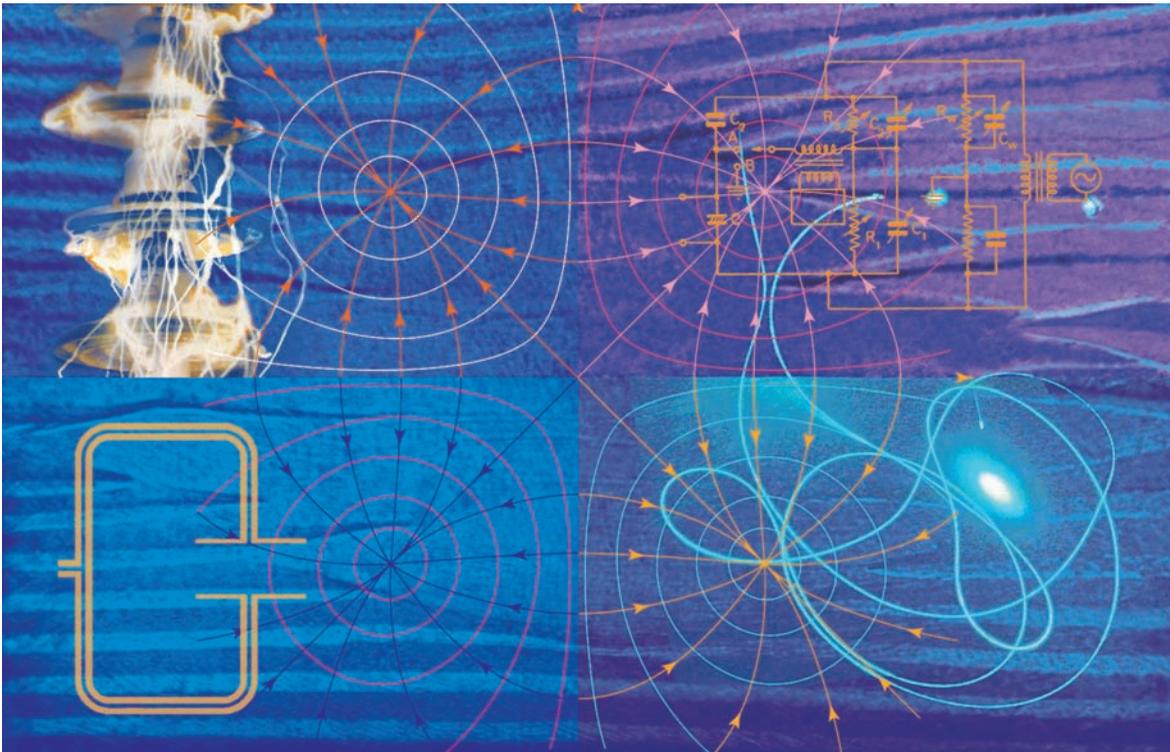




PHYSIQUE DES DIÉLECTRIQUES

AVEC PROBLÈMES ET EXERCICES CORRIGÉS

■ Jean-Claude PEUZIN et Damien GIGNOUX



PHYSIQUE DES DIÉLECTRIQUES
AVEC PROBLÈMES ET EXERCICES CORRIGÉS

Grenoble Sciences

Grenoble Sciences poursuit un triple objectif :

- ▶ réaliser des ouvrages correspondant à un projet clairement défini, sans contrainte de mode ou de programme,
- ▶ garantir les qualités scientifique et pédagogique des ouvrages retenus,
- ▶ proposer des ouvrages à un prix accessible au public le plus large possible.

Chaque projet est sélectionné au niveau de Grenoble Sciences avec le concours de referees anonymes. Puis les auteurs travaillent pendant une année (en moyenne) avec les membres d'un comité de lecture interactif, dont les noms apparaissent au début de l'ouvrage. Celui-ci est ensuite publié chez l'éditeur le plus adapté.

(Contact : Tél. : (33)4 76 51 46 95 - e-mail : Grenoble.Sciences@ujf-grenoble.fr
Information : <http://grenoble-sciences.ujf-grenoble.fr>)

Deux collections existent chez EDP Sciences :

- ▶ la ***Collection Grenoble Sciences***, connue pour son originalité de projets et sa qualité
- ▶ ***Grenoble Sciences - Rencontres Scientifiques***, collection présentant des thèmes de recherche d'actualité, traités par des scientifiques de premier plan issus de disciplines différentes.

Directeur scientifique de Grenoble Sciences

Jean BORNAREL, professeur à l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1

Comité de lecture pour Physique des diélectriques

- ▶ **François BERTIN**, ingénieur au CEA-LETI, MINATEC, Grenoble
- ▶ **Richard CACH**, professeur à l'Université de Wroclaw, Pologne
- ▶ **Robert FLECKINGER**, professeur à l'Université Paul Sabatier, Toulouse
- ▶ **Marc FONTANA**, professeur à l'Université Paul Verlaine, Metz
- ▶ **Olivier GEOFFROY**, maître de conférences à l'Université Joseph Fourier, Grenoble
- ▶ **Françoise HIPPERT**, professeur à l'Institut National Polytechnique, Grenoble
- ▶ **Jean-Christophe TOUSSAINT**, professeur à l'Institut National Polytechnique, Grenoble

et

- ▶ **Ioan Mihai POP** et **Michael SANREY**, doctorants à l'Université Joseph Fourier, Grenoble

et le suivi, pour Grenoble Sciences, de **Laura CAPOLO**, ingénieur de recherche

Grenoble Sciences reçoit le soutien du **Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche** et de la **Région Rhône-Alpes**.

Grenoble Sciences est rattaché à l'**Université Joseph Fourier de Grenoble**.

