GESTION

Finance Quantitative

Jean-Noël DORDAIN
Niladri SINGH

ECONOMICA

024826141

Finance Quantitative

D2

2000 - 29694

0248 2614

33

Collection GESTION
SÉRIE : Politique générale, Finance et Marketing
dirigée par Yves Simon, Professeur à l'Université de Paris IX-Dauphine

Finance Quantitative

Jean-Noël DORDAIN
Niladri SINGH

GESTION

ECONOMICA
49, rue Héricart, 75015 Paris

© Ed. ECONOMICA, 1999
Tous droits de reproduction, de traduction, d'adaptation et d'exécution réservés pour tous les pays.

BnF
DEP

AVANT-PROPOS

Ces trente dernières années, la pratique financière s'est développée pour former aujourd'hui un corpus scientifique à part entière.

En 1973, Black et Scholes proposent une modélisation du risque lié aux variations du prix d'une action en termes de volatilité. Cette approche permet, en quantifiant le risque, de définir son prix et d'obtenir ainsi la célèbre formule de Black et Scholes qui donne le prix d'un call européen écrit sur une action.

En 1979, Cox, Ross et Rubinstein présentent une approche en temps discret, du risque action, cohérente avec celle de Black et Scholes. La finance quantitative est née.

La finance quantitative a pour objet de construire explicitement des algorithmes numériques permettant d'évaluer le prix et les différents paramètres de couverture de produits structurés complexes. Pour être utilisés par les professionnels de la finance, ces algorithmes doivent impérativement être intuitifs, rapides et produire des prix cohérents avec ceux observés sur les marchés.

Cet ouvrage a été pensé et conçu pour être utilisé autant par les étudiants de troisième cycle universitaire ou d'écoles d'ingénieur et de commerce souhaitant acquérir une connaissance approfondie des méthodes de la finance quantitative que par les professionnels des salles de marché.

Pour cette raison, cet ouvrage s'articule autour de deux axes : la théorie financière et la pratique financière.

Dans les cinq premiers chapitres, nous exposons les fondements de la théorie d'évaluation des actifs de marché par arbitrage puis nous présentons les différents types de modélisations des risques financiers – risque action, risque taux, risque de crédit, risque matière première.

Ces chapitres ont été rédigés de façon à être exhaustifs tout en restant concis, nous nous sommes efforcés de donner une présentation claire du sujet accessible à un public non spécialiste des mathématiques financières.

Les huit chapitres suivants sont axés autour des techniques d'ingénierie financière actuelles les plus porteuses. En nous basant sur notre expérience des marchés financiers, nous avons choisi d'exposer des méthodes générales, applicables dans la plupart des situations rencontrées en finance quantitative. Nous rappelons les caractéristiques d'une gamme étendue d'instruments financiers et montrons comment les évaluer. L'objectif de notre approche est triple :

- exposer les techniques d'élaboration de produits structurés ;

- donner pour chacun de ces produits les méthodes d'évaluation efficaces ;

- permettre à partir des exemples traités de construire les algorithmes d'évaluation d'un grand nombre de nouveaux produits financiers.

Par ailleurs, nous donnons une justification théorique de toutes les méthodes d'évaluation et de tous les résultats financiers utilisés dans cet ouvrage.

PLAN DE L'OUVRAGE

Les cinq premiers chapitres de cet ouvrage sont consacrés à l'exposition des fondements théoriques de l'ingénierie financière.

Dans le chapitre 1, nous énonçons les résultats essentiels de la théorie de l'arbitrage (existence de la probabilité risque-neutre).

Dans le chapitre 2, nous présentons les modélisations de référence du risque action :

- le modèle de Black et Scholes en temps continu ;
- le modèle de Cox, Ross et Rubinstein en temps discret.

Dans le chapitre 3, nous abordons l'étude des courbe de taux et nous étudions les modèles les plus utilisés :

- le modèle de Ho et Lee ;
- le modèle de Vasicek ;
- le modèle de Hull et White ;
- le modèle de Black, Derman et Toy.

Dans le chapitre 4, nous introduisons la notion de risque de crédit et montrons que, sous certaines hypothèses, les résultats théoriques généraux valables pour des modèles sans risque de défaut prévalent encore en présence du risque de défaut.

