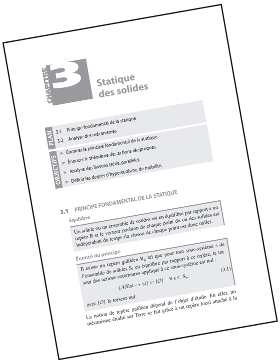
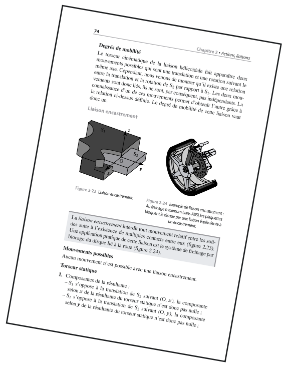
La page d'entrée de chapitre



Elle rappelle les objectifs pédagogiques du chapitre.

Le cours

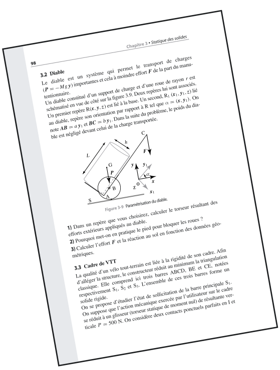
Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.



Les rubriques

Un exemple pour comprendre

Les conseils, les méthodes



Les exercices

Ils sont regroupés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

Table des matières

1 Suites et fonctions 1

1.1 Des théorèmes généraux 1
1.2 Suites itératives 7
1.3 Fonctions et équations trigonométriques 8
1.4 Fonctions trigonométriques réciproques 10
1.5 Fonctions hyperboliques 12
Exercices 16
Solutions 18

2 Formules de Taylor 29

2.1 La formule des accroissements finis 29
2.2 Le théorème de l'Hospital 31
2.3 Les formules de Taylor 32
Applications 35
Exercices 38
Solutions 40

3 Développement limité 45

3.1 Fonction négligeable devant une autre 45
3.2 Développement limité 46
3.3 Les développements limités usuels 50
3.4 Développement limité en un point *a* 53
Exercices 54
Solutions 56

4 Calcul des développements limités 63

4.1 Quelques propriétés de la notation $o(\,)$ 63
4.2 Calcul des développements limités 64
4.3 Calcul de limites 69
Exercices 72
Solutions 73

5 Étude locale d'une fonction 83

5.1 Signes d'une fonction au voisinage d'un point 83
5.2 Étude locale d'une fonction 85
5.3 Droite asymptote 89
Exercices 91
Solutions 93

6 Intégrale et primitive 101

6.1 L'intégrale 101
6.2 Primitives 103
6.3 Règles de calcul et primitives à connaître 105
Exercices 108
Solutions 110

7 Calcul d'intégrales 117

7.1 Méthodes générales 117
7.2 Méthode du changement de variable 117
7.3 Intégrale d'une fonction rationnelle 120
7.4 Intégrale de $\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+px+q}}$ et de $\sqrt{x^2+px+q}$ 124
7.5 Intégrale de $(\sin x)^p(\cos x)^q$, $p, q \in \mathbb{N}$ 125
7.6 Intégrale de fonctions rationnelles en sinus et cosinus 127
7.7 Intégrale de $e^{ax}\sin bx$ et $e^{ax}\cos bx$ 129
7.8 Intégrale de $P(x)e^{\alpha x}$ où P est un polynôme 131
Exercices 132
Solutions 135

8 Courbe paramétrée **149**

8.1 Notion de courbe paramétrée plane 149
8.2 Vecteur dérivé, tangente 151
8.3 Étude en un point singulier 155
8.4 Asymptotes 161
8.5 Plan d'étude d'une courbe paramétrée plane 164
8.6 Un exemple de courbe paramétrée dans l'espace 165
Exercices 166
Solutions 168

9 Équations différentielles **179**

9.1 Équation différentielle $y' = a(x)y$ 179
9.2 Équation $y' = a(x)y + b(x)$ 181
9.3 Équation $y'' + py' + qy = 0$ 184
9.4 Équation $y'' + py' + qy = b(x)$ 189
Exercices 193
Solutions 194