Réalisation et mise en pages : Centre technique Grenoble Sciences

Illustration de couverture : Alice GIRAUD

ISBN 978-2-7598-0385-9

© EDP Sciences, 2009

PHYSIQUE DES DIÉLECTRIQUES

AVEC PROBLÈMES ET EXERCICES CORRIGÉS

Jean-Claude PEUZIN & Damien GIGNOUX



17, avenue du Hoggar
Parc d'Activité de Courtabœuf - BP 112
91944 Les Ulis Cedex A - France

Ouvrages Grenoble Sciences édités par EDP Sciences

Collection Grenoble Sciences

Chimie. Le minimum à savoir (*J. Le Coarer*) • Electrochimie des solides (*C. Déportes et al.*) • Thermodynamique chimique (*M. Oturan & M. Robert*) • CD de Thermodynamique chimique (*J.P. Damon & M. Vincens*) • Chimie organométallique (*D. Astruc*) • De l'atome à la réaction chimique (*sous la direction de R. Barlet*) • Spectroscopies infrarouge et Raman (*R. Poilblanc & F. Crasnier*) • Chemogénomique. Des petites molécules pour explorer le vivant (*sous la direction de E. Maréchal, S. Roy & L. Lafanechère*)

Introduction à la mécanique statistique (*E. Belorizky & W. Gorecki*) • Mécanique statistique. Exercices et problèmes corrigés (*E. Belorizky & W. Gorecki*) • La cavitation. Mécanismes physiques et aspects industriels (*J.P. Franc et al.*) • La turbulence (*M. Lesieur*) • Magnétisme : I Fondements, II Matériaux et applications (*sous la direction d'E. du Trémolet de Lacheisserie*) • Du Soleil à la Terre. Aéronomie et météorologie de l'espace (*J. Liliensten & P.L. Blelly*) • Sous les feux du Soleil. Vers une météorologie de l'espace (*J. Liliensten & J. Bornarel*) • Mécanique. De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien (*C. Gignoux & B. Silvestre-Brac*) • Problèmes corrigés de mécanique et résumés de cours. De Lagrange à Hamilton (*C. Gignoux & B. Silvestre-Brac*) • La mécanique quantique. Problèmes résolus, T. 1 et 2 (*V.M. Galitsky, B.M. Karnakov & V.I. Kogan*) • Description de la symétrie. Des groupes de symétrie aux structures fractales (*J. Sivardière*) • Symétrie et propriétés physiques. Du principe de Curie aux brisures de symétrie (*J. Sivardière*) • Physique des plasmas collisionnels. Application aux décharges haute fréquence (*M. Moisan & J. Pelletier*) • Energie et environnement. Les risques et les enjeux d'une crise annoncée (*B. Durand*) • Hydrothermalisme. Spéciation métallique hydrique et systèmes hydrothermaux (*M. Chenevoy & M. Piboule*) • Les roches, mémoire du temps (*G. Mascle*)

Exercices corrigés d'analyse, T. 1 et 2 (*D. Alibert*) • Introduction aux variétés différentielles (*J. Lafontaine*) • Mathématiques pour les sciences de la vie, de la nature et de la santé (*F. & J.P. Bertrandias*) • Approximation hilbertienne. Splines, ondelettes, fractales (*M. Attéa & J. Gaches*) • Mathématiques pour l'étudiant scientifique, T. 1 et 2 (*Ph.J. Haug*) • Analyse statistique des données expérimentales (*K. Protassov*) • Nombres et algèbre (*J.Y. Mérindol*) • Analyse numérique et équations différentielles (*J.P. Demailly*) • Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs (*E. Belorizky*)

Bactéries et environnement. Adaptations physiologiques (*J. Pelmont*) • Enzymes. Catalyseurs du monde vivant (*J. Pelmont*) • Endocrinologie et communications cellulaires (*S. Idelman & J. Verdetti*) • Eléments de biologie à l'usage d'autres disciplines (*P. Tracqui & J. Demongeot*) • Bioénergétique (*B. Guérin*) • Cinétique enzymatique (*A. Cornish-Bowden, M. Jamin & V. Saks*) • Biodégradations et métabolismes. Les bactéries pour les technologies de l'environnement (*J. Pelmont*) • Enzymologie moléculaire et cellulaire, T. 1 et 2 (*J. Yon-Kahn & G. Hervé*) • Glossaire de biochimie environnementale (*J. Pelmont*)

L'Asie, source de sciences et de techniques (*M. Soutif*) • La biologie, des origines à nos jours (*P. Vignais*) • Naissance de la physique. De la Sicile à la Chine (*M. Soutif*) • Science expérimentale et connaissance du vivant. La méthode et les concepts (*P. Vignais, avec la collaboration de P. Vignais*) • Histoire de la science des protéines (*J. Yon-Kahn*)

La plongée sous-marine à l'air. L'adaptation de l'organisme et ses limites (*Ph. Foster*) • Le régime oméga 3. Le programme alimentaire pour sauver notre santé (*A. Simopoulos, J. Robinson, M. de Lorgeril & P. Salen*) • Gestes et mouvements justes. Guide de l'ergomotricité pour tous (*M. Gendrier*)

Listening Comprehension for Scientific English (*J. Upjohn*) • Speaking Skills in Scientific English (*J. Upjohn, M.H. Fries & D. Amadis*) • Minimum Competence in Scientific English (*S. Blattes, V. Jans & J. Upjohn*) • Minimum Competence in Medical English (*J. Upjohn, J. Hay, P.E. Colle, J. Hibbert & A. Depierre*)

Grenoble Sciences - Rencontres Scientifiques

Radiopharmaceutiques. Chimie des radiotraceurs et applications biologiques (*sous la direction de M. Comet & M. Vidal*) • Turbulence et déterminisme (*sous la direction de M. Lesieur*) • Méthodes et techniques de la chimie organique (*sous la direction de D. Astruc*) • L'énergie de demain. Techniques, environnement, économie (*sous la direction de J.L. Bobin, E. Huffer & H. Nifenecker*) • Physique et biologie. Une interdisciplinarité complexe (*sous la direction de B. Jacrot*)

AVANT-PROPOS

Ce livre doit être considéré comme une introduction à la physique des diélectriques. Il est destiné aux étudiants de licence et de master, aux élèves ingénieurs et aux chercheurs non spécialistes du domaine.