Dans le chapitre 5, nous envisageons la problématique plus générale de produits structurés écrits sur un risque quelconque – non nécessairement financier – que nous illustrons en envisageant le cas d'options écrites sur le cours de matières premières.

Les chapitres suivants se distinguent des premiers chapitres par leur caractère plus directement opérationnel.

Dans le chapitre 6, nous rappelons ce que sont les contrats à terme et montrons l'égalité des prix futurs et des prix forward dans le cadre de taux déterministes.

Dans le chapitre 7, nous présentons les différentes modélisations des tombées de dividendes d'une action ou d'un panier. Nous généralisons la formule de Black et Scholes au cas d'une action versant des dividendes ou à celui d'une action présentant un smile de volatilité – formule de Dupire.

Dans le chapitre 8, nous étudions des options exotique simples :
- options présentant des clauses de barrière ;
- options look-back.

Dans le chapitre 9, nous expliquons les concepts de sous-jacent synthétique et d'approximation log-normale d'un sous-jacent quelconque. Ces méthodes nous permettent d'évaluer :
- des options asiatiques ;
- des options multi-devises – compo, quanto – ;
- des options sur panier.

Le chapitre 10 est le plus mathématique de cet ouvrage. Il regroupe les différents résultats mathématiques justifiant la convergence des méthodes d'évaluation par arbre. Ce chapitre n'est néanmoins pas essentiel pour la compréhension pratique des techniques d'évaluation par arbre et peut donc être omis en première lecture.

Dans le chapitre 11, nous envisageons les différentes technique de diffusion sur des arbres ainsi que leurs applications aux cas usuels :
- sous-jacent action ;
- sous-jacent taux ;
- sous-jacents action/action ;
- sous-jacents action/taux.

Dans le chapitre 12, nous indiquons comment les techniques développées précédemment doivent être implantées numériquement pour obtenir rapidement des résultats fiables.

Dans le chapitre 13, nous étudions les obligations convertibles. Nous avons choisi de traiter en détail de l'évaluation des obligations convertibles car ces produits sont à la fois des produits structurés liquides et sophistiqués. De plus, la prise en compte de toutes les clauses d'une obligation convertible dans l'évaluation théorique fait intervenir toutes les techniques classiques d'ingénierie financière.

Chapitre 1
FONDEMENTS DE LA THÉORIE DE L'ARBITRAGE

Après avoir introduit les concepts clefs de la théorie de l'évaluation par arbitrage, nous définissons le prix d'un actif financier comme le prix d'une stratégie autofinançante le répliquant dynamiquement. A partir de l'hypothèse de marché complet et bien arbitré, nous construisons la probabilité risque-neutre dont nous nous servons tout au long de cet ouvrage pour l'évaluation et la couverture de tous les actifs financiers envisagés.

1. Les prix comme processus stochastiques

Considérons une économie où des actifs $(S_k)_{k\in K}$ peuvent être achetés ou vendus aux dates d'échanges $T_0,T_1,\ldots,T_N$. Les prix d'achat et de vente de l'actif S_k à la date T_i sont supposés égaux et nous notons $S_k\,(T_i)$ cet unique prix. Cette hypothèse exprime le fait que le marché est sans frictions : la fourchette est nulle – les prix *bid* et *ask* sont égaux –, il n'y a ni coûts d'intermédiation ni coûts de transaction. Il importe de remarquer que le prix $S_k\,(T_i)$ n'est pas connu, *a priori*, à la date initiale T_0 ; seuls les prix courants $S_k\,(T_0)$ peuvent être observés. Plus généralement, à la date T_i les seuls prix connus sont les $S_k\,(T)$ où $T \leqslant T_i$; la donnée de ces prix représente l'**information révélée** à la date T_i.

Les $S_k\,(T_i)$ apparaissent comme des fonctions définies sur l'ensemble Ω de tous les **états du monde** (c'est-à-dire de tous les historiques de cours possibles). Bien qu'on ne puisse pas prédire, *ex ante*, l'évolution des prix S_k, leurs dynamiques font en général l'objet d'hypothèses probabilistes.

Chacun des S_k peut être vu comme un **processus stochastique** – c'est-à-dire une suite de variables aléatoires indicées par les dates – défini sur l'espace Ω muni de la mesure de probabilité P liée à l'observation historique des événements et de leurs fréquences. La probabilité P porte le nom de **probabilité historique** ou de **probabilité objective**.

