, des séries financières ou des données atmosphériques.

L'information ainsi traitée peut ensuite servir à la réalisation d'une tâche qu'il s'agit d'optimiser.¹

La notion de signal fait intervenir la notion d'observation de phénomène. Elle fait intervenir des quantités dépendantes du temps, de l'espace ou de la fréquence. Pour étudier ces quantités on a une modélisation sous forme de fonction d'une variable. Les signaux sont des objets qui peuvent être

- unidimensionnels (1D) : c'est le cas de tous les phénomènes ondulatoires, dont l'exemple le plus connu est le son. La variable est alors le temps t . L'étude des signaux 1D fait l'objet du présent cours.
- bidimensionnels (2D) : il s'agit dans ce cas d'images. La variable est une variable d'espace représentant les deux coordonnées (x, y) d'un point du plan de l'image. L'étude de ces signaux, plus connue sous le nom de Traitement d'Image n'est pas (ou peu) abordée dans ce volume.
- tridimensionnels (3D) : il peut s'agir, soit d'images 3D (dans l'espace) dont la reconstruction et la description se font par exemple à partir de projections stéréographiques ou tomographiques, soit d'une séquence d'images 2D dans le temps (vidéo). Dans le premier cas, la variable est une variable d'espace représentant les trois coordonnées d'un point (x, y, z) de l'image. Dans le second cas il s'agit des deux coordonnées (x, y) dans le plan et du temps t .

1. D'après S. Mallat : <http://www.cmap.polytechnique.fr/spip.php?article8>

- quadridimensionnels (4D) : c'est le cas, par exemple, d'images 3D (volumes) évoluant dans le temps.

Dans cet ouvrage nous allons nous concentrer sur l'étude des signaux 1D. Les méthodes décrites relèvent de ce qui est communément appelé le « traitement du signal ». Nous donnons quelques exemples pour commencer.

1. Le son est le signal (1D) le plus connu. Les applications du traitement du son sont nombreuses. On peut citer, par exemple, la synthèse et l'analyse vocale, la musique numérique (standard MP3, instruments numériques)

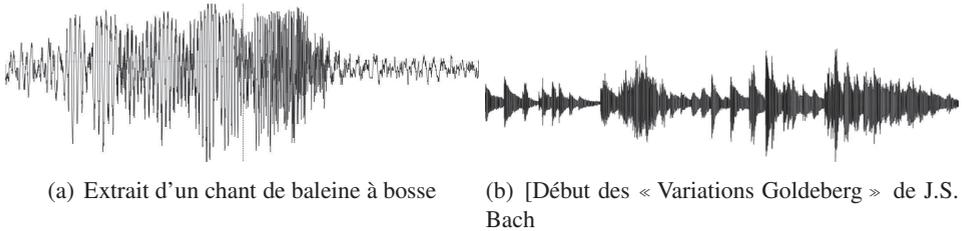


FIGURE 1.1 – Exemples de sons (représentation temporelle)