Un diélectrique est en général perçu comme un isolant électrique, ce qui met a priori l'accent sur les phénomènes qui limitent le pouvoir isolant comme la conductivité résiduelle (incluant les effets d'injection de charges et de courant de charge d'espace) et surtout les phénomènes de claquage réversibles ou irréversibles. Nous avons volontairement exclu de notre ouvrage ces aspects, traités de façon très complète dans l'ouvrage de R. Coelho et B. Aladenize [1], pour ne développer que la propriété essentielle des diélectriques, c'est-à-dire le phénomène de polarisation. Il existe peu d'ouvrages de langue française consacrés aux différents aspects du phénomène de polarisation dans la matière.

Notre ambition de rédiger un ouvrage simple mais d'emploi commode nous a amenés à inclure notamment des rappels d'électrostatique et d'électromagnétisme du vide ainsi qu'un chapitre sur l'optique cristalline. Nous nous sommes imposés un certain nombre de règles :

1. S'attacher à faire comprendre les *principes physiques* sans négliger *pour autant les ordres de grandeur*, plutôt que dresser des listes exhaustives de propriétés (pour cela nous renvoyons le lecteur aux catalogues des fabricants).
2. Donner la priorité à *l'efficacité pédagogique* en n'hésitant pas le cas échéant à sacrifier la rigueur à l'intuition et les interprétations récentes (et généralement moins simples) aux interprétations plus anciennes (et plus accessibles). Cette démarche se justifie par l'objectif de donner les bases *incontournables*.
3. Dans cette recherche de l'efficacité pédagogique, ne pas hésiter à utiliser des *outils* tels que les *modèles naïfs* et les “ *arguments de plausibilité* ”.

Cette stratégie, associée à l'ambition de rédiger un document de travail efficace, nous a conduit à traiter de façon simplifiée et incomplète beaucoup d'aspects du phénomène de polarisation, plus particulièrement la polarisation électronique et orientationnelle, les modèles d'ions, la ferroélectricité.

Nous espérons que cet ouvrage rendra les services qu'attend le lecteur.

[1] R. COELHO, B. ALADENIZE, *Les diélectriques : propriétés diélectriques des matériaux isolants* (1993), Hermes, Paris.

MODE D'EMPLOI

Voici quelques indications afin que le lecteur puisse faire le meilleur usage de cet ouvrage.

En premier lieu, deux niveaux de lecture sont proposés. Le premier concerne toutes les parties que les auteurs considèrent comme nécessaires. Il correspond à tout ce qui est imprimé en taille normale. Toutes les parties, **en caractères réduits**, concernent un deuxième niveau de lecture. Il s'agit d'explications ou de remarques destinées au lecteur qui souhaite avoir une connaissance plus approfondie d'un aspect particulier.

Afin de ne pas trop alourdir le texte un certain nombre de démonstrations ou de précisions sont reportées en fin de chapitre sous forme de **Compléments**. Des **Annexes**, au nombre de huit, ne se rapportant pas à un chapitre particulier mais plutôt à l'ensemble de l'ouvrage, sont reportées à la fin. On y trouve le tableau périodique des éléments ou l'échelle des fréquences et longueurs d'ondes des ondes électromagnétiques. En particulier on trouvera dans l'Annexe 6 la liste de la plupart des symboles utilisés avec les unités des quantités qu'ils représentent.

Signalons que les **lettres en gras** correspondent soit à des vecteurs soit à des tenseurs, sachant que tous les éléments seront donnés pour les distinguer. Cette écriture des tenseurs, parmi les différentes que l'on trouve dans la littérature, a été choisi pour sa simplicité.

A la fin de chaque chapitre figure une **liste de références** annoncées dans le texte et concernant des points particuliers, tandis qu'à la fin l'ouvrage sont reportés des **livres de portée plus générale**.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer notre gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cet ouvrage.

Nous sommes en tout premier lieu reconnaissant aux membres du comité de lecture pour leurs avis constructifs.

Les membres de la direction scientifique de GRENOBLE SCIENCES, en particulier Jean Bornarel, spécialiste du domaine, et Laura Capolo n'ont ménagé ni leurs efforts ni leur temps pour aider à l'amélioration du manuscrit. Qu'ils en soient chaleureusement remerciés.

Nous ne saurions oublier Sylvie Bordage dont le rôle dans l'élaboration des figures fut très précieux.

Nous remercions enfin Konstantin Protassov pour ses suggestions et la coordination efficace de la réalisation technique de l'original.

Les auteurs

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. CONDUCTEURS ET ISOLANTS. DIÉLECTRIQUES

On s'intéressera ici essentiellement aux *solides* et plus particulièrement aux solides cristallisés. D'un point de vue électrique, un solide peut être considéré comme un ensemble neutre de charges positives et négatives (ions positifs et négatifs, électrons) que l'on classera dans un *schéma simplifié* en deux catégories, à savoir les charges *liées* et les charges *libres*.

Les charges liées sont par définition reliées entre elles par des forces de rappel élastiques¹ et ont une position de repos fixe (au moins en moyenne). Elles constituent en quelque sorte le “ squelette ” du matériau.

A température finie T , elles vibrent toutefois autour de cette position de repos à une fréquence² typiquement du domaine optique (10^{13} à 10^{15} Hz) et avec une *amplitude quadratique moyenne*, fonction croissante de T , qui reste faible devant les distances interatomiques tant que le solide reste stable (notamment tant qu'on ne s'approche pas de la fusion).

