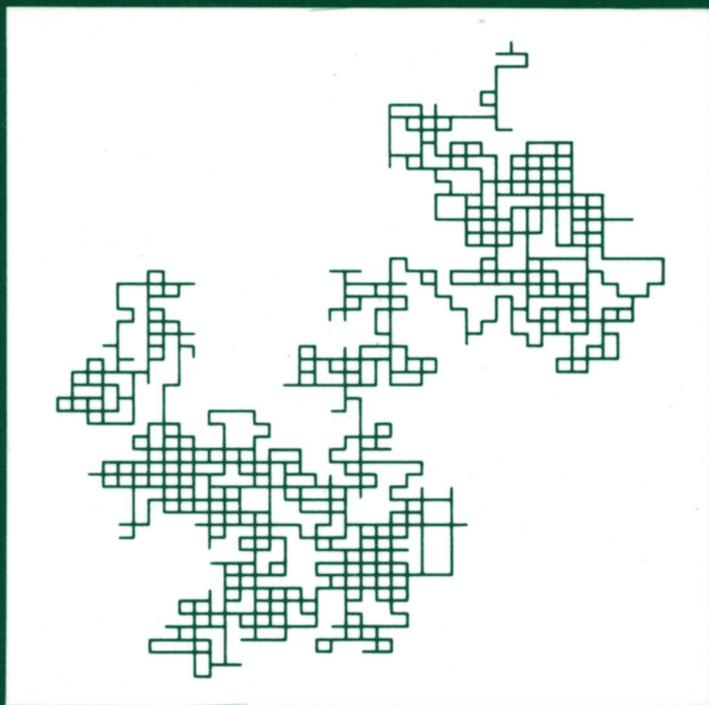


Claude Itzykson · Jean-Michel Drouffe

---

# Théorie statistique des champs 1



S A V O I R S     A C T U E L S

---

InterEditions/Editions du CNRS

Théorie statistique  
des champs  
1



Claude Itzykson · Jean-Michel Drouffe

---

# Théorie statistique des champs 1

S A V O I R S    A C T U E L S

---

InterEditions/Editions du CNRS

© 1989, **InterEditions**, 25, rue Leblanc, 75015 Paris.

et

**Editions du CNRS**, 1, Place Aristide Briand, 92195 Meudon.

Tous droits réservés. Aucun extrait de ce livre ne peut être reproduit, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit (machine électronique, mécanique, à photocopier, à enregistrer ou tout autre) sans l'autorisation écrite préalable de InterEditions.