2. Signaux « environnementaux »

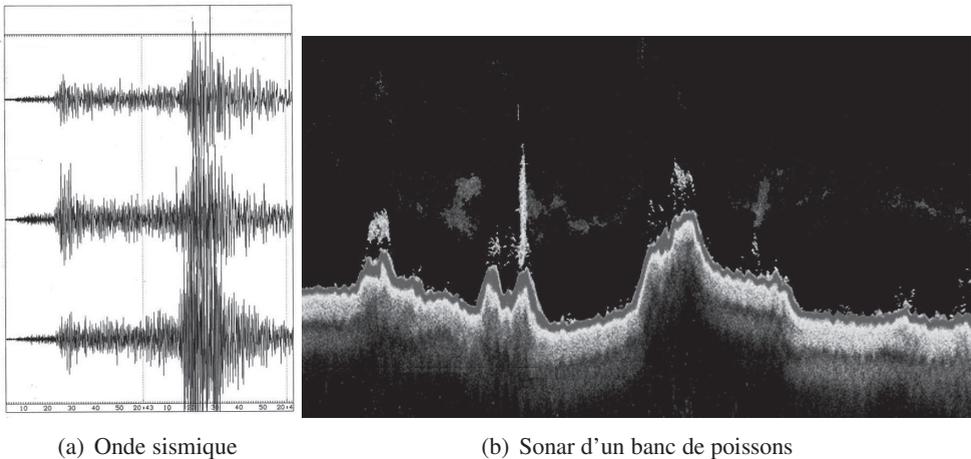


FIGURE 1.2 – Signaux environnementaux

3. Signaux électriques : ces signaux sont particulièrement intéressants en médecine (électrocardiogramme- électroencéphalogramme).



FIGURE 1.3 – Électrocardiogramme (ECG)

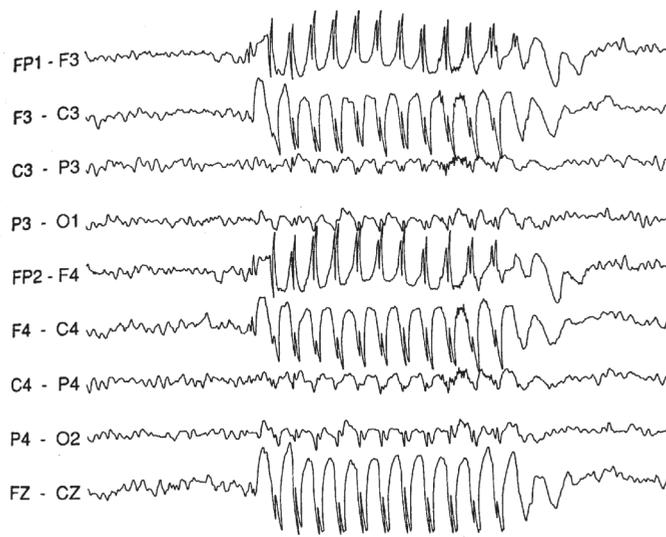


FIGURE 1.4 – Électro-encéphalogramme (EEG)

Un signal peut être modélisé de façon déterministe ou aléatoire. Lorsque la fonction $t \mapsto x(t)$ est continue le signal est analogique. Si la variable est discrète, le signal est discret. Souvent un signal discret est le résultat de la discrétisation d'un signal analogique. On parle alors d'**échantillonnage**.

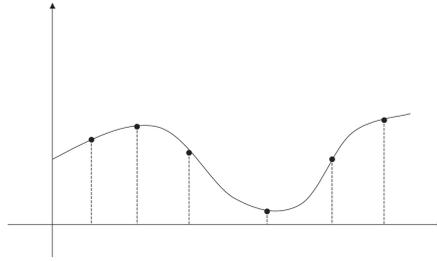


FIGURE 1.5 – Signal échantillonné

Quand on discrétise un signal en vue d'un traitement numérique, on fait aussi une **quantification** (stockage sur ordinateur). Un signal discret quantifié est un signal numérique.

Exemples de signaux « théoriques »

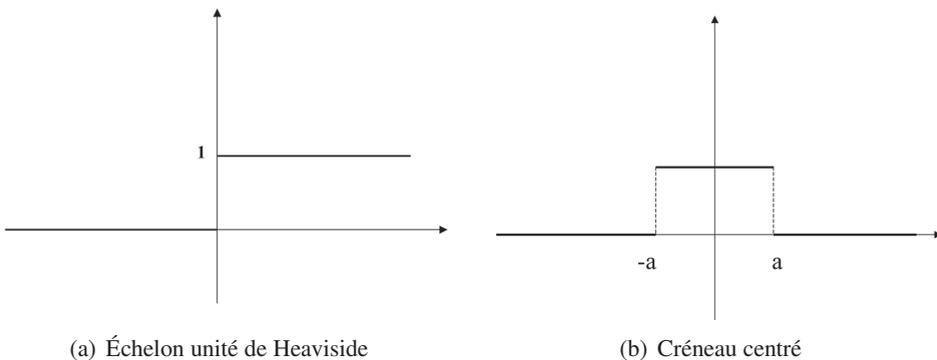
– *Echelon unité de Heaviside* : La fonction est donnée par

$$t \mapsto u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ce signal modélise l'établissement instantané d'un régime constant.