2. Information et marchés

D'un point de vue financier, l'information que possède un agent représente sa capacité à distinguer entre les différents états du monde. Ainsi, l'information disponible définit les limites de l'éventail des stratégies d'investissement possibles.

Le concept mathématique utilisé pour représenter l'information est celui de **tribu** – un ensemble de sous-ensembles de Ω, stable par passage au complémentaire et par intersection et union dénombrable. L'accumulation de l'information avec le passage du temps est donc représentée par une **filtration** – une famille croissante de tribus. L'information révélée à la date T_i est la tribu engendrée par la famille de variables aléatoires $(S_k(T_j))_{k\in K,\, j\leqslant i}$.

Par définition, un **marché efficient** est un marché dans lequel toute l'information financièrement pertinente est contenue dans le prix des actifs. Dans un marché efficient, toute l'information, à une date donnée, peut être résumée par la connaissance de l'état présent du monde qui ne dépend que des historiques de cours jusqu'à la date présente.

Les dynamiques futures des prix des actifs de base – actions, taux, matières premières, etc. – ne dépendent souvent que de leur valeur présente. De tels processus de prix sont dits **markoviens**. Lorsque tous les actifs de base sont markoviens, on parle d'**efficience forte**.

3. Notions générales

Un **portefeuille** $\mathcal{V}$ est la combinaison d'un nombre fini d'actifs $S_0,\ldots,S_P$ pondérés par des quantités $\alpha_1,\ldots,\alpha_P$. La valeur du portefeuille $\mathcal{V}$ à la date T_i est par définition

$$\mathcal{V}(T_i) = \alpha_0 S_0(T_i) + \cdots + \alpha_P S_P(T_i)$$

Un portefeuille est dit **long** en S_i si $\alpha_i > 0$ et **court** si $\alpha_i < 0$.

A la date T_i la composition du portefeuille peut être **rebalancée** – modifiée – par les achats et les ventes des actifs $S_0,\ldots,S_P$. Cette modification est dite **autofinançante** si

$$\beta_0 S_0(T_i) + \cdots + \beta_P S_P(T_i) = \alpha_0 S_0(T_i) + \cdots + \alpha_P S_P(T_i)$$

où $\alpha_0,\ldots,\alpha_P$ est la composition du portefeuille avant rebalancement et $\beta_0,\ldots,\beta_P$ est la composition du portefeuille après rebalancement. Une modification autofinançante du portefeuille s'obtient par ré-allocation de la valeur du portefeuille sans retrait ni injection de richesse.

Une **stratégie autofinançante** Φ est la donnée d'un portefeuille initial $\mathcal{V}_0$ et d'une suite de rebalancements autofinançants, aux dates $T_1,\ldots,T_N$. A la date T_i le portefeuille $\mathcal{V}_{i-1}$ est rebalancé de façon autofinançante pour donner un nouveau portefeuille $\mathcal{V}_i$. Notons $\mathcal{V}_\Phi(T_i)$ la valeur à la date T_i, du portefeuille $\mathcal{V}_i$. Par la définition d'un rebalancement autofinançant, il vient

$$\mathcal{V}_\Phi(T_i) = \mathcal{V}_i(T_i) = \mathcal{V}_{i-1}(T_i)$$

Appliquer une stratégie autofinançante consiste à ré-allouer sa richesse à chacune des dates $T_1\ldots,T_N$ en fonction de l'information révélée à cette date.

Un **produit dérivé** – ou encore **actif contingent** – écrit sur les actifs $S_0,\ldots,S_P$ est un contrat pouvant être échangé à n'importe quelle date T contre un flux $\widetilde{X}(T)$, ne dépendant que de l'information révélée à la date T – c'est-à-dire $\mathcal{F}_T$ mesurable.

Un produit dérivé est dit **européen**, de maturité T_K, si pour toute date T différente de T_K, $\widetilde{X}(T) = 0$.

Un produit dérivé est dit **américain**, de maturité T_K, si pour toute date T strictement postérieure à T_K, $\widetilde{X}(T) = 0$.