Les charges libres sont par définition susceptibles de se déplacer au sein du solide sans subir de forces de rappel. On parle aussi de porteurs (sous entendu de charges) libres. L'agitation thermique confère à ces porteurs une *vitesse quadratique moyenne* non nulle fonction croissante de T , tandis que leur *vitesse moyenne* reste nulle.

Dans les conducteurs, il y a par définition beaucoup de charges libres et le phénomène dominant induit par l'application d'un champ électrique \mathbf{E} est la mise en mouvement de ces charges : une charge libre q soumise au champ \mathbf{E} subit en effet la force $q\mathbf{E}$. Compte tenu des interactions avec les défauts statiques et les vibrations du réseau

1 On verra que ces forces ne se réduisent pas aux attractions ou répulsions électrostatiques entre les charges.

2 En réalité, il faudrait parler d'un spectre de fréquences.

dont les effets sont, au moins formellement, assimilables à un *frottement visqueux*, la particule chargée prend une vitesse moyenne \mathbf{v} proportionnelle au champ \mathbf{E} : pour un solide isotrope on écrit $\mathbf{v} = \mu\mathbf{E}$ où μ est la *mobilité*. La densité de courant est alors $\mathbf{j} = nq\mu\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}$ où n est la densité volumique de charges libres et $\sigma = nq\mu$ la *conductivité*.

Ainsi, dans un conducteur, l'application continue d'un champ se traduit par une *vitesse moyenne* permanente des porteurs et donc par un *courant* permanent.

Dans les isolants, il n'y a par définition pratiquement que des charges liées et le phénomène dominant, induit par l'application d'un champ électrique, est un déplacement relatif fini des charges liées positives par rapport aux charges négatives. C'est la raison pour laquelle on qualifie aussi ces matériaux de diélectriques. Ce phénomène de séparation des deux types de charges est appelé *polarisation*.

C'est l'existence de forces de rappel qui conduit à un déplacement relatif \mathbf{u} fini. \mathbf{u} est a priori une fonction croissante du champ \mathbf{E} . Si q et n sont respectivement la charge unitaire et le nombre par unité de volume de charges positives qui subissent par rapport à leurs homologues négatives le déplacement \mathbf{u} , on est amené à définir la polarisation \mathbf{P} associée à ces charges par $\mathbf{P} = nq\mathbf{u}$.

Ainsi, l'application continue d'un champ sur un diélectrique se traduit par un *déplacement relatif* permanent des charges liées et donc par une *polarisation* permanente.

En réalité, bien entendu, les notions de conducteur pur et de diélectrique pur correspondent à des situations extrêmes idéales. Les matériaux réels comportent tous, à la fois des charges libres et des charges liées. En général il existe même plusieurs catégories de charges libres d'une part et de charges liées d'autre part. Soumis à un champ électrique statique, les matériaux réels sont donc le siège à la fois d'une polarisation et d'un courant permanents.

C'est essentiellement le premier de ces phénomènes qui nous intéressera ici. On trouvera dans l'ouvrage de R. Coelho et B. Aladenize [1] un traitement détaillé des phénomènes de conduction et de rupture dans les diélectriques.

1.2. POLARISATION LINÉAIRE ISOTROPE ET ANISOTROPE ET POLARISATION NON LINÉAIRE

Si les forces de rappel entre charges négatives et positives augmentent proportionnellement au déplacement relatif, alors la valeur de \mathbf{u} à l'équilibre sous le champ \mathbf{E} est elle-même proportionnelle à \mathbf{E} et il en est de même pour la polarisation \mathbf{P} : on parle de diélectrique linéaire. Si la force de rappel est de plus constamment colinéaire au déplacement, la polarisation est elle-même colinéaire au champ et le diélectrique est qualifié de linéaire et isotrope. Dans un tel matériau on aura $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$ où χ , la *susceptibilité* est un scalaire. On comprendra plus loin pourquoi il est intéressant d'introduire ici la constante ε_0 .

Si au contraire le matériau présente des directions privilégiées, la force de rappel ne sera plus en général colinéaire au déplacement. La polarisation ne sera plus colinéaire

au champ et on aura affaire à un diélectrique linéaire anisotrope. Dans ce type de matériau, la relation de susceptibilité prendra la forme $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$, où χ est un tenseur d'ordre deux.

Enfin, si la force de rappel est une fonction non linéaire de \mathbf{u} , la relation $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ sera elle-même non linéaire. On sera amené par la suite à distinguer les *non linéarités faibles* associées aux déplacements *électroniques* qui conduisent à de nombreuses applications dans le domaine de l'*optique* et les *non linéarités fortes* associées aux déplacements *ioniques* qui caractérisent notamment le phénomène remarquable de *ferroélectricité*.

1.3. PHÉNOMÈNES DE COUPLAGE

Deux catégories de couplage peuvent être considérées ; d'une part les couplages au premier ordre (directs) et d'autre part les couplages d'ordre supérieur (indirects).

Par couplage au premier ordre, on entend ici la création d'une polarisation par une excitation autre qu'un champ électrique. De nombreux phénomènes de ce type sont théoriquement prévisibles et ont été observés : l'effet *pyroélectrique* (polarisation induite par une variation de température), l'effet *magnétoélectrique* (polarisation induite par un champ magnétique), mais le plus important d'entre eux est sans aucun doute l'effet *piézoélectrique* (polarisation induite par une contrainte mécanique) qui fait l'objet d'un chapitre spécifique dans cet ouvrage.

Par couplage d'ordre supérieur, on entend une modification de la susceptibilité diélectrique ou d'un paramètre directement associé, notamment l'indice des opticiens, par une excitation dont la nature peut être une contrainte mécanique (effet *piézo-optique*, encore qualifié *d'acousto-optique*), un champ électrique (effet *électro-optique*) ou un champ magnétique (effet *magnéto-optique*).