– *Signal rectange ou créneau centré* : La fonction est donnée par

$$t \mapsto v(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < a, \\ 0 & \text{si } |t| \geq a. \end{cases} \quad (1.2)$$



(a) Échelon unité de Heaviside

(b) Créneau centré

FIGURE 1.6 – Exemples de signaux « théoriques »

– *Signal sinusoïdal ou monochromatique* : le signal est représenté par la fonction

$$t \mapsto x(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est l'amplitude du signal, $\omega \in \mathbb{R}$ est la pulsation et $\varphi \in [0, 2\pi]$ la phase initiale. On appelle $a = \frac{2\pi}{\omega}$ la **période** et $\lambda = \frac{1}{a} = \frac{\omega}{2\pi}$ la **fréquence**.

On peut donc écrire que $x(t) = \alpha \cos(2\pi \lambda t + \varphi)$. On étudiera en général le signal

$$z(t) = \alpha \exp(2i\pi \lambda t + i\varphi) = c \exp(2i\pi \lambda t)$$

où $c = \alpha \exp(i\varphi) \in \mathbb{C}$. On a donc $c = \operatorname{Re}(z(t))$ (où $\operatorname{Re}(z)$ désigne la partie réelle du complexe z).

Le traitement du signal repose essentiellement sur l'utilisation d'opérateurs linéaires qui modifient les propriétés d'un signal de façon homogène dans le temps. Les transformées de Fourier et de Laplace qui diagonalisent des opérateurs sont les principaux outils d'analyse mathématique.

On étudie un signal de deux points de vue :

- le point de vue temporel (ou spatial s'il s'agit d'une image) : étude du signal dans le temps, tel qu'il est enregistré ou dans l'espace physique (pour une image par exemple) ;
- le point de vue fréquentiel : on extrait du signal des informations « cachées » mais qui sont caractéristiques de chaque signal. Les outils mathématiques sont essentiellement la transformation de Fourier et la transformation de Laplace (et leurs analogues « discrets », la transformation de Fourier discrète (ou DFT) et la transformation en z).

Le traitement du signal (analogique ou numérique) consiste :

- à étudier le signal, l'analyser, en extraire les informations pertinentes,
- à modifier le signal (pour enlever les parasites d'un son, accentuer les basses d'un morceau de musique ou éclaircir une image par exemple),
- à synthétiser/reproduire des signaux nouveaux (« voix de synthèse »).

Sans prétendre à l'exhaustivité, nous allons présenter les principaux d'analyse et de traitement des signaux, au premier rang desquels les outils d'analyse spectrale qui font l'objet du chapitre 2. Le chapitre 3 présente des techniques élémentaires de traitement des signaux aléatoires. Le chapitre 4 présente des outils de filtrage (analogique et numérique) : le filtrage est une étape fondamentale et incontournable dans tout traitement de signal. Le chapitre 5 est consacré à l'échantillonnage, à savoir le passage d'un signal analogique (« continu ») à un signal numérique (discret). Nous y présentons le célèbre théorème d'échantillonnage de Shannon ainsi que les difficultés posées par le mauvais choix d'une fréquence d'échantillonnage (aliasing). Le chapitre 6 est consacré à l'analyse temps-fréquence d'un signal, avec la transformation de Gabor et la STFT² qui conduisent à la notion de spectrogramme. Tout naturellement, le chapitre 7 présente une alternative, complémentaire à l'analyse temps-

2. Short Time Fourier Transform ou Transformée de Fourier à fenêtre glissante

fréquence, qui est l'analyse temps-échelle avec l'introduction des ondelettes et de l'analyse multi-résolution. Nous terminerons par une application à l'analyse vocale (chapitre 8) et un chapitre d'introduction au traitement des images (chapitre 9).