Un produit dérivé est dit non **path-dependent** si son flux à chaque date peut s'écrire comme une fonction du temps et des prix des actifs primitifs – c'est-à-dire s'il existe une fonction déterministe Y telle que pour toute date T,

$$\widetilde{X}(T) = Y\left(T, S_0(T), \ldots, S_P(T)\right)$$

Une économie vérifie le **principe de réplication** si deux actifs qui ont les mêmes prix à une date donnée dans tous les états du monde ont aussi les mêmes prix à toutes les dates antérieures et dans tous les états du monde.

Etant donné un marché $\mathcal{M}$ où sont traités, à la fois, des produits dérivés et les actifs sur lesquels ils sont écrits, nous appelons **actifs de base** – ou encore **actifs primitifs** – du marché $\mathcal{M}$ les actifs sur lesquels sont écrits des produits dérivés et qui ne sont pas eux-mêmes, autrement que de manière triviale, des produits dérivés. Les dynamiques des actifs de base sont en général les données exogènes d'un modèle ; elles le seront toujours dans cet ouvrage.

Le nombre des actifs traités sur un marché et, par conséquent, le nombre des actifs de base traités sur ce marché ne peut être que fini.

Dans les modèles mathématiques de marchés, considérés en finance quantitative, les actifs primitifs sont le plus souvent en nombre fini.

Pour certains marchés – tels des marchés de matières premières, de produits de taux et de produits dérivés écrits sur le risque de crédit –, cette hypothèse peut être mise en défaut. En effet, il devrait théoriquement exister un actif primitif pour chaque maturité – par exemple lorsque les actifs primitifs traités sur un marché sont déjà, eux-mêmes, des contrats à terme.

4. Notion d'opportunité d'arbitrage

Nous n'avons jusqu'ici pas fait usage de l'existence d'une probabilité sur l'ensemble des états du monde. Rappelons qu'un **événement** – ensemble mesurable d'états du monde – A est dit **certain** si $P(A) = 1$ et **impossible** si $P(A) = 0$.

Le terme numéraire possède en finance une acceptation très large. Par définition, l'actif S est un **numéraire** si l'événement $[S > 0]$ est certain.

Intuitivement, une opportunité d'arbitrage représente la possibilité de faire un gain avec un investissement nul. Donnons-en deux définitions plus formelles, la première dans le cadre restreint choisi initialement par Harrison et Pliska, la seconde dans le cas général :

- l'ensemble des états du monde étant supposé fini. Il existe une **opportunité d'arbitrage** (en anglais, *free lunch*) s'il existe une stratégie autofinançante Φ de valeur initiale nulle et une date future T telles que dans tous les états du monde, $\mathcal{V}_{\Phi}(T) \geqslant 0$ et pour au moins un état du monde $\mathcal{V}_{\Phi}(T) > 0$;

- l'ensemble des états du monde n'étant plus supposé fini, il existe une opportunité d'arbitrage s'il existe une stratégie autofinançante Φ de valeur initiale nulle et une date future T telles que l'événement $[\mathcal{V}_{\Phi}(T) \geqslant 0]$ est certain et l'événement $[\mathcal{V}_{\Phi}(T) > 0]$ n'est pas impossible.

Ces deux définitions sont cohérentes, puisque si Ω est fini tout état du monde est atteint avec une probabilité non nulle.

Si le marché considéré contient un numéraire S_0 et s'il existe une stratégie autofinançante Φ de valeur initiale nulle assurant à une date future T un gain strictement positif avec une probabilité non nulle, pour toute date T' postérieure à T, il existe une stratégie autofinançante Φ' de valeur initiale nulle assurant à la date T' un gain strictement positif avec une probabilité non nulle. Pour construire Φ', on prolonge Φ en allouant à la date T toute la richesse disponible, qui est par hypothèse non nulle, sur l'actif S_0.

Lorsqu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage entre les actifs d'un marché, l'**hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage** – souvent abrégée **AOA** – est vérifiée.

5. Absence d'opportunité d'arbitrage et principe de réplication

Si deux portefeuilles $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ appartiennent à un même marché, satisfaisant l'AOA, et si à la date T_i, $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ ont la même valeur dans tous les états du monde, pour toute date T antérieure à T_i, $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ ont la même valeur dans tous les états du monde. En particulier

$$\mathcal{V}_1 (T_0) = \mathcal{V}_2 (T_0)$$

L'AOA implique donc le principe de réplication.