ISBN 2-7296-0273-9

ISBN 2-222-04300-X

## TABLE DES MATIERES

|   |    |
|---|----|
| <b>Avant-propos</b> .....   | XI |
| <br>  |    |
| <b>Chapitre I – DU MOUVEMENT BROWNIEN AUX CHAMPS EUCLIDIENS</b> .....               | 1  |
| <br>  |    |
| <b>1. Mouvement brownien</b> .....  | 1  |
| 1.1 Marche au hasard .....  | 1  |
| 1.2 Somme sur les chemins .....   | 9  |
| 1.3 La dimension deux des courbes browniennes .....                                 | 11 |
| <b>2. Champs euclidiens</b> .....   | 21 |
| 2.1 Champ libre .....   | 21 |
| 2.2 Champs en interaction et marches aléatoires .....                               | 24 |
| 2.3 Marche au hasard avec retour exclu et limite $n \rightarrow 0$ ...              | 29 |
| 2.4 Développement de haute température .....  | 32 |
| 2.5 Le cas unidimensionnel .....  | 36 |
| <b>Appendice A. Réseaux</b> .....   | 42 |
| <b>Notes</b> .....  | 44 |
| <br>  |    |
| <b>Chapitre II – INTEGRALES DE GRASSMANN ET MODELE D'ISING BIDIMENSIONNEL</b> ..... | 47 |
| <br>  |    |
| <b>1. Intégrales de Grassmann</b> .....   | 47 |
| 1.1 Variables anticommutantes .....   | 47 |
| 1.2 Intégrales .....  | 51 |
| <b>2. Modèle d'Ising bidimensionnel</b> .....                                       | 57 |
| 2.1 Dualité .....   | 58 |
| 2.2 Matrice de transfert .....  | 60 |
| 2.3 Représentation fermionique .....  | 61 |
| 2.4 Energie libre .....   | 65 |
| 2.5 Aimantation spontanée .....   | 69 |
| 2.6 Fonction de corrélation .....   | 75 |
| 2.7 Tension superficielle .....   | 83 |
| <b>3. Théorie critique continue</b> .....   | 89 |
| 3.1 Action effective .....  | 90 |
| 3.2 Fonctions de corrélation .....  | 93 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Appendice A. Différences quadratiques et équations de Painlevé</b> .....                       | 95  |
| <b>Notes</b> .....  | 102 |
| <b>Chapitre III – BRISURE SPONTANEE DE SYMETRIE CHAMP MOYEN</b> .....                             | 105 |
| <b>1. Approximation de champ moyen</b> .....  | 105 |
| 1.1 Constante diélectrique d'un milieu polarisable .....  | 106 |
| 1.2 Modèle de spin classique - Symétrie discrète .....  | 109 |
| 1.3 Groupe continu d'invariance .....   | 115 |
| 1.4 L'approximation de Bethe .....  | 119 |
| 1.5 Exposants critiques .....   | 123 |
| <b>2. Singularités de Lee et Yang</b> .....   | 129 |
| 2.1 Le théorème de Lee et Yang .....  | 129 |
| 2.2 Cas unidimensionnel .....   | 133 |
| 2.3 Propriétés générales .....  | 134 |
| 2.4 Racines dans le plan des températures .....   | 136 |
| <b>3. La limite <math>n \rightarrow \infty</math></b> .....                                       | 138 |
| 3.1 La méthode du col .....   | 138 |
| 3.2 Factorisation .....   | 142 |
| 3.3 Solution en champ extérieur .....   | 145 |
| <b>4. Corrections au champ moyen</b> .....  | 148 |
| 4.1 Transformée de Laplace .....  | 149 |
| <b>Notes</b> .....  | 156 |
| <b>Chapitre IV – LOIS D'ECHELLE – MODELE XY</b> .....   | 159 |
| <b>1. Lois d'échelle. Transformations de renormalisation dans l'espace de configuration</b> ..... | 159 |
| 1.1 Homogénéité et invariance d'échelle .....   | 159 |
| 1.2 Relations de récurrence .....   | 165 |
| 1.3 Exemples et approximations .....  | 172 |
| 1.3.1 Décimation unidimensionnelle .....  | 173 |
| 1.3.2 Déplacement des liens .....   | 175 |
| 1.3.3 Règle majoritaire .....   | 180 |
| 1.3.4 Amplitudes critiques .....  | 186 |
| <b>2. Le modèle XY</b> .....  | 189 |
| 2.1 Comportement à haute température .....  | 192 |
| 2.2 Développement de basse température. Tourbillons .....   | 193 |
| 2.3 L'action de Villain .....   | 200 |
| 2.4 Corrélations .....  | 204 |
| 2.5 Flot de renormalisation .....   | 209 |
| <b>Appendice A. Systèmes bidimensionnels à symétrie continue</b> .....                            | 215 |
| A.1 Inégalité sur l'aimantation .....   | 215 |
| A.2 Inégalité sur les corrélations .....  | 218 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Appendice B. Renormalisation phénoménologique</b> ..... | 220 |
| <b>Notes</b> .....   | 226 |
| <b>Chapitre V – GROUPE DE RENORMALISATION</b> ....         | 229 |
| <b>1. Lagrangien et analyse dimensionnelle</b> .....       | 229 |
| 1.1 Présentation .....                                     | 229 |
| 1.2 Fonctions génératrices et analyse dimensionnelle ..... | 232 |
| <b>2. Méthode perturbative</b> .....                       | 237 |
| 2.1 Série diagrammatique .....                             | 237 |
| 2.2 Classement topologique .....                           | 241 |
| 2.3 Prolongement dimensionnel .....                        | 245 |
| 2.4 Facteurs associés à un groupe d'invariance .....       | 254 |
| 2.5 Comptage de puissances .....                           | 256 |
| 2.6 Renormalisation perturbative .....                     | 259 |
| <b>3. Groupe de renormalisation</b> .....                  | 265 |
| 3.1 Flot de renormalisation .....                          | 265 |
| 3.2 Exposants critiques .....                              | 273 |
| 3.3 Du point fixe gaussien au point critique .....         | 276 |
| 3.4 Fonctions de corrélation au point critique .....       | 278 |
| 3.5 Développement au voisinage du point critique .....     | 284 |
| 3.6 Lois d'échelle pour $T < T_c$ .....                    | 290 |
| <b>4. Corrections aux lois d'échelle</b> .....             | 295 |
| 4.1 Déviation au point critique .....                      | 295 |
| 4.2 Corrections logarithmiques en dimension quatre .....   | 297 |
| 4.3 Opérateurs inessentiels .....                          | 300 |
| <b>5. Résultats numériques</b> .....                       | 304 |
| 5.1 Développement en $\epsilon$ .....                      | 304 |
| 5.2 Equation d'état .....                                  | 306 |
| 5.3 Rapports d'amplitudes .....                            | 308 |
| 5.4 Résultats tridimensionnels .....                       | 310 |
| <b>Appendice A. Points multicritiques</b> .....            | 311 |
| <b>Notes</b> .....   | 319 |
| <b>Chapitre VI – CHAMPS DE JAUGE SUR RESEAU</b> ....       | 321 |
| <b>1. Généralités</b> .....                                | 321 |
| 1.1 Présentation .....                                     | 321 |
| 1.2 Limite continue .....                                  | 325 |
| 1.3 Paramètre d'ordre et théorème d'Elitzur .....          | 333 |
| 1.4 Dualité .....  | 336 |
| <b>2. Structure du diagramme de phase</b> .....            | 342 |
| 2.1 La solution de champ moyen .....                       | 342 |
| 2.2 Corrections au champ moyen .....                       | 348 |
| 2.3 Groupes discrets: développement en $1/d$ .....         | 351 |
| 2.4 Groupes continus: calcul des corrections .....         | 353 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>3. Développement de couplage fort</b> .....          | 357 |
| 3.1 Convergence .....                                   | 357 |
| 3.2 Développement en caractères .....                   | 361 |
| 3.3 Energie libre .....                                 | 366 |
| 3.4 La tension de corde et la transition rugueuse ..... | 370 |
| 3.5 Le spectre de masse .....                           | 375 |
| <b>4. Fermions sur réseaux</b> .....                    | 378 |
| 4.1 Le problème du doublement .....                     | 378 |
| 4.2 Le théorème de Nielsen–Ninomiya .....               | 381 |
| 4.3 Fermions de Kogut–Susskind .....                    | 383 |
| <b>Notes</b> .....                                      | 386 |
| <br>  |     |
| <b>INDEX</b> .....                                      | 389 |