EFFET PIÉZOÉLECTRIQUE

Certains solides (en général des cristaux) se polarisent lorsqu'on leur applique non pas un champ, mais une *contrainte mécanique*. C'est ce que l'on appelle l'effet piézoélectrique direct. Tous les matériaux piézoélectriques présentent aussi l'effet dit inverse : l'application d'un champ électrique sur le solide libre de se déformer produit une déformation mécanique.

On montre que la piézoélectricité n'apparaît que si le motif cristallin possède une asymétrie interne : plus précisément, si le cristal est dépourvu de centre de symétrie.

EFFETS ÉLECTRO-OPTIQUE, MAGNÉTO-OPTIQUE ET PIÉZO-OPTIQUE

Tous ces effets sont qualifiés d'optique parce que la susceptibilité diélectrique considérée – pour des raisons pratiques qui apparaîtront dans la suite – est spécifiquement celle qu'on observe aux *fréquences optiques*. Comme la piézoélectricité, l'effet électro-

optique n'est observable et observé que dans les cristaux non centro-symétriques. On verra qu'il présente une relation avec la non linéarité optique.

Les effets piézo-optiques et magnéto-optiques n'exigent aucune asymétrie particulière et sont donc observés dans tous les diélectriques.

1.4. PLAN DE L'OUVRAGE

Le plan de l'ouvrage résulte des considérations précédentes : après quelques rappels élémentaires d'électrostatique et d'électromagnétisme du vide, on abordera successivement :

- L'électrostatique des milieux polarisés.
- La phénoménologie des diélectriques linéaires.
- Les modèles microscopiques de diélectriques linéaires.
- L'optique cristalline incluant l'optique non linéaire.
- La ferroélectricité.
- La piézoélectricité.
- Les effets de couplage dans les diélectriques.

Dans chacun des chapitres l'exposé des aspects fondamentaux est suivi d'une présentation des différentes applications et des matériaux mis en œuvre.

RÉFÉRENCES

- [1] R. COELHO, B. ALADENIZE, *Les diélectriques : Propriétés diélectriques des matériaux isolants* (1993) Editions Hermes, Paris.

CHAPITRE 2

RAPPELS D'ÉLECTROSTATIQUE DU VIDE

Il ne s'agit là que de rappels réduits à l'essentiel. Pour un approfondissement, on pourra consulter par exemple l'ouvrage de Durand (cf. Bibliographie à la fin de l'ouvrage).

2.1. LOI DE COULOMB

La loi fondatrice de l'électrostatique est la loi de Coulomb qui exprime la force exercée entre deux charges ponctuelles q et q' distantes de r . Il est commode de la formuler par un ensemble de *deux* relations indissociables qui introduisent et définissent les notions de *charge* et de *champ* électriques.

1. Champ électrique créé au point M par la charge ponctuelle q placée en O :

$$\mathbf{E} = \frac{q \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (2.1)$$

le vecteur \mathbf{r} joint O à M .

2. Force subie par la charge q' placée en M :

$$\mathbf{F} = q'\mathbf{E}. \quad (2.2)$$

r est exprimé en mètres et q en Coulomb¹. L'unité de champ est alors le volt par mètre (système SI). La constante ϵ_0 , appelée perméabilité diélectrique du vide, vaut dans ce système $\epsilon_0 = 8,854187817 \times 10^{-12} \approx 10^{-9}/(36\pi)$.

1 Le coulomb est la charge transportée par un courant de 1 A pendant 1 seconde, l'ampère (A) étant défini par ailleurs à partir des effets électrodynamiques des courants.

2.2. CHAMP D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGES

Les champs produits par différentes charges ponctuelles s'ajoutent vectoriellement comme les forces à partir desquelles on les définit.

Pour un ensemble discret de charges ponctuelles q_i placées en \mathbf{r}_i , le champ créé en \mathbf{r} vaut donc :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (2.3)$$

Pour une distribution continue dans un volume v de charges de densité volumique ρ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.4)$$

Pour une distribution continue sur une surface S de densité surfacique σ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (2.5)$$

2.3. POTENTIEL

Les expressions (2.3)–(2.5) indiquent que le champ électrostatique le plus général est nécessairement la somme de *contributions radiales* associées à des sources ponctuelles. On vérifie que cela entraîne la conséquence suivante :

La circulation du champ \mathbf{E} créé par une distribution quelconque de charges, le long d'un chemin arbitraire entre deux *points donnés* P et M est *indépendante* de ce chemin. D'où l'intérêt de définir la *différence de potentiel* entre M et P :

$$V_M - V_P = - \int_P^M \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_M^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.6)$$

Noter que telle qu'on la définit, la différence de potentiel a le signe opposé à la circulation. On définit aussi le potentiel, au sens absolu, du point courant M en fixant P à l'infini. Mais attention, cette définition soulève des difficultés si la distribution de charges est elle même infinie :

$$V_M = - \int_{\infty}^M \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.7)$$

Il résulte de (2.6) ou (2.7) en posant $V = V_M - V_P$ ou $V = V_M$ que :

$$\mathbf{E}_M = -\text{grad}_M(V). \quad (2.8)$$

Une conséquence immédiate de (2.8) est que le champ électrique \mathbf{E} satisfait :

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (2.8 \text{ bis})$$

2.4. SIGNIFICATION DU POTENTIEL

Si l'on déplace une charge q entre P et M , le travail fourni par la force électrostatique est par définition :

$$\mathcal{T} = +q \int_P^M \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -q(V_M - V_P). \quad (2.9)$$

La différence de potentiel électrostatique entre M et P est donc *le travail que l'on doit fournir contre la force électrostatique* pour amener la charge positive unité de P à M . En particulier le potentiel en M est le travail qu'il faut fournir pour amener la charge positive unité de l'infini en M .