Supposons que $\mathcal{V}_1 (T_0) < \mathcal{V}_2 (T_0)$ et définissons le portefeuille $\mathcal{V}_3$ par

$$\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2 - \frac{\mathcal{V}_2 (T_0)}{\mathcal{V}_1 (T_0)} \mathcal{V}_1$$

Alors $\mathcal{V}_3 (T_0) = 0$ et dans les états du monde

$$\mathcal{V}_3(T_i) = \mathcal{V}_2(T_i) \left(1 - \frac{\mathcal{V}_2 (T_0)}{\mathcal{V}_1 (T_0)}\right) > 0$$

Ce qui contredit l'hypothèse d'AOA (en considérant la stratégie autofinançante triviale qui consiste à ne jamais changer la composition du portefeuille $\mathcal{V}_3$). Puisque les portefeuilles $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ jouent des rôles symétriques, $\mathcal{V}_1 (T_0) = \mathcal{V}_2 (T_0)$.

Lorsque l'ensemble des états du monde est fini, le résultat général se démontre de la même façon en se plaçant à n'importe quel temps T antérieur à T_i. Nous admettons le résultat dans le cas général.

6. Marchés complets

Dans ce paragraphe, $S_0, \ldots, S_P$ sont des actifs primitifs, $\mathcal{M}$ est le marché formé par toutes les ventes et achats possibles de ces actifs aux dates d'échange $T_0, \ldots, T_N$. Etant donnés des actifs $X_1, \ldots, X_N$, $\mathcal{M}(X_1, \ldots, X_N)$ est le marché formé par toutes les ventes et achats possibles de ces actifs et des actifs de $\mathcal{M}$ aux dates d'échange $T_0, \ldots, T_N$. Enfin, $\widetilde{\mathcal{M}}$ est le marché formé par toutes les ventes et achats possibles des actifs de $\mathcal{M}$ et des produits dérivés écrits sur les actifs de $\mathcal{M}$ aux dates d'échange $T_0, \ldots, T_N$.

L'actif X peut être **répliqué statiquement** dans $\mathcal{M}$ s'il existe un portefeuille $\mathcal{V}$, composé uniquement des actifs primitifs $S_0, \ldots, S_P$, tel que à toute date T_i

$$\mathcal{V}(T_i) = X(T_i)$$

Un tel portefeuille est un **portefeuille de réplication statique**. Les seuls actifs de $\widetilde{\mathcal{M}}$ qui peuvent être répliqués statiquement sont les contrats à terme et les portefeuilles d'actifs primitifs.

L'actif X peut être **répliqué dynamiquement** dans $\mathcal{M}$ s'il existe une stratégie autofinançante Φ, ne faisant intervenir que les actifs primitifs $S_0,\ldots,S_P$, telle que à toute date T_i

$$\mathcal{V}_{\Phi}\left(T_i\right) = X\left(T_i\right)$$

Le marché $\mathcal{M}$ est dit **dynamiquement complet**, si pour tout flux financier $\widetilde{X}(T)$ échu à la date T, ne dépendant que de l'information révélée à la date T – c'est-à-dire $\mathcal{F}_T$ mesurable –, il existe une stratégie autofinançante Φ telle que

$$\mathcal{V}_{\Phi}(T) = X(T)$$

Une telle stratégie Φ est une **stratégie de réplication dynamique** – ou encore simplement **réplication dynamique** – de $\widetilde{X}(T)$.

Etablissons un résultat préliminaire. Si X est un actif réplicable dynamiquement dans $\mathcal{M}$ et si le marché $\mathcal{M}$ satisfait à l'AOA, le marché $\mathcal{M}(X)$ satisfait également à l'AOA.

En effet, puisque X peut être répliqué dynamiquement, il existe un portefeuille $\mathcal{V}^X$ et une stratégie autofinançante Φ_X ne faisant intervenir que les actifs de $\mathcal{M}$ telle que pour toute date T, $X\left(T\right) = \mathcal{V}^X_{\Phi_X}\left(T\right)$. Donc, à chaque date T, pour tout portefeuille $\mathcal{V}$ composé des actifs de $\mathcal{M}(X)$, il existe un portefeuille $\widetilde{\mathcal{V}}$, composé uniquement des actifs $S_0, \ldots, S_P$, prenant les mêmes valeurs, à la date T, dans tous les états du monde, que le portefeuille $\mathcal{V}$. Ainsi, étant donnés un portefeuille $\mathcal{V}$ et une stratégie autofinançante Φ faisant intervenir les actifs de $\mathcal{M}(X)$, nous créons une nouvelle stratégie autofinançante Ψ en posant pour toute date T

$$\mathcal{V}_{\Psi}\left(T\right) = \widetilde{\mathcal{V}}_{\Phi}\left(T\right)$$