## Avant-propos

La théorie quantique des champs vise à décrire les interactions fondamentales dans un cadre unique conciliant les principes de la mécanique quantique et les invariances géométriques et cinématiques. Cette discipline s'est enrichie, au cours des deux dernières décennies, d'applications insoupçonnées, qui tiennent à la parenté de ses méthodes avec celles de la physique statistique, à travers l'étude des phénomènes critiques ou des modèles de physique du solide. Certains développements ont permis de s'affranchir en partie des techniques perturbatives, qui sont à la source de succès considérables dans le domaine des interactions électromagnétiques et faibles. En jetant un jour nouveau sur le rôle du groupe de renormalisation, en permettant d'aborder des questions comme le confinement des constituants dans la chromodynamique, en s'ouvrant aux possibilités de simulation numérique, en découvrant des problèmes nouveaux comme ceux posés par la théorie des cordes quantiques, la théorie des champs s'est entièrement renouvelée.

Nous nous sommes attachés à en donner un panorama complétant un texte précédent sur la théorie quantique des champs écrit par l'un des auteurs en collaboration avec J.-B. Zuber. Bien qu'on suppose du lecteur qu'il possède quelques rudiments de cette théorie, le présent ouvrage veut éviter de faire de trop nombreux appels à des connaissances extérieures et s'inscrit dans le cadre d'un enseignement destiné à de jeunes chercheurs et, plus généralement, à des scientifiques intéressés par les progrès de cette discipline. L'abondance des matières, le rythme rapide des nouvelles contributions et les compétences limitées des auteurs ont cependant posé des bornes à l'ensemble des sujets traités.

Si l'on veut bien admettre ces limites, nous avons cependant tenté de décrire les fondements de la théorie euclidienne des champs, reposant sur l'usage des intégrales de chemins de Feynman et concrètement réalisée à travers les modèles statistiques qui utilisent un réseau discret, dont le paradigme est le modèle d'Ising. Ce point de vue permet d'attribuer un sens global aux quantités physiques, d'étudier des régimes de couplage fort, suggère l'existence de transitions de phases et montre le rôle du groupe de renormalisation agissant comme filtre des propriétés universelles au voisinage des théories critiques continues.

Le premier volume est consacré pour l'essentiel à l'illustration de ces thèmes. Il s'ouvre par une étude des chemins aléatoires et leur relation avec les champs bosoniques, et introduit les intégrales fermioniques sur l'exemple du modèle d'Ising bidimensionnel. Il expose la méthode du champ moyen, les propriétés relatives à l'invariance d'échelle, et illustre les idées de la renormalisation dans le cadre de la transition de Kosterlitz et Thouless du modèle des rotateurs. Un long chapitre est consacré à la théorie des transitions de phases continues à partir des idées de Wilson, où nous nous sommes appuyés sur les contributions de nos collègues E. Brézin, J.-C. Le Guillou et J. Zinn-Justin. C'est encore à Wilson qu'on doit la formulation des théories de champs de jauge sur réseau et leurs applications à la chromodynamique et au confinement dont la présentation clos la première partie.

Le second volume est plus éclectique. On y trouve d'abord des indications sur les développements de haute ou basse température et les applications des simulations numériques de Monte Carlo, en particulier à la chromodynamique. Un copieux chapitre décrit les résultats récents concernant les systèmes critiques bi-dimensionnels, dans le cadre des théories conformes, qui servent aussi d'outil à la théorie des cordes quantiques. Nous discutons ensuite les applications de l'intégration fermionique à des systèmes désordonnés simples. Enfin le dernier chapitre expose quelques résultats de géométrie aléatoire et introduit l'étude des surfaces fluctuantes.

Dans la première partie, au risque de répétitions, nous nous sommes efforcés de présenter le sujet de manière aussi élémentaire que possible. Nous ne supposons du lecteur qu'une certaine familiarité avec la notion de poids statistique de Gibbs, ainsi qu'avec la représentation des amplitudes de transition quantiques comme superpositions relatives à toutes les évolutions possibles, affectées d'un poids exponentiel dans l'action. C'est précisément ce parallélisme qui est à la source des convergences évoquées précédemment.

Le choix des sujets traités et les nombreuses omissions reflètent les intérêts des auteurs et leurs préoccupations. Nous ne sommes que trop conscients de nombreuses lacunes dont la liste serait à l'origine d'un texte encore plus volumineux. Il est quelque peu dangereux de vouloir systématiser ce que l'on a cru comprendre sans laisser percer deci-delà des ignorances. Il est bon de comprendre à quel point la recherche débouche sur des problèmes ouverts, des questions en suspens, des interrogations. Comprendre nécessite le plus souvent que l'on reprenne la plume, que l'on retrace les étapes d'un raisonnement, que l'on refasse un calcul, que d'une façon générale on ne se satisfasse jamais de ce que l'on trouve écrit ou dit ici et là.