Chapitre 2

Analyse spectrale des signaux unidimensionnels

2.1 Signaux analogiques périodiques

Un signal sinusoïdal « pur » $t \mapsto \sin(2\pi\lambda t)$ a une signification « physique » : cela correspond à une onde qui se propage. On va montrer dans ce qui suit que tout signal périodique d'énergie finie (ce que nous allons préciser) est la superposition d'un nombre infini d'ondes.

2.1.1 Les séries de Fourier

On considère dans ce qui suit des signaux périodiques de période $a > 0$ et d'énergie finie. L'espace de ces signaux est

$$L_p^2(0, a) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ de période } a, \int_0^a |f|^2(t) dt < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire (hermitien)

$$(f, g) := \int_0^a f(t)\bar{g}(t) dt ,$$

où $|z|$ désigne le module du complexe z et \bar{z} son conjugué. L'énergie du signal est tout simplement sa norme dans l'espace L^2 au carré

$$E(f) := \|f\|_2^2 = \int_0^a |f|^2(t) dt .$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on désigne par \mathcal{T}_N l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_k)_{-N \leq k \leq N}$ avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ e_n : t \mapsto \exp(2i\pi n \frac{t}{a}) . \end{array} \right. \quad (2.1)$$

On vérifie facilement que cette famille est orthogonale et satisfait $(e_k, e_k) = a$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. De plus $\|e_k\|_\infty = 1$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, où $\|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ désigne la norme uniforme (ou dans $L^\infty(\mathbb{R})$) de la fonction f .

L'espace \mathcal{T}_N est donc l'espace des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N . C'est un sous-espace de $L^2_p(0, a)$ de dimension finie (donc fermé). Nous avons un résultat d'approximation qui est un cas particulier du théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert (voir Annexe 1, Théorème A.4.1) mais que nous allons démontrer directement.

Théorème 2.1.1 *Soit $f \in L^2_p(0, a)$. Il existe un unique polynôme $f_N \in \mathcal{T}_N$ (appelé polynôme de meilleure approximation de f dans \mathcal{T}_N) projeté de f sur \mathcal{T}_N qui réalise le minimum de*

$$\min_{P \in \mathcal{T}_N} \|f - P\|_2.$$

De plus il s'écrit sous la forme

$$f_N = \sum_{k=-N}^{k=N} c_k(f) e_k,$$

où

$$\forall N, \forall k \in \{-N, \dots, N\} \quad c_k(f) = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) \exp(-2i\pi k \frac{t}{a}) dt. \quad (2.2)$$

Démonstration.- Soit $f \in L^2_p(0, a)$. Un polynôme trigonométrique peut toujours s'écrire sous la forme $P = \sum_{k=-N}^{k=N} x_k e_k$ (quitte à compléter par des coefficients nuls) où $x_k \in \mathbb{C}$ pour tout k . Calculons donc

$$\|f - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|P\|_2^2 - 2 \operatorname{Re}(f, P).$$

Comme la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthogonale on a

$$\|P\|_2^2 = \sum_{k=-N}^{k=N} |x_k|^2 a.$$

D'autre part

$$(f, P) = \sum_{k=-N}^{k=N} \bar{x}_k (f, e_k);$$

si on pose

$$\forall k \in \{-N, \dots, N\} \quad c_k(f) = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)} = \frac{1}{a} (f, e_k),$$

il vient

$$\|f - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 + a \sum_{k=-N}^{k=N} (|c_k(f) - x_k|^2 - |c_k(f)|^2). \quad (2.3)$$

Il est donc clair que le minimum est atteint lorsque $x_k = c_k(f)$ et pour cette valeur seulement. \square

Définition 2.1.1 (Coefficient et série de Fourier) Les coefficients $c_k(f)$ sont les coefficients de Fourier de f .

La série $\sum c_k(f) e_k$ est la série de Fourier de f .