Si la stratégie autofinançante Φ constitue une opportunité d'arbitrage du marché $\mathcal{M}(X)$, la stratégie autofinançante Ψ constitue une opportunité d'arbitrage du marché $\mathcal{M}$. Le marché $\mathcal{M}$ satisfait à l'AOA, donc le marché $\mathcal{M}\left(X\right)$ satisfait à l'AOA.

Le résultat suivant est essentiel, il permet d'assigner un prix de manière unique à tout actif réplicable dynamiquement. A ce titre, il est à la base de la théorie mathématique de l'évaluation par arbitrage.

Si le marché $\mathcal{M}$ est dynamiquement complet et satisfait à l'AOA, le prix, à la date T_0, de tout actif européen écrit sur les actifs primitifs S_0,...,S_P est déterminé de manière unique. Plus précisément, pour tout actif européen de maturité $T_K \leqslant T_N$ écrit sur les actifs primitifs $S_0, \ldots, S_P$, il existe un unique processus de prix X tel que le marché $\mathcal{M}(X)$ satisfait à l'AOA.

La démonstration se fait en trois étapes.

- Le marché est dynamiquement complet, donc pour le flux $f\left(T_K, S_0, \ldots, S_P\right)$, il existe un portefeuille de réplication dynamique.

- Par le principe de réplication, AOA, les processus de prix de tous les portefeuilles de réplication dynamique pour le flux $f\left(T_K, S_0, \ldots, S_P\right)$ sont égaux jusqu'à la date T_K. Soit X la restriction commune des processus de prix de ces portefeuilles aux dates T_0,T_1,...,T_k. Ces portefeuilles ont tous le même prix initial, $X\left(T_0\right)$. Par le résultat précédent, le marché $\mathcal{M}(X)$ satisfait l'AOA.

- S'il existait un autre processus de prix que celui déterminé précédemment, le principe de réplication ne serait pas vrai pour $\mathcal{M}(X)$, ce qui contredirait l'AOA pour $\mathcal{M}(X)$.

Les deux résultats démontrés ci-dessus nous donnent le critère suivant, si le marché $\mathcal{M}$ est dynamiquement complet, $\mathcal{M}$ satisfait l'AOA si et seulement si $\widetilde{\mathcal{M}}$ satisfait l'AOA. De plus, si $\mathcal{M}$ est dynamiquement complet et satisfait à l'AOA, pour tout actif X de $\widetilde{\mathcal{M}}$ il existe un unique processus de prix tel que le marché $\mathcal{M}(X)$ ne présente pas d'opportunité d'arbitrage et ce processus de prix est donné par le processus de prix de n'importe quelle stratégie de réplication autofinançante de X.

La notion de réplication dynamique est plus qu'une vue de l'esprit. Elle joue un rôle essentiel dans la pratique financière : le prix d'un produit dérivé s'obtient toujours en déterminant le prix d'une stratégie autofinançante de réplication dynamique – quelquefois sans l'exprimer directement – de ce produit dérivé.

7. Probabilité risque-neutre

Supposons que le marché $\mathcal{M}$ est dynamiquement complet et satisfait à l'AOA. La fonction qui, à un contrat dérivé européen de maturité T_N, écrit sur les actifs primitifs $S_0, \ldots, S_P$, associe son prix à la date T_0 est une forme linéaire positive. Considérons en effet un actif contingent de maturité T_N dont le flux terminal X est presque sûrement positif et est strictement positif avec une probabilité non nulle. Le marché étant dynamiquement complet, il existe une stratégie de réplication dynamique de X.

Par l'AOA, la valeur en T_0 de cette stratégie, égale au prix en T_0 du contrat dérivé européen de flux X, est strictement positive. Notons Π_{T_N} cette forme linéaire positive – fonction de prix.