Malgré tous nos efforts, et ils s'étaient hélas sur une trop longue période, il nous a été difficile, voire impossible, de polir suffisamment notre texte pour éviter les notations conflictuelles, fruit de l'usage, les erreurs matérielles, voire les erreurs tout court. Comme il est rituel, nous invitons le lecteur patient à les redresser et à nous en faire part. Nous espérons cependant que ces défauts inévitables ne nuisent pas trop à la compréhension de

l'ouvrage, même si une quantité change parfois de symbole de chapitre en chapitre, ou si la même lettre désigne dans des paragraphes voisins deux entités distinctes.

Nous avons inclus des passages en petits caractères, concernant des compléments, des explications et quelquefois des exercices, le plus souvent résolus. En outre, quelques appendices constituent de (trop) brefs résumés de sujets qu'il n'était pas possible de présenter en détail. Enfin des notes bibliographiques complètent chacun des chapitres et sont destinées à indiquer nos sources, fournir des jalons, et surtout à encourager le lecteur à poursuivre son étude dans les articles originaux ou de revue. Ces notes sont évidemment très incomplètes.

Parmi les textes qui servent de références, figurent bien entendu ceux de la série publiée par C. Domb et M.S. Green, et maintenant J. Lebowitz, intitulée *Phase Transitions and Critical Phenomena*, publiée par Academic Press (New York). En ce qui concerne la mécanique statistique, citons K. Huang, *Statistical Mechanics*, J. Wiley and Sons, New York (1963), H.E. Stanley *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford University Press (1971), S.K. Ma *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin New York (1976) et *Statistical Mechanics*, World Scientific, Singapour (1985), D.J. Amit *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, World Scientific, Singapour (1984).

Tandis que nous préparions cette édition sont venus s'ajouter plusieurs ouvrages traitant des mêmes sujets. Il s'agit tout d'abord du livre de M. Le Bellac *Des phénomènes critiques aux champs de jauge, une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*, publié dans la même collection par InterEditions, Editions du CNRS Paris (1988) et de ceux de G. Parisi *Statistical Field Theory*, Addison Wesley, New York (1988) et S. Polyakov *Gauge Fields and Strings*, Harwood (1988). Enfin un traité de J. Zinn-Justin devrait paraître sous peu.

La référence classique où l'on trouve un traitement des intégrales de chemins est R.P. Feynman et A.R. Hibbs *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Mc Graw Hill, New York (1965). Des aspects variés sont discutés dans C. Itzykson et J.-B. Zuber *Quantum Field Theory*, Mc Graw Hill, New York (1980), P. Ramond *Field Theory, A Modern Primer*, Benjamin, Cummings, Reading, Mass. (1981), J. Glimm et A. Jaffe *Quantum Physics*, Springer, New York (1981). De nombreux progrès récents de la théorie des champs qui n'ont pas trouvé place dans notre traitement sont présentés dans S. Coleman *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press (1985), S. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino et E. Witten *Current Algebra and Anomalies*, World Scientific, Singapour (1985). Pour s'initier aux systèmes intégrables, on consultera R. Baxter *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, New York (1982) et M. Gaudin *La Fonction d'Onde de Bethe*, Masson, Paris (1983). Bien entendu cette liste n'est qu'indicative et l'on trouve de nombreuses autres références dans les notes.

L'un des auteurs (C.I.) remercie ses collègues qui lui ont fourni l'occasion d'enseigner des parties de cet ouvrage dans le cadre du Troisième cycle de Suisse Romande à Lausanne, du Département de Physique de l'Université de Louvain la Neuve, du Troisième cycle de Physique Théorique à Marseille et à Paris, où les deux auteurs ont eu l'opportunité de participer à l'enseignement. Nos remerciements vont aux secrétaires de ces institutions qui ont pris part à la frappe des divers textes préliminaires, ainsi qu'à toutes celles et tous ceux qui ont permis la réalisation finale, à Dany Bunel et Sylvie Zaffanella qui ont eu la lourde charge de mettre au point le manuscrit, à M. Leduc qui a accueilli ce livre dans sa collection.

Nous remercions chaleureusement les chercheurs et amis du Service de Physique Théorique à Saclay qui au cours des années ont été nos interlocuteurs et collaborateurs et qui sont trop nombreux pour être tous cités ici.

Enfin le Commissariat à l'Energie Atomique et son Institut de Recherche Fondamentale nous ont toujours offert des conditions de travail d'une qualité difficile à égaler. C'est en quelque sorte témoigner de notre gratitude que de dédier ce livre aux futurs chercheurs. C'est aussi la raison pour laquelle nous sommes heureux de bénéficier d'une édition française grâce au concours du Centre National de la Recherche Scientifique. Bien souvent il nous est arrivé d'hésiter sur une formulation, simplement parce que nous avons perdu l'habitude de nous exprimer dans notre langue et que nous cherchions un précédent impossible à trouver, tant la langue anglaise a fini par envahir toutes les publications dans notre domaine. S'il n'est pas souhaitable de retourner à l'époque de la tour de Babel et si l'on ne peut espérer revenir aux siècles où le français était une langue scientifique universelle, du moins peut-on souhaiter maintenir un vocabulaire et une capacité d'exprimer les idées contemporaines dans sa propre langue. Sans prétendre aux effets de style, nous nous sommes attachés à trouver une terminologie simple qui puisse rendre compte de concepts nouveaux et nous nous associons à tous les efforts, heureusement de plus en plus nombreux, pour maintenir une langue scientifique vivante.