10 Exemples d'études de surfaces **203**

10.1 Les fonctions de deux variables 203
10.2 Surface d'équation $z = f(x, y)$ 204
10.3 Surface de révolution d'axe Oz 207
10.4 Dérivées partielles 209
10.5 Plans tangents à une surface 212
10.6 Extremum 214
Exercices 217
Solutions 220

Index **227**

CHAPITRE 1

Suites et fonctions

OBJECTIFS

Dans ce chapitre, nous rappelons les propriétés de la limite, des fonctions continues et des fonctions dérivables.

Nous revenons aussi sur les fonctions sinus, cosinus, tangente et nous présentons les fonctions trigonométriques réciproques. Enfin, nous introduisons et étudions les fonctions hyperboliques.

1.1 DES THÉORÈMES GÉNÉRAUX

1.1.1 Limites, fonctions continues

Définition : limite d'une suite

➤ Soit (u_n) une suite de nombres et soit ℓ un nombre réel ou complexe. On dit que *la suite* (u_n) *a pour limite* ℓ, ou que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier N tel qu'on ait l'implication

$$n \geqslant N \Longrightarrow u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]\,.$$

Cela se note $\lim u_n = \ell$.
On a l'équivalence : $\lim u_n = \ell \Longleftrightarrow \lim |u_n - \ell| = 0$.

➤ Une suite est *convergente* si elle a une limite.

Définition : limite d'une fonction, fonction continue

➤ Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Soit a un élément de D ou une borne de D. On dit que $f(x)$ *tend vers le nombre réel* ℓ *quand* x *tend vers* a, ou que *la fonction* f *a pour limite* ℓ *en* a, si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre $\alpha > 0$ tel qu'on ait l'implication

$$x \in D \text{ et } x \in [a-\alpha, a+\alpha] \Longrightarrow f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]\,.$$

Cela se note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

- On dit que f *est continue en* a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f *est continue* si pour tout $a \in D$, f est continue en a.

Propriétés des limites

- *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$, *alors*

$$\lim_{x \to a} f(x)+g(x) = \ell+\ell' \qquad et \qquad \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \ell\ell'.$$

- *Si de plus* $\ell' \neq 0$, *alors* $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = \ell/\ell'$.
- *On a les mêmes propriétés pour les limites de suites.*

Fonctions continues et limites

a) *Toute fonction polynôme est continue sur* $\mathbb{R}$.
b) *La somme et le produit de deux fonctions continues est continue.*
Si f *est continue en* a *et si* $f(a) \neq 0$, *alors la fonction* $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ *est continue en* a.
c) *Si* f *et* g *sont des fonctions continues et si la fonction composée* $g \circ f : x \mapsto g\big(f(x)\big)$ *est définie, alors* $g \circ f$ *est continue.*
d) *Soit* (u_n) *une suite et* f *une fonction telle que la suite* $\big(f(u_n)\big)$ *est définie. Si* $\lim u_n = \ell$ *et si* f *est continue en* ℓ, *alors* $\lim f(u_n) = f(\ell)$.

1.1.2 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires. *Soit* I *un intervalle et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Soit* $a, b \in I$. *Pour tout nombre* k *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *il existe au moins un nombre* c *compris entre* a *et* b *tel que* $f(c) = k$.

Le nombre c est une solution de l'équation $f(x) = k$. Pour trouver une valeur approchée de c, on peut pratiquer la « méthode du partage en deux » qui permet dailleurs de démontrer le théorème.

Méthode du partage en deux. Pratiquons-la sur un exemple en cherchant une solution de l'équation $x^3-x-1 = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3-x-1$. C'est une fonction polynôme, donc elle est continue. On a

$$f(1) = 1-1-1 = -1 < 0 \quad \text{et} \quad f(2) = 2^3-2-1 = 5 > 0$$