2.5. POTENTIEL D'UNE DISTRIBUTION DONNÉE DE CHARGES

On vérifie que le potentiel produit en M par une charge ponctuelle placée en O dépend de la distance $r = OM$ selon la relation :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.10)$$

Pour des distributions respectivement discrète et continue de charges (en volume de densité ρ et en surface de densité σ), on a immédiatement :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad (2.11)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho(\mathbf{r}') dv}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.12)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.13)$$

2.6. INDUCTION ÉLECTRIQUE DANS LE VIDE. THÉORÈME DE GAUSS

On définit le *vecteur induction électrique* dans le vide par la relation :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (2.14)$$

\mathbf{D} reste donc égal à \mathbf{E} à une constante multiplicative près et on pourrait s'interroger sur l'utilité de cette notion d'induction. On verra que son intérêt apparaît dans la définition générale propre aux *milieux polarisés* (voir chapitre 4).

L'induction créée par une charge ponctuelle q est immédiatement donnée par :

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.15)$$

et on vérifie que le flux de \mathbf{D} sortant de la sphère de rayon r centrée sur la charge est égal à q :

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = q \quad (2.16)$$

où \mathbf{n} est la normale à l'élément de surface dS dirigée vers l'extérieur. Cette relation se généralise non seulement pour une distribution quelconque de charges, mais également pour une surface fermée S quelconque :

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q. \quad (2.17)$$

Q est la charge totale contenue dans le volume limité par la surface S . C'est la relation de Gauss que l'on peut aussi écrire sans l'induction :

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \quad (2.18)$$

2.7. DISCONTINUITÉ DU CHAMP ET DE L'INDUCTION À LA TRAVERSÉE D'UNE SURFACE CHARGÉE

Considérons une surface séparant deux régions 1 et 2, et portant une densité surfacique de charges σ . Soit \mathbf{n}_{12} le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé de la région 1 vers la région 2. On applique le théorème de Gauss à la surface d'un cylindre de très faible hauteur et coupé en deux par la surface tel que le montre la figure 2.1. Comme on peut choisir la hauteur aussi petite que l'on veut, le flux sortant à travers la surface latérale du cylindre est négligeable. Si ΔS désigne l'aire des faces planes, et \mathbf{D}_{n_1} et \mathbf{D}_{n_2} les composantes de l'induction dans chacune des régions normales à la surface chargée, on peut écrire : $(\mathbf{D}_{n_2} - \mathbf{D}_{n_1}) \cdot \mathbf{n}_{12} \Delta S = \sigma \Delta S$, d'où :

$$(\mathbf{D}_{n_2} - \mathbf{D}_{n_1}) \cdot \mathbf{n}_{12} = \sigma \quad \text{et en conséquence} \quad (\mathbf{E}_{n_2} - \mathbf{E}_{n_1}) \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (2.19)$$

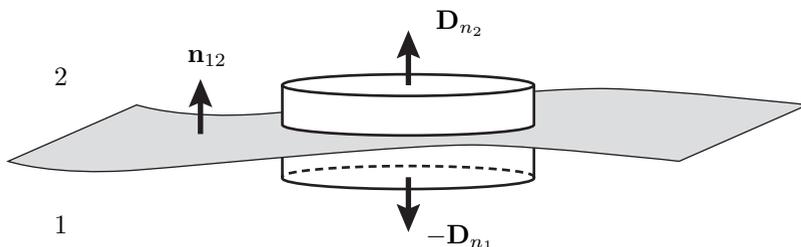


Figure 2.1 – Discontinuité de la composante normale de \mathbf{D} à la traversée d'une surface chargée. On applique le théorème de Gauss à la surface d'un cylindre infinitésimal très aplati dont les bases ont pour aire ΔS .

2.8. EQUATION DE POISSON

Dans le cas d'une distribution continue de charges, on a :

$$Q = \iiint_v \rho dv$$

et la relation (2.17) implique d'après un théorème bien connu d'analyse vectorielle (théorème d'Ostrogradski) :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (2.20)$$

Ce qui peut encore s'écrire sans l'induction :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.21)$$

Des relations (2.21) et (2.8), on déduit l'équation de Poisson :

$$\operatorname{div} (\mathbf{grad} V) = \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.22)$$

où $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ désigne (ici en coordonnées cartésiennes x, y, z) l'opérateur Laplacien.

2.9. EQUATION DE LAPLACE

Si $\rho = 0$, on a :

$$\Delta V = 0. \quad (2.23)$$

C'est l'équation dite de Laplace.

2.10. LES DIFFÉRENTS TYPES DE PROBLÈMES RENCONTRÉS EN ÉLECTROSTATIQUE DU VIDE

On rencontre deux classes extrêmes de problèmes :

- Détermination du potentiel et du champ créés par une *distribution donnée de charges*. On parle de problème à charges données.
- Détermination du potentiel et du champ créés par des charges a priori inconnues, mais distribuées de telle sorte que les potentiels sur des surfaces spécifiées sont connus. On parle de problèmes à potentiels donnés. Il faut réaliser que le potentiel V n'est donné que sur des surfaces et qu'il s'agit alors de le déterminer dans tout l'espace.

Dans les problèmes à charges données, le calcul du champ ou du potentiel est immédiat d'après les formules (2.3)–(2.5), (2.11)–(2.13). En mettant à profit les éventuelles

symétries de la distribution (invariance en translation, présence de plans et/ou d'axes de symétrie (voir Annexe A2 en fin de l'ouvrage)) on peut souvent gagner un temps considérable.