Saclay, Février 1989

### Avertissement

Dans cet ouvrage, nous avons utilisé les notations internationales. Ainsi, les nombres décimaux ont un point décimal plutôt qu'une virgule,  $\ln$  représente le logarithme népérien,  $\tan$  la tangente,  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\tanh$  les lignes hyperboliques, etc.

# CHAPITRE I

## DU MOUVEMENT BROWNIEN

### AUX CHAMPS EUCLIDIENS

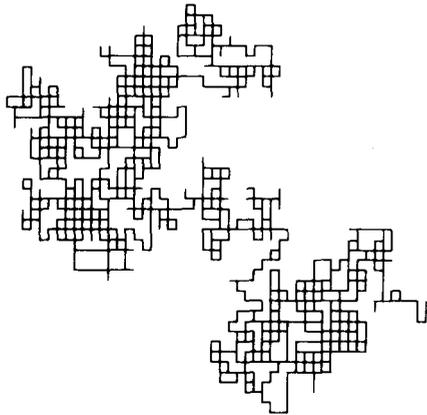
On sera peut-être surpris de nous voir entreprendre cette étude par une description du mouvement brownien. Ce sujet constitue pourtant une introduction naturelle au concept de champ euclidien quantique, comme on le verra par la suite, et permet de donner une interprétation intuitive qui met en relief le rôle joué par la dimensionalité. Les courbes browniennes ont une dimension effective égale à deux (leur dimension de Hausdorff). Ce fait est particulièrement riche d'informations. Il signifie, entre autres, que deux courbes de ce type ne peuvent se couper, donc interagir, si la dimension est supérieure à quatre. C'est ce que nous montrons dans la première partie du chapitre I, où nous discutons aussi le passage d'une version discrète, c'est-à-dire faisant intervenir un réseau, à une marche dans l'espace continu. Nous présentons dans la deuxième partie une analyse semblable pour les champs en interaction, initialement développée par K. Symanzik. Cette analyse est reliée aux développements de couplage fort, ou encore à haute température, qui seront étudiés plus loin, en particulier au chapitre VI de ce volume et au chapitre VII du deuxième volume. L'utilisation des champs à  $n$  composantes fournit le moyen d'introduire les marches avec retour exclu, grâce à l'artifice d'un prolongement dans la variable  $n$  et un passage à la limite  $n \rightarrow 0$ . Nous concluons ce chapitre par une discussion des systèmes élémentaires à une dimension. Ceci nous offre l'occasion de présenter le concept de matrice de transfert.

## 1. Mouvement brownien

### 1.1 Marche au hasard

Considérons une marche au hasard sur un réseau régulier et infini de l'espace euclidien à  $d$  dimensions. Chaque point du réseau possède  $q$  voisins;  $q$  est appelé le nombre de coordination du réseau. A intervalles de temps réguliers  $\Delta t = 1$ , un marcheur choisit de quitter le point qu'il occupe pour l'un de ses voisins, choisi au hasard. La probabilité de le retrouver à l'un quelconque des points voisins est  $1/q$ . Les déplacements successifs sont indépendants. Pour simplifier, nous choisissons un réseau (hyper)cubique

engendré par  $d$  vecteurs de translation orthogonaux  $\mathbf{e}_{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{(d)}$  tels que  $\mathbf{e}_{(\mu)} \cdot \mathbf{e}_{(\nu)} = \delta_{\mu\nu}$ . Les points seront notés  $\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_{(\mu)}$ , les coordonnées  $x^\mu$  étant des entiers. Pour un tel réseau, on a  $q = 2d$ . La figure 1 donne une illustration pour une marche au hasard de 2000 pas en dimension deux. Notez la présence des grands domaines où le marcheur a visité tous les points.



**Figure 1 :** Marche au hasard de 2000 pas en dimension 2.

Cherchons en premier lieu à déterminer la probabilité conditionnelle  $P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0)$  qu'a le marcheur d'être au point  $\mathbf{x}_1$  au temps  $t_1$  sachant qu'il était au point  $\mathbf{x}_0$  au temps  $t_0$ . Pour  $t_1 = t_0$ , on a

$$P(\mathbf{x}_1, t_0; \mathbf{x}_0, t_0) = \delta_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0} \quad (1)$$

Le symbole  $\delta_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0}$  est une notation compacte pour le produit  $\prod_{\mu=1}^d \delta_{x_1^\mu, x_0^\mu}$ . La probabilité  $P$  n'a de sens que pour  $t_1 \geq t_0$  et ne dépend que des différences  $t_1 - t_0$ ,  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ , le processus étant invariant par translation dans le temps et dans l'espace. A  $t_1$  fixé, la condition de normalisation s'écrit

$$\sum_{\mathbf{x}_1} P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = 1 \quad (2)$$

Chacune des probabilités  $P$  est positive ou nulle.