La première question qui se pose est bien sûr la convergence de la série de Fourier d'une fonction f de $L_p^2(0, a)$. Nous allons répondre à cette question par le théorème 2.1.4. Donnons tout d'abord quelques propriétés des coefficients de Fourier.

Théorème 2.1.2 Soit $f \in L_p^2(0, a)$ à valeurs réelles et $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier.

1. L'application $f \mapsto (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ est linéaire.
2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_{-k} = \overline{c_k}$ et donc particulier $|c_{-k}| = |c_k|$.
3. Si f est paire, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, c_k est réel.
4. Si f est impaire, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, c_k est imaginaire pur.

Démonstration. - La propriété 1 est immédiate. Montrons la propriété 2 : Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $f \in L_p^2(0, a)$ à valeurs réelles.

$$c_{-k}(f) = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) \exp(2i\pi k \frac{t}{a}) dt = \overline{\frac{1}{a} \int_0^a f(t) \exp(-2i\pi k \frac{t}{a}) dt} = \overline{c_k}.$$

Les autres propriétés se démontrent de manière similaire. \square

Théorème 2.1.3 (Inégalité de Bessel) Sous les hypothèses et notations précédentes, on a

$$\sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(t)|^2 dt.$$

Démonstration. - Lorsque $x_k = c_k(f)$ pour $k \in \{-N, \dots, N\}$, la relation (2.3) s'écrit

$$\|f - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 - a \sum_{k=-N}^{k=N} |c_k(f)|^2,$$

c'est-à-dire $\sum_{k=-N}^{k=N} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{a} \|f\|_2^2$, ce qui est la relation annoncée. \square

En passant à la limite dans cette inégalité lorsque $N \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(t)|^2 dt. \quad (2.4)$$

En réalité, on a le résultat précis suivant :

Théorème 2.1.4 Si $f \in L_p^2(0, a)$ et si f_N est le polynôme de meilleure approximation de f dans \mathcal{T}_N c'est-à-dire $f_N = \sum_{k=-N}^N c_k e_k$, alors

$$f_N = \sum_{k=-N}^N c_k e_k, \text{ alors}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - f_N\|_2^2 = 0,$$

c'est-à-dire que la suite f_N converge vers f dans $L_p^2(0, a)$.

Démonstration. - Nous avons vu que

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_2^2 &= \int_0^a |f(t)|^2 dt - a \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \\ &= \int_0^a |f(t)|^2 dt - \|f_N\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|f_N\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Grâce à l'inégalité de Bessel, la quantité $\|f_N\|_2^2 = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2$ est bornée et on peut

donc en extraire une sous-suite convergente : $(f_{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f - f_{N_k}\|_2^2$ existe mais il n'est pas évident que cette limite soit nulle.

Nous allons donc montrer que cette limite (et donc toute valeur d'adhérence) est nécessairement nulle. Comme la preuve s'applique à toute sous-suite de $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$, cela montrera en même temps que toute la suite converge. Dans ce qui suit, on notera donc la suite extraite f_{N_k} de la même façon que la suite elle-même f_N pour alléger la présentation.

Commençons par montrer le résultat pour une fonction f de classe \mathcal{C}^1 . Dans ce cas la fonction

$$x \mapsto \varphi(x) = \int_0^a f(x+t) \bar{f}(t) dt$$

est périodique de période a et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (intégrale dépendant d'un paramètre). De plus, les coefficients de Fourier γ_n de φ sont donnés par $\gamma_n = a|c_n|^2$. En effet

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{a} \int_0^a \varphi(x) \exp(-2i\pi \frac{n}{a} x) dx = \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^a f(x+t) \bar{f}(t) \exp(-2i\pi \frac{n}{a} x) dt dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^a f(x+t) \exp(-2i\pi \frac{n}{a} (x+t)) \bar{f}(t) \exp(2i\pi \frac{n}{a} t) dt dx \\ &= \frac{1}{a} \int_0^a f(s) \exp(-2i\pi \frac{n}{a} s) \left[\int_0^a \bar{f}(t) \exp(2i\pi \frac{n}{a} t) dt \right] ds \text{ (avec } s = x+t) \\ &= a c_n \bar{c}_n = a |c_n|^2. \end{aligned}$$