Nous supposons dans la suite que S_0 est un numéraire ne versant pas de dividendes. La remarque ci-dessus montre que la forme linéaire

$$Y_{T_N} \longmapsto \Pi_{T_N}\left(\frac{S_0(T_N)}{S_0(T_0)} Y_{T_N}\right)$$

est également positive. De plus, $\Pi_{T_N}\left(\frac{S_0(T_N)}{S_0(T_0)}\right) = 1$. Par le théorème de Riesz, il existe une unique probabilité Q sur Ω (la condition d'unicité du théorème de Riesz étant assurée par la complétude du marché), équivalente à la probabilité historique – c'est-à-dire ayant les mêmes ensembles de mesure nulle –, telle que

$$\mathbb{E}_Q\left(Y_{T_N}\right) = \int_\Omega Y_{T_N} dQ = \Pi_{T_N}\left(\frac{S_0(T_N)}{S_0(T_0)} Y_{T_N}\right)$$

donc pour tout produit dérivé européen de maturité T_N et de flux terminal X_{T_N}

$$\Pi_{T_N}\left(X_{T_N}\right) = S_0(T_0) \times \mathbb{E}_Q\left(\frac{X_{T_N}}{S_0(T_N)}\right)$$

A un contrat dérivé X de maturité $T_K \leqslant T_N$ associons la stratégie autofinançante Φ définie par

$$\mathcal{V}_\Phi(T) = \begin{cases} X(T) & \text{si } T \leqslant T_K \\ X(T_K) \times \frac{S_0(T)}{S_0(T_K)} & \text{si } T > T_K \end{cases}$$

Le prix en T_0 du contrat dérivé européen de maturité T_N versant $\mathcal{V}_\Phi(T_N)$ est $\mathcal{V}_\Phi(T_0) = X(T_0)$ par la section précédente, ainsi

$$X(T_0) = \Pi_{T_N}\left(\mathcal{V}_\Phi(T_N)\right) = S_0\left(T_0\right)\mathbb{E}_Q\left(\frac{X\left(T_K\right) \times S_0(T_N)}{S_0\left(T_N\right) \times S_0\left(T_K\right)}\right)$$

Nous avons construit une probabilité sur Ω telle que le prix $\Pi\left(\left(\widetilde{X_k}\right)\right)$en T_0 d'une série de flux aléatoires $\left(\widetilde{X_k}\right)$ tombant aux dates $T_0,\ldots,T_N$ est donné par la formule

$$\Pi\left(\left(\widetilde{X_k}\right)\right) = S_0\left(T_0\right)\sum_{k=0}^{N}\mathbb{E}_Q\left(\frac{\widetilde{X_k}}{S_0\left(T_k\right)}\right)$$

Une telle probabilité est dite **probabilité risque-neutre**.

8. Actualisation

Nous supposons dans la suite l'existence sur chaque période $[T_k, T_{k+1}[$ d'un taux d'intérêt $r\left(T_k\right)$ – qui peut être aléatoire – auquel il est possible de prêter ou d'emprunter sans risque sur la période $[T_k, T_{k+1}[$. Faire cette hypothèse revient à supposer l'existence d'un actif primitif S_0 – dit **actif de capitalisation** – dont la valeur à la date T_k est donnée par

$$S_0\left(T_k\right) = \exp\left(\int_0^{T_k} r\left(s\right)ds\right) = \exp\left(\sum_{i=0}^{k-1} r\left(T_i\right) \times \left(T_{i+1} - T_i\right)\right)$$

Cet actif est un numéraire. En prenant pour Q la probabilité risque-neutre associée à ce numéraire, nous obtenons, pour une suite de flux aléatoires $\left(\widetilde{X_k}\right)$, la formule usuelle

$$\Pi\left(\left(\widetilde{X_k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{N}\mathbb{E}_Q\left(\widetilde{X_k}e^{-\int_0^{T_k} r(s)ds}\right)$$

Lorsqu'il est fait référence à "la probabilité risque-neutre" sans que le numéraire utilisé ait été spécifié, il s'agit toujours de la probabilité risque-neutre associée à l'actif de capitalisation.

9. Evaluation par martingale

Les probabilités risque-neutre vérifient la propriété essentielle dite de **martingale**.