La formulation discrète, adoptée ici, dépend fortement du choix du réseau. Par exemple si  $t_1 - t_0$  est pair (impair) le marcheur ne peut se trouver que sur un site dont la somme des coordonnées de  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$  est paire (impaire). Nous serons cependant intéressés par des caractéristiques asymptotiques qui ne dépendent plus de la structure du réseau.

Il existe une relation linéaire de récurrence entre les probabilités  $P$  au temps  $t$  et  $t + 1$  qui exprime que le marcheur ne peut atteindre le point  $\mathbf{x}$  au temps  $t + 1$  que s'il était en un site voisin  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \pm \mathbf{e}_{(\mu)}$  au temps  $t$

$$P(\mathbf{x}, t+1; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{2d} \sum_{\substack{\mathbf{x}' \\ \text{voisin de } \mathbf{x}}} P(\mathbf{x}', t; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (3)$$

Cette relation généralise évidemment la construction du triangle arithmétique de Pascal correspondant au cas  $d = 1$ . Les équations (1) et (3) déterminent alors  $P$ . Nous l'illustrons sur la figure 2 pour un cas bidimensionnel.

| $t = 0$ | $t = 1$ | $t = 2$   | $t = 3$       |
|---------|---------|-----------|---------------|
|         |         | 1         | 1             |
|         | 1       | 2 . 2     | 3 . 3         |
| 1       | 1 . 1   | 1 . 4 . 1 | 1 . 9 . 9 . 1 |
|         | 1       | 2 . 2     | 3 . 3         |
|         |         | 1         | 1             |
| 1       | 4       | 16        | 64            |

**Figure 2 :** Probabilités relatives pour une marche au hasard en dimension 2 sur un réseau carré. Le facteur de normalisation est  $4^{-t}$ .

L'équation (3) introduit une version discrétisée de l'opérateur laplacien que nous noterons  $\Delta_r$ ,

$$\Delta_r f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2d} \sum_{\mu=1}^d [f(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{(\mu)}) + f(\mathbf{x} - \mathbf{e}_{(\mu)}) - 2f(\mathbf{x})] \quad (4)$$

ce qui permet de récrire

$$P(\mathbf{x}, t+1; \mathbf{x}_0, t_0) - P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \Delta_r P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (5)$$

approximation aux différences finies de l'équation de diffusion dans le continu

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) P = 0 \quad (6)$$

La solution des équations (3) ou (5) s'obtient par transformation de Fourier. Notant

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{P}(\mathbf{k}, t) \quad (7)$$

nous trouvons

$$\tilde{P}(\mathbf{k}, t+1) = \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos k_{\mu} \tilde{P}(\mathbf{k}, t), \quad \text{avec } \tilde{P}(\mathbf{k}, t_0) = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0}$$

On en déduit

$$P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)} \left( \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos k_{\mu} \right)^{t_1 - t_0} \quad (8)$$

Nous voulons maintenant examiner ces expressions avec une résolution grossière relativement au pas du réseau et pour des temps suffisamment longs. Il est commode pour cela de faire un changement d'échelle sur les vecteurs de base en introduisant une longueur élémentaire  $a$ , de sorte que  $\mathbf{e}_{(\mu)} \cdot \mathbf{e}_{(\nu)} = a^2 \delta_{\mu\nu}$  et de considérer que l'intervalle de temps élémentaire est  $\tau$  au lieu de 1. Dans les représentations précédentes il faut alors faire les substitutions  $t \rightarrow t/\tau$ ,  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/a$  et  $\mathbf{k} \rightarrow a\mathbf{k}$ , ce qui revient à

$$P(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, t_1 - t_0) = a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)} \left( \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos ak_{\mu} \right)^{(t_1 - t_0)/\tau} \quad (9)$$

Nous voulons maintenant faire tendre  $a$  et  $\tau$  vers zéro, en maintenant les distances et les intervalles de temps fixes. La probabilité de trouver le marcheur au voisinage de  $\mathbf{x}_1$ , dans un volume  $\Delta x$  suffisamment grand par rapport à la maille  $a^d$ , mais suffisamment petit pour que  $P$  ne varie pas de façon appréciable à l'intérieur de  $\Delta x$  (ce qui implique  $(t_1 - t_0)/\tau$  grand), est donnée par

$$p(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, t_1 - t_0) \Delta x = \sum_{\mathbf{x}'_1 \in \mathbf{x}_1 + \Delta x} P(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_0; t_1 - t_0) \approx \frac{\Delta x}{a^d} P(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, t_1 - t_0) \quad (10)$$

La densité de probabilité  $p = P/a^d$  est alors

$$p(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, t_1 - t_0) = \lim_{a, \tau \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)} \left( \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos ak_{\mu} \right)^{(t_1 - t_0)/\tau} \quad (11)$$