La série de Fourier de φ est donc normalement convergente et donc uniformément convergente vers une fonction ψ , périodique et continue sur \mathbb{R} . En effet

$$\left\| \sum_n \gamma_n e_n \right\|_\infty \leq \sum_n |\gamma_n| \leq a \sum_n |c_n|^2 < +\infty.$$

On montre de la même manière que la série dérivée est uniformément continue. Une intégration par parties donne : $c_n(\varphi') = 2i\pi n \gamma_n$, et avec l'inégalité de Bessel on obtient

$$\left\| \sum_n c_n(\varphi') e_n \right\|_2 = 2\pi \left\| \sum_n n \gamma_n e_n \right\|_2 \leq \frac{1}{a} \|\varphi'\|_2 < +\infty.$$

La série $\sum_n \gamma_n e'_n = 2i\pi \sum_n n \gamma_n e_n$ est uniformément convergente. Par conséquent la série de Fourier de φ converge vers une fonction ψ , périodique et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Les fonctions ψ et φ sont \mathcal{C}^1 et ont les mêmes coefficients de Fourier. En effet

$$c_n(\psi) = \frac{1}{a} \int_0^a \psi(t) \bar{e}_n(t) dt = \frac{1}{a} \int_0^a \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k e_k(t) \right) \bar{e}_n(t) dt.$$

Comme la série est uniformément convergente on peut intervertir l'intégrale et la somme :

$$c_n(\psi) = \frac{1}{a} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^a \gamma_k e_k(t) \bar{e}_n(t) dt \right) = \frac{1}{a} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k (e_k, e_n) \right) = \gamma_n = c_n(\varphi).$$

On admet pour l'instant le résultat suivant (corollaire 2.1.3 du théorème de Dirichlet), que nous démontrerons dans la section suivante :

Si φ et ψ sont \mathcal{C}^1 et périodiques sur \mathbb{R} , alors

$$\varphi = \psi \iff \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(\varphi) = c_n(\psi).$$

Par conséquent $\psi(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut résumer en disant que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n \exp(2i\pi \frac{n}{a} x) = \varphi(x) = \int_0^a f(x+t) \bar{f}(t) dt.$$

Prenons alors $x = 0$: on obtient

$$\int_0^a |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2.$$

Si on reporte cette égalité dans (2.5) on obtient alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^a |f(t) - f_N(t)|^2 dt = 0.$$

Le théorème est donc démontré pour toute fonction \mathcal{C}^1 . On conclut en utilisant la densité de l'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(0, a)$ des fonctions continues à support compact dans $L_p^2(0, a)$. Plus précisément, soit $f \in L_p^2(0, a)$. Par densité, on peut trouver une suite $g_k \in \mathcal{C}_c^\infty(0, a) \cap L_p^2(0, a)$, telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f - g_k\|_2 = 0$.

D'autre part, si on note $c_n(f)$ le n^{e} coefficient de Fourier de f on a

$$c_n(f - g_k) = c_n(f) - c_n(g_k)$$

et d'après l'inégalité de Bessel

$$a \sum_{n=-N}^N |c_n(f - g_k)|^2 \leq \|f - g_k\|_2^2.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_2 &\leq \|f - g_k\|_2 + \|g_k - \sum_{n=-N}^N c_n(g_k)e_k\|_2 + \left\| \sum_{n=-N}^N (c_n(g_k) - c_n(f))e_k \right\|_2, \\ &\leq \|f - g_k\|_2 + \|g_k - \sum_{n=-N}^N c_n(g_k)e_k\|_2 + \|f - g_k\|_2. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver k_o tel que $\forall k \geq k_o$, $\|f - g_k\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$ grâce à la densité.