Dans les problèmes à potentiels donnés, la distribution de charges est inconnue et on ne peut pas utiliser les formules d'intégration précédentes. On peut par ailleurs se demander pourquoi cette deuxième catégorie de problèmes joue un rôle si particulier ? En d'autres termes pourquoi ces situations où le *potentiel* est donné sur une ou des *surfaces* sont-elles si importantes en pratique ?

Une réponse (partielle) se trouve dans *l'existence des matériaux conducteurs*. Les charges s'y déplacent librement, mais elles ne peuvent pas sortir du matériau conducteur en question. Ainsi, une région de l'espace occupée par un conducteur doit être considérée comme un volume contenant un nombre quasi infini² de charges libres susceptibles de se déplacer dès qu'elles sont soumises au moindre champ électrique. Par définition, l'état d'équilibre s'il existe, doit correspondre à l'immobilité totale de ces charges libres. Cela implique un *champ nul partout dans le conducteur*. Si le champ est nul dans le conducteur, le potentiel V est nécessairement constant et en particulier il est *constant à la surface* dudit conducteur.

Plaçons dans le vide un certain nombre de conducteurs, chacun étant repéré par un indice i et imposons³ $V = V_i$ sur le conducteur i . Le potentiel $V(\mathbf{r})$ en un point quelconque \mathbf{r} est alors $V(\mathbf{r}) = V_i$ si le point est sur (ou dans) le conducteur i . $V(\mathbf{r})$ est une fonction qui satisfait l'équation de Laplace si le point est dans le vide entre les conducteurs (fonction déterminée *de manière unique*⁴ par les conditions aux limites $V(\mathbf{r}) = V_i$ à la surface du conducteur i).

Là encore, on pourra utiliser avec profit les symétries de configuration pour simplifier l'analyse. On rencontrera plus loin des exemples concrets de ces deux catégories de problèmes. Bien entendu toutes les situations intermédiaires sont possibles, par exemple :

- Potentiels donnés sur des conducteurs avec des charges données distribuées dans l'espace entre les conducteurs.
- Conducteurs isolés portant des charges Q_i données (ici, ce qui est connu est la charge totale du conducteur i , mais évidemment pas sa répartition sur ledit conducteur!).

Dans le cas général, on aura à résoudre l'équation de Poisson (2.22) assortie des conditions aux limites sur les conducteurs. Dans les paragraphes suivants on examine quelques problèmes dont les solutions seront utiles dans la suite de l'ouvrage.

2 Bien entendu, le conducteur ne porte pas une charge infinie car il existe aussi des charges liées de signe contraire à celui des charges libres (exemple des métaux où les porteurs libres sont des électrons chargés négativement et les charges liées des ions positifs).

3 C'est une deuxième raison pour laquelle ces problèmes à potentiels donnés sont si importants en pratique : on *sait* imposer un potentiel ou plus exactement une différence de potentiel (entre deux conducteurs).

4 En vertu d'un théorème dit d'unicité que nous ne démontrerons pas ici.

2.11. CHAMP D'UN PLAN UNIFORMÉMENT CHARGÉ

On s'intéresse au champ créé par un plan infini (P) portant une densité surfacique uniforme σ de charges. On se place dans un repère cartésien tel que son origine soit sur le plan et que l'axe z soit perpendiculaire au plan. Le plan étant infini le champ ne dépend ni de x ni de y . En un point M de côte z donnée passe un axe de symétrie de rotation perpendiculaire au plan. Il en résulte que le champ ne peut être que selon cet axe c'est-à-dire parallèle à z . De plus le plan chargé étant plan de symétrie, on a : $E_z(-z) = -E_z(z)$. Pour déterminer ce champ il est pratique d'appliquer le théorème de Gauss à une surface cylindrique d'axe parallèle à z et dont les 2 faces circulaires planes (d'aire S) sont en z et $-z$, respectivement (figure 2.2). Le flux de \mathbf{E} ne traversant que les faces planes, on peut écrire :

$$2 E_z S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}. \quad (2.24)$$

On en déduit :

$$\mathbf{E}(z) = -\mathbf{E}(-z) = \frac{\sigma \mathbf{e}_z}{2\varepsilon_0} \quad (2.25)$$

où \mathbf{e}_z est le vecteur unitaire parallèle à z .

En définitive, le champ est indépendant de la distance au plan ! Noter qu'à la traversée du plan (P) le champ subit la discontinuité $\Delta E = \sigma/\varepsilon_0$ conformément à la règle générale (2.19).

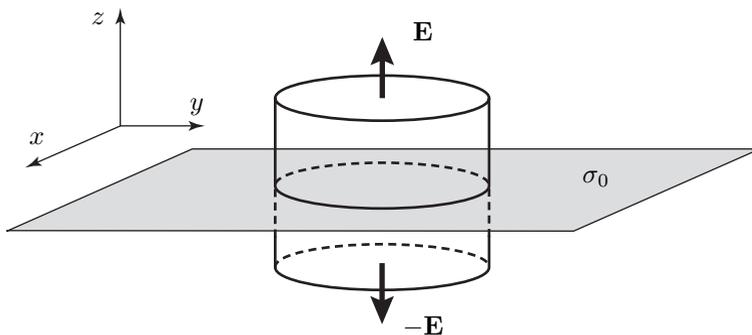


Figure 2.2 – Calcul du champ créé par un plan infini uniformément chargé : surface de Gauss. Ici le cylindre auquel on applique la relation de Gauss est de dimensions S et $2z$ finies.

2.12. CHAMP DE DEUX PLANS PARALLÈLES UNIFORMÉMENT CHARGÉS

On considère deux plans parallèles infinis distants de d et chargés de façon uniforme respectivement par les densités surfaciques $+\sigma$ et $-\sigma$ ($\sigma > 0$). On cherche le champ et le potentiel créés dans tout l'espace.