La limite n'a de sens que pour  $a$  et  $\tau$  tendant vers zéro de telle sorte que  $\tau/a^2$  reste fini, comme on le voit en développant le cosinus

$$\left( \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos ak_{\mu} \right)^{(t_1-t_0)/\tau} = \left( 1 - \frac{a^2}{2d} \mathbf{k}^2 + \dots \right)^{(t_1-t_0)/\tau} \rightarrow e^{-(t_1-t_0)\mathbf{k}^2} \quad (12)$$

où nous avons choisi une échelle de temps en posant

$$\tau = \frac{1}{2d} a^2 \quad (13)$$

Dans ces conditions

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, t_1 - t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \exp[-(t_1 - t_0)\mathbf{k}^2 + i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{k}] \\ &= \frac{1}{[4\pi(t_1 - t_0)]^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^2}{4(t_1 - t_0)}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

Nous reconnaissons le noyau caractéristique de l'équation de la diffusion dans le continu. Ce noyau positif, symétrique, satisfait aux relations

$$\int d^d \mathbf{x} p(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 1 \quad (15a)$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} p(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = \delta^d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \quad (15b)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) p(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad (15c)$$

$t_2 > t_1 > t_0 \Rightarrow$

$$\int d^d \mathbf{x}_1 p(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) p(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = p(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (15d)$$

La condition (15a) exprime la conservation des probabilités; elle généralise au continu l'équation (2) établie pour le cas discret; (15b) redonne la condition initiale en mesure, malgré les approximations faites. Quant à (15c) c'est l'équation de diffusion. Enfin (15d) traduit le fait qu'à un temps intermédiaire  $t_1$  compris entre  $t_0$  et  $t_2$  le marcheur qui a la mémoire (très) courte se trouvait quelque part. Cette dernière relation, caractéristique d'un processus Markovien est en accord avec la propriété de convolution des intégrales gaussiennes et nous permettra d'obtenir par la suite une représentation en terme d'intégrale sur les chemins, pendant continu d'une propriété analogue sur le réseau.

Avant d'élaborer ce point, revenons à la limite (11) ce qui nous a permis de trouver une loi de diffusion (14) isotrope et invariante par translation, fonction de  $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^2$ , à partir d'une variante discrète qui ne possédait

que les symétries cubiques. Ce faisant, nous avons fixé les intervalles de temps  $t_1 - t_0$  et les distances  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$  physiques et nous avons considéré que les mailles spatiales  $a$  et temporelle  $\tau$  tendaient vers zéro, le rapport  $\tau/a^2$  restant fixé. En toute rigueur, il fallait que les coordonnées de  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$  et  $t_1 - t_0$  soient des multiples de  $a$  et  $\tau$  respectivement. Nous aurions bien sûr pu procéder à l'inverse en faisant tendre  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$  et  $t_1 - t_0$  vers l'infini à l'échelle des mailles, mais la visualisation en aurait souffert. La première démarche rappelle la limite ultraviolette en théorie des champs où un facteur de coupure (proportionnel ici à  $a^{-1}$  dans une échelle de nombre d'onde) tend vers l'infini, les quantités mesurables étant maintenues constantes. Dans le cas présent nous avons aussi utilisé un facteur de coupure  $\tau^{-1}$  dans les fréquences, avec la relation  $\tau^{-1} \sim a^{-2}$ . Une interprétation que nous développerons plus loin est que la courbe brownienne typique a une "dimension" égale à deux. On parle de dimension de Hausdorff. La courbe étant parcourue à vitesse constante (les intervalles entre sauts sont égaux à  $\tau$ ), sa longueur est proportionnelle à  $t_1 - t_0$ , la distance typique parcourue n'étant que de l'ordre  $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| \sim (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}}$ . De manière imagée, si avec une quasi-certitude l'ensemble des courbes browniennes issues d'un point sont contenues dans un (hyper) volume  $\Omega$  et si on fait croître leur longueur  $t_1 - t_0$  d'un facteur  $\lambda$ , le nouveau volume nécessaire pour les contenir aura une taille  $\lambda^{d/2}\Omega$ . Si on définit un exposant  $\nu$  caractérisant la distance bord à bord selon

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| \sim (t_1 - t_0)^\nu \quad (16)$$

alors la valeur de  $\nu$  pour le mouvement brownien est

$$\nu = \frac{1}{2} \quad (17)$$

premier exemple simple d'*exposant critique*. Nous reviendrons souvent sur cette notion dans les chapitres qui suivent.

A vrai dire, l'explication la plus élémentaire du résultat (16)-(17) est le théorème central limite en théorie des probabilités. Les pas successifs sont des variables aléatoires non corrélées et l'écart quadratique moyen de la somme des distances ne croît que comme le nombre de termes, c'est-à-dire le nombre de pas.

Vérifier que la marche au hasard sur un réseau bidimensionnel triangulaire conduit à la même limite continue (14) que celle sur un réseau carré.