Pour k fixé ($\geq k_o$), on peut trouver $N(k)$ tel que

$$\|g_k - \sum_{n=-N}^N c_n(g_k)e_k\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

car le théorème est vrai pour les fonctions \mathcal{C}^1 . Finalement $\|f - f_N\|_2 \leq \varepsilon$. □

La série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k$ converge normalement, donc elle converge presque partout vers f . On notera

$$f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e_k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{-N}^N c_k e_k,$$

la convergence étant prise au sens de la norme de $L_p^2(0, a)$.

Corollaire 2.1.1 (Égalité de Parseval) *Sous les hypothèses précédentes*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{a} \int_0^a |f(t)|^2 dt.$$

L'énergie d'un signal périodique est la somme des énergies de ses harmoniques.

Remarque 2.1.1 *On sait que $\|f - f_N\| \rightarrow 0 \implies \|f_N\| \rightarrow \|f\|$ car $\| \|f_N\| - \|f\| \| \leq \|f - f_N\|$. En revanche, la réciproque est fautive.*

Nous avons obtenu une « décomposition » des fonctions de $L_p^2(0, a)$ en série trigonométrique : la question se pose de savoir maintenant si cette décomposition est unique.

Théorème 2.1.5 (Unicité des coefficients de Fourier)

Soient f et g dans $L_p^2(0, a)$.

$$f = g \text{ presque partout} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k(f) = c_k(g).$$

Démonstration. - Il est clair que si $f = g$ presque partout leurs coefficients de Fourier sont égaux. Montrons la réciproque : par linéarité, on se ramène à démontrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k(f) = 0 \implies f = 0 \text{ presque partout}.$$

D'après l'égalité de Parseval, nous savons que

$$\int_0^a |f(t)|^2 dt = a \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N |c_k|^2.$$

Donc $\int_0^a |f(t)|^2 dt = \|f\|^2 = 0$ ce qui entraîne $f = 0$ presque partout. □

Corollaire 2.1.2 *La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne¹ de $L_p^2(0, a)$.*

Remarque 2.1.2 *On a choisi $[0, a]$, $a > 0$ pour simplifier l'exposé mais tout ce qui précède fonctionne de la même manière sur un intervalle $[\tau, \tau + a]$ où $\tau \in \mathbb{R}$ car*

$$\int_{\tau}^{\tau+a} f(t) \exp(-2i\pi N \frac{t}{a}) dt = \int_0^a f(t) \exp(-2i\pi N \frac{t}{a}) dt.$$

En effet

$$\int_{\tau}^{\tau+a} f(t) \exp(-2i\pi N \frac{t}{a}) dt = \int_{\tau}^a f(t) \exp(-2i\pi N \frac{t}{a}) dt + \int_a^{\tau+a} f(t) \exp(-2i\pi N \frac{t}{a}) dt.$$

Le changement de variable $s = t - a$ dans la deuxième intégrale du terme de droite, la périodicité de f et la relation de Chasles permettent de conclure.

1. Voir Annexe 1, p 309

2.1.2 Représentation ponctuelle d'une série de Fourier

Remarquons que les coefficients de Fourier définis ci-dessus pour des fonctions de $L_p^2(0, a)$ sont également définis pour des fonctions de $L_p^1(0, a)$ où

$$L_p^1(0, a) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ périodique de période } a \text{ vérifiant } \int_0^a |f(t)| dt < +\infty\}.$$

On rappelle que l'espace des fonctions intégrables sur $[0, a]$ est

$$L^1(0, a) = \{f : [0, a] \rightarrow \mathbb{C} \text{ vérifiant } \int_0^a |f(t)| dt < +\infty\}.$$

On peut aussi définir (formellement) une série de Fourier pour $f \in L_p^1(0, a)$ par

$$S(t) := \sum_{N=-\infty}^{+\infty} c_N(f) \exp(2i\pi N \frac{t}{a}).$$

Nous avons vu que si $f \in L_p^2(0, a)$ sa série de Fourier converge dans $L_p^2(0, a)$ vers f . La question se pose de savoir si on peut étendre ce résultat aux fonctions de $L_p^1(0, a)$. La réponse est (partiellement) donnée par les théorèmes suivants.