Sous la probabilité risque-neutre Q associé au numéraire S, le processus suivi par le prix de l'actif X exprimé dans le numéraire S est une martingale. C'est-à-dire

$$\frac{X(T_k)}{S_0(T_k)} = \mathbb{E}_Q\left(\left.\frac{X(T_{k'})}{S_0(T_{k'})}\right| \mathcal{F}_{T_k}\right)$$

pour toutes dates T_k, $T_{k'}$ avec T_k antérieure à $T_{k'}$, l'espérance conditionnelle étant calculée par rapport à l'information révélée à la date T_k.

En particulier, sous la probabilité risque-neutre – associée à l'actif de capitalisation –

$$X(T_k) = \mathbb{E}_Q\left(\left. X(T_{k'})\, e^{-\int_{T_k}^{T_{k'}} r(s)ds} \right| \mathcal{F}_{T_k}\right)$$

Lorsque l'ensemble des états du monde est fini, la propriété de martingale se démontre de la même façon que le théorème de réplication. Nous admettons ce résultat dans le cas général. Une construction explicite de la probabilité risque-neutre et une démonstration de la propriété de martingale sont données dans les modèles de Black et Scholes et de Cox, Ross et Rubinstein.

Réciproquement, s'il existe un numéraire S_0 et une probabilité Q sur Ω, équivalente à la probabilité historique, telle que pour tout actif X du marché $\mathcal{M}$, $\frac{X}{S_0}$ est une martingale sous Q, le marché $\widetilde{\mathcal{M}}$ satisfait à la condition d'AOA et Q est la probabilité risque-neutre associée au numéraire S_0 dans le marché $\widetilde{\mathcal{M}}$. Bien que de démonstration immédiate, ce résultat est très puissant puisqu'il permet de construire une probabilité risque-neutre à partir des seuls actifs primitifs.

Enfin, il est possible de montrer que, s'il existe une unique probabilité risque-neutre pour le marché $\mathcal{M}$, ce marché est complet.

Il est souvent nécessaire d'exprimer le prix d'un produit dérivé en fonction des prix des actifs de base. Lorsque les processus de prix des actifs primitifs sont markoviens, une telle expression existe pour un produit non path-dependent en vertu du résultat suivant :

Etant donné un processus markovien $X(T)$ et une fonction déterministe f, pour toutes dates T_i et T_j avec $T_i < T_j$, il existe une fonction déterministe g telle que

$$E\left(f\left(X\left(T_j\right)\right)\middle|\,\mathcal{F}_{T_i}\right) = g\left(X\left(T_i\right)\right)$$

Ce résultat est encore vrai en temps continu, c'est une conséquence directe de la propriété de Markov.

10. Actifs américains et exercice optimal

Considérons un actif américain payant $\widetilde{X}(T_k)$ s'il est exercé à la date T_k. Trouver le prix de cet actif américain revient à résoudre un problème d'**allocation optimale**. Il faut subdiviser l'ensemble des états du monde en une partition $A_0,\ldots,A_N$ où A_i est l'ensemble des états du monde pour lesquels il est optimal d'exercer au temps T_i. Mathématiquement, la partition $A_0,\ldots,A_N$ est une allocation optimale si la somme des valeurs des flux

$$\sum_{k=0}^{N} \widetilde{X}(T_k)\mathbf{1}_{A_k} e^{-\int_0^{T_k} r(s)ds}$$

est maximale – où $\mathbf{1}_{A_k}(\omega) = 1$ si $\omega \in A_k$ et $\mathbf{1}_{A_k}(\omega) = 0$ si $\omega \notin A_k$. De plus, la décision d'exercer, à une date donnée, ne pouvant être prise qu'en fonction de l'information révélée à cette date pour chaque $k \in \{0,\ldots,N\}$, le sous-ensemble A_k doit être $\mathcal{F}_{T_k}$ mesurable. Les dates d'exercice optimal de cet actif américain sont données par les valeurs d'un **temps d'arrêt optimal** τ^* pour le problème

$$\max_{\tau} E\left(\widetilde{X}(\tau)e^{-\int_0^{\tau} r(s)ds}\right)$$

et le prix de l'actif américain considéré est

$$E\left(\widetilde{X}(\tau^*)e^{-\int_0^{\tau^*} r(s)ds}\right) = \max_{\tau} E\left(\widetilde{X}(\tau)e^{-\int_0^{\tau} r(s)ds}\right)$$