Sur un réseau triangulaire chaque point a  $q = 6$  voisins. Il est commode, comme on le voit sur la figure 3, d'utiliser une base redondante de 3 vecteurs  $\mathbf{e}_{(i)}$  tels que  $\sum \mathbf{e}_{(i)} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{e}_{(i)}^2 = 1$ ,  $\mathbf{e}_{(i)} \cdot \mathbf{e}_{(j)} = -\frac{1}{2}$  ( $i \neq j$ ). La probabilité conditionnelle que le marcheur soit au point  $\mathbf{x}$  au temps  $t + 1$  est donnée par

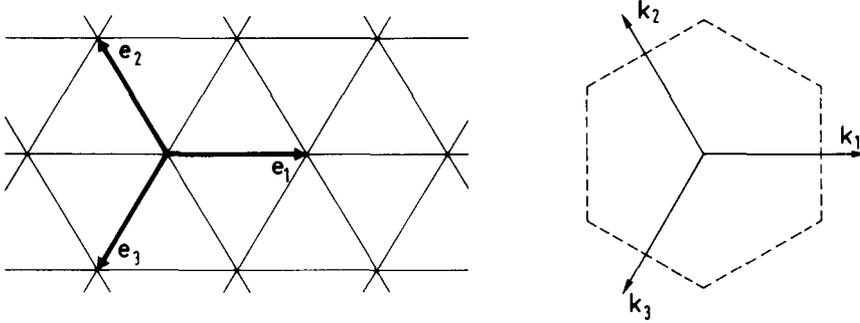


Figure 3 : Le réseau triangulaire et sa première zone de Brillouin.

$$P(\mathbf{x}, t + 1) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 P(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{(i)}, t) + P(\mathbf{x} - \mathbf{e}_{(i)}, t)$$

Les points du réseau sont repérés par trois entiers  $\{n_i\}$ , avec  $\mathbf{x} = \sum n_i \mathbf{e}_{(i)}$ . On peut ajouter une constante aux  $n_i$  sans changer  $\mathbf{x}$ . De même la grandeur conjuguée  $\mathbf{k} = \sum k_i \mathbf{e}_{(i)}$  est caractérisée par trois nombres  $k_i$ , auxquels on impose la condition supplémentaire  $\sum k_i = 0$ . On a donc

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \frac{3}{2} \sum k_i n_i \quad , \quad \mathbf{k}^2 = \frac{3}{2} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$$

Le domaine d'intégration dans la variable  $\mathbf{k}$  est l'hexagone  $|k_i| < \pi$ , dont l'aire est  $2\pi^2\sqrt{3}$ . Ceci conduit à

$$P(\mathbf{x}, t) = \int_{\text{hexagone}} \frac{d^2\mathbf{k}}{2\pi^2\sqrt{3}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left[ \frac{1}{3} \left( \cos \frac{3}{2} k_1 + \cos \frac{3}{2} k_2 + \cos \frac{3}{2} k_3 \right) \right]^t$$

Changeons maintenant d'échelle selon la règle  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/a$ ,  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}a$ ,  $t \rightarrow t/\tau$ ,  $t = a^2/8$ , nous obtenons alors, à la limite  $a \rightarrow 0$  le même résultat que précédemment

$$p(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{-t\mathbf{k}^2 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{4\pi t} e^{-\mathbf{x}^2/4t}$$

en utilisant le fait qu'il y a  $2\Delta x/a^2\sqrt{3}$  points du réseau dans une portion d'aire  $\Delta x$ . Ce résultat confirme l'universalité de la limite isotrope.

En dimension arbitraire cette construction peut être considérée comme la projection de la base orthonormée d'un réseau hypercubique à  $(d + 1)$  dimensions sur l'hyperplan  $x_1 + \dots + x_{d+1} = 0$ . Le réseau ainsi obtenu est le dual de la section du réseau hypercubique par le plan précédent. Pour  $d = 3$ , ceci donne le réseau cubique centré dual du réseau cubique à face centrée.

Le temps moyen passé en un point, fini ou infini, est donné par l'expression

$$G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \sum_{t_1=t_0}^{\infty} P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos k_{\mu}} \quad (18)$$

qui satisfait à

$$G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \delta_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0} + \frac{1}{2d} \sum_{\mu} G(\mathbf{x}_1 + \mathbf{e}_{(\mu)} - \mathbf{x}_0) + G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{e}_{(\mu)} - \mathbf{x}_0) \quad (19)$$

soit encore

$$\Delta_r G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -\delta_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0} \quad (20)$$

Cette relation justifie le nom de fonction de Green (symétrique et positive) de l'opérateur  $-\Delta_r$ . On constate que  $G(\mathbf{x})$  est bien défini pour  $d > 2$ . Pour  $d = 1$  ou  $2$  le temps passé en un point est infini, en raison de la divergence infrarouge de l'intégrale (18) où l'intégrand se comporte comme  $d^d \mathbf{k}/k^2$  pour  $k^2$  petit. On peut cependant former alors la différence

$$\begin{aligned} G^s(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) &= G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) - G(\mathbf{0}) \\ &= \sum_{t_1=t_0}^{\infty} P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) - P(\mathbf{x}_0, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) \\ &= \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{\cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) - 1}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos k_{\mu}} \end{aligned} \quad (21)$$

qui est bien définie quelle que soit la valeur de  $d$ . Elle satisfait encore à l'équation (20), puisque formellement on n'a fait que soustraire une constante, qui peut être infinie. Cependant on perd ainsi la propriété de positivité, comme l'illustre l'expression de  $G^s$  à une dimension

$$d = 1 \quad G^s(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| \quad (22)$$

Plus généralement considérons

$$G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \lambda) = \lambda \sum_{t_1=t_0}^{\infty} \lambda^{t_1 - t_0} P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (23)$$

qui coïncide pour  $\lambda = 1$  avec la fonction de Green considérée plus haut. Pour  $|\lambda| < 1$ , la somme est convergente et admet la représentation intégrale