Théorème 2.1.6 (Riemann - Lebesgue)

Soit (a, b) un intervalle borné de \mathbb{R} et $f \in L^1(a, b)$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \exp(2i\pi nx) dx = 0.$$

Démonstration. - Supposons tout d'abord que f est C^1 . On note

$$I_n = \int_a^b f(x) \exp(2i\pi nx) dx.$$

En faisant une intégration par parties sur I_n , on trouve :

$$I_n = \frac{1}{2i\pi n} [f(x) \exp(2i\pi nx)]_a^b - \frac{1}{2i\pi n} \int_a^b f'(x) \exp(2i\pi nx) dx.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |I_n| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi n} (|f(b)| + |f(a)|) + \frac{1}{2\pi n} \int_a^b |f'(x)| dx = 0.$$

On conclut ensuite par un argument de densité. En effet, on sait que si I est un intervalle borné l'espace $C_c^\infty(I)$ est dense dans $L^1(I)$. Donc, si $f \in L_p^1(a, b)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f_\varepsilon \in C^1(a, b) \text{ telle que } \|f - f_\varepsilon\|_{L^1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a

$$I_n = \int_a^b (f(x) - f_\varepsilon(x)) \exp(2i\pi nx) dx + I_{n,\varepsilon},$$

où on a posé $I_{n,\varepsilon} = \int_a^b f_\varepsilon(x) \exp(2i\pi nx) dx$.

D'après ce qui précède $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n,\varepsilon} = 0$, donc il existe $n_o > 0$ vérifiant

$$\forall n \geq n_o \quad |I_{n,\varepsilon}| \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

finalement : $\forall n \geq n_o, |I_n| \leq \varepsilon$ ce qui permet de conclure. \square

Une conséquence de ce qui précède est le théorème suivant qui fournit un résultat de convergence ponctuelle pour les séries de Fourier. Dans ce qui suit on note $f(t_o^+)$ (resp. $f(t_o^-)$), la limite $\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t > t_o}} f(t)$ (resp. $\lim_{\substack{t \rightarrow t_o \\ t < t_o}} f(t)$).

Théorème 2.1.7 (Dirichlet) Soit $f \in L_p^1(0, a)$ et $t_o \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_o^+)$ et $f(t_o^-)$ existent et $f'(t_o^+)$ et $f'(t_o^-)$ existent. Alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=-N}^N c_k \exp(2i\pi k \frac{t_o}{a}) = \left(\frac{f(t_o^+) + f(t_o^-)}{2} \right).$$

Démonstration. - Posons

$$f_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k \exp(2i\pi k \frac{t}{a}) \text{ avec } c_k = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(s) \exp(-2i\pi k \frac{s}{a}) ds.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} f_N(t_o) &= \frac{1}{a} \sum_{k=-N}^N \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(s) \exp(-2i\pi k \frac{s}{a}) ds \right) \exp(2i\pi k \frac{t_o}{a}) \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\sum_{k=-N}^N \exp(2i\pi k \frac{t_o - s}{a}) \right) ds; \end{aligned}$$

or

$$\sum_{k=-N}^N \exp(2i\pi k \frac{t_o - t}{a}) = \exp(-2i\pi N \frac{t_o - t}{a}) \sum_{p=0}^{2N} \exp(2i\pi p \frac{t_o - t}{a})$$

en posant $p = k + N$. De plus

$$\sum_{p=0}^{2N} \exp(2i\pi p \frac{t_o - t}{a}) = \sum_{p=0}^{2N} \left(\exp(2i\pi \frac{t_o - t}{a}) \right)^p = \frac{1 - \exp(2i\pi(2N+1) \frac{t_o - t}{a})}{1 - \exp(2i\pi \frac{t_o - t}{a})}.$$