Le champ est la somme des contributions de chacun des plans données par (2.25). On vérifie donc très facilement, que le champ est nul partout sauf entre les deux plans parallèles où il vaut :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{e}_z. \quad (2.26)$$

En conséquence le potentiel est partout constant sauf dans l'espace inter-plan où il varie linéairement, les surfaces équipotentielles étant parallèles aux plans. On note qu'à la traversée de l'espace inter-plan le potentiel subit une variation $\Delta V = (\sigma d)/\varepsilon_0$.

2.13. DENSITÉ D'ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE

Dans le problème du paragraphe précédent, on peut calculer aisément la force par unité de surface qu'un plan exerce sur l'autre. Par exemple, le plan négatif crée au niveau du plan positif le champ $-\sigma \mathbf{e}_z/2\varepsilon_0$ et donc une pression d'attraction $\sigma^2/2\varepsilon_0$. Supposons que les deux plans soient initialement confondus ($d = 0$). Dans cette situation le champ est partout nul. Pour créer entre les deux plans l'écart d , il faut effectuer un travail contre la pression d'attraction égal à $\sigma^2 d/2\varepsilon_0$ par unité de surface de plan et donc égal à $\sigma^2/2\varepsilon_0$ par unité de volume de l'espace inter-plan. Rappelons que cette région de l'espace est alors la seule où règne un champ électrique égal à σ/ε_0 . On est ainsi conduit à admettre que l'énergie fournie lors de cette opération se retrouve stockée dans l'espace inter-plan, avec la densité volumique $\sigma^2/2\varepsilon_0 = \varepsilon_0 E^2/2$.

On montre que, d'une façon très générale, l'énergie d'un champ électrique quelconque dans le vide, c'est-à-dire le travail que l'on pourrait extraire de ce champ en l'annulant (voir exercice E2.8) ou inversement le travail qu'il faut fournir pour créer ledit champ, est l'intégrale étendue à tout l'espace d'une densité d'énergie électrostatique W donnée par :

$$W = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (2.27)$$

2.14. CHAMP D'UNE SPHÈRE UNIFORMÉMENT CHARGÉE EN VOLUME

On cherche le champ créé par une sphère de rayon R dans laquelle il existe une densité de charges volumique uniforme ρ .

L'origine est choisie au centre de la sphère. La symétrie sphérique entraîne que le champ \mathbf{E} est radial : $\mathbf{E} = E(r) \mathbf{r}/r$, si bien que l'application du théorème de Gauss à la sphère de rayon r donne immédiatement :

$$\begin{aligned} \text{-- pour } r < R : & \quad 4\pi r^2 \varepsilon_0 E(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \rho, \\ \text{d'où :} & \quad E(r) = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho r, \end{aligned} \quad (2.28)$$

– pour $r > R$:

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \rho = Q,$$

d'où :

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \quad (2.29)$$

On retrouve pour le champ à l'extérieur de la sphère celui d'une charge ponctuelle $Q = 4\pi R^3 \rho/3$ placée au centre de la sphère. La variation de E en fonction de r est reportée sur la figure 2.3.

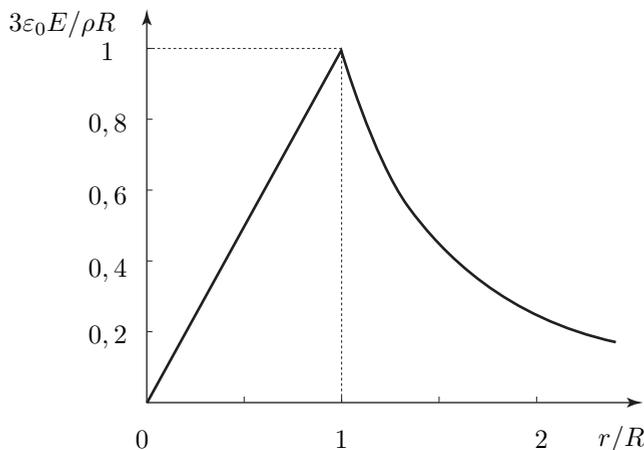


Figure 2.3 – Variation du champ créé par une sphère uniformément chargée en volume en fonction de la distance au centre.

2.15. SPHÈRE UNIFORMÉMENT CHARGÉE EN SURFACE

Cette situation diffère de la précédente en ce sens que la sphère de rayon R n'est chargée qu'en surface avec la densité uniforme σ . Que devient le champ? On cherche également la force à laquelle est soumise la sphère lorsqu'elle est placée dans un champ *inhomogène* produit par des charges extérieures.

La détermination du champ est immédiate d'après Gauss : champ nul à l'intérieur de la sphère et égal à celui d'une charge ponctuelle $Q = 4\pi R^2 \sigma$ à l'extérieur.

Pour calculer la force subie dans un champ appliqué inhomogène, on peut commencer par étudier l'interaction de la sphère (de charge Q) avec une seule charge ponctuelle q' placée à l'extérieur. En raison de l'égalité de l'action et de la réaction (que vérifie par construction la loi de Coulomb) et compte tenu du résultat qui précède, la force subie par la sphère est donnée par :

$$-\frac{Qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

où \mathbf{r} est le vecteur qui joint le centre de la sphère à la charge ponctuelle q' , ce qui peut encore s'écrire $Q \mathbf{E}(q')$ où $\mathbf{E}(q')$ est la *champ produit par q' au centre de la sphère*.

Annexes	351
Annexe 1. Equations de Maxwell	351
Annexe 2. Symétrie et direction du champ	352
Annexe 3. Convention adoptée pour la représentation complexe d'une onde	354
Annexe 4. Constantes universelles	354
Annexe 5. Tableau périodique des éléments	355
Annexe 6. Principaux symboles utilisés et unités	356
Annexe 7. Tableau des 32 classes cristallines	357
Annexe 8. Echelles des fréquences et longueurs d'onde	358
Bibliographie	359
Index	361
Table des matières	367

