

mini **manuel**

Mathématiques financières

2^e édition

- L'essentiel du cours
- Exercices corrigés
- Sujet d'examen

Benjamin Legros

DUNOD

- Augé B., Naro G., *Mini Manuel de Contrôle de gestion*, 2011
Augé B., Naro G., Vernhet A., *Mini Manuel de Comptabilité de gestion*, 2013
Collain B., Déjean F., Le Theule M.-A., *Mini Manuel de Comptabilité générale*, 2^e éd., 2014
Legros B., *Mini Manuel de Mathématiques pour la gestion*, 2011
Legros B., *Mini Manuel de Mathématiques financières*, 2^e éd., 2014
Kruger A, Ferrandi J.-M., Carpentier L., *Mini Manuel de Marketing*, 2^e éd., 2016
Védie H.-L., *Mini Manuel d'Économie industrielle*, 2012

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2016

ISBN 978-2-10-074529-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Partie 1

Les modèles financiers

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Études de suites | 3 |
| | 1.1 Suites arithmétiques | 4 |
| | 1.2 Suites géométriques | 8 |
| | 1.3 Suites arithmético-géométriques | 12 |
| | Points clés | 14 |
| | Exercices | 15 |
| | Solutions | 16 |
| 2 | Intérêts simples et escompte | 23 |
| | 2.1 Mode de calcul des intérêts simples | 24 |
| | 2.2 Placements de courtes durées | 25 |
| | 2.3 Versements constants | 29 |
| | 2.4 Calcul du taux moyen | 31 |
| | 2.5 Exemples de livrets d'épargne | 32 |
| | 2.6 Effet de commerce et escompte | 33 |
| | 2.7 Calcul de l'escompte | 34 |
| | 2.8 Équivalence de capitaux | 35 |
| | 2.9 Intérêts précomptés | 36 |
| | 2.10 Contrat à terme d'achat ou de vente de devises | 38 |
| | Points clés | 41 |
| | Exercices | 43 |
| | Solutions | 46 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3 | Intérêts composés | 57 |
| | 3.1 Calcul des intérêts composés | 57 |
| | 3.2 Taux proportionnels et taux équivalents | 61 |
| | 3.3 Versements constants | 62 |
| | Points clés | 70 |
| | Exercices | 72 |
| | Solutions | 75 |
| 4 | Emprunts indivis | 89 |
| | 4.1 Principe général | 90 |
| | 4.2 Modes de remboursement classiques | 96 |
| | 4.3 Remboursements évolutifs | 102 |
| | Points clés | 106 |
| | Exercices | 108 |
| | Solutions | 110 |

Partie 2

Les projets d'investissement

| | | |
|----------|--|------------|
| 5 | Outils d'évaluation d'un investissement | 121 |
| | 5.1 Éléments d'analyse d'un projet d'investissement | 119 |
| | 5.2 Comparaison de deux projets d'investissement | 129 |
| | 5.3 Prise de décision en avenir incertain | 128 |
| | Points clés | 136 |
| | Exercices | 138 |
| | Solutions | 140 |
| 6 | Emprunts obligataires | 147 |
| | 6.1 Principe de fonctionnement | 148 |
| | 6.2 Tableaux d'amortissement pour les obligations à taux fixe | 153 |
| | 6.3 Analyse du risque | 159 |
| | Points clés | 163 |
| | Exercices | 165 |
| | Solutions | 167 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 7 | Valeur des actions | 179 |
| | 7.1 Mode d'évaluation | 180 |
| | 7.2 Risque et rentabilité | 185 |
| | 7.3 Gestion de la diversification | 189 |
| | Points clés | 193 |
| | Exercices | 195 |
| | Solutions | 197 |
| | Sujet d'examen | 201 |
| | Index | 213 |

Les modèles financiers

| | | |
|-------------------|---|-----------|
| Chapitre 1 | Études de suites | 3 |
| Chapitre 2 | Intérêts simples et l'escompte | 23 |
| Chapitre 3 | Intérêts composés | 57 |
| Chapitre 4 | Emprunts indivis | 89 |

Comment évaluer un placement financier ? Que représente un gain à venir dans le bilan d'une entreprise ? Que représente un taux d'intérêt ? Quels mécanismes déterminent un emprunt ?

La première partie de cet ouvrage a vocation à modéliser les aspects essentiels du calcul financier. Les modèles présentés sont appliqués des différents points de vue du particulier, de l'entreprise ou de la banque. Le premier chapitre « Les suites » est le fondement mathématique nécessaire à la compréhension des formules de la finance. Ses résultats mathématiques vont se trouver dans l'ensemble du livre. Le second chapitre « Intérêts simples et Escompte » permet d'estimer les placements de durées courtes sur des comptes réglementés du type Livret A. Il permet aussi d'appréhender le fonctionnement de l'escompte pour les entreprises. Le troisième chapitre « Intérêts composés » présente le calcul des placements de longues durées et de l'actualisation. Une application essentielle de ce chapitre est le calcul des rentes qui permet de concevoir le fonctionnement d'une retraite par capitalisation. Le quatrième chapitre « Emprunts Indivis » modélise les échanges financiers entre le prêteur et l'emprunteur avec une mise en place des aspects comptables de l'emprunt.

Études de suites

OBJECTIFS

- Savoir définir une suite arithmétique et une suite géométrique.
- Trouver la raison et le terme général d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.
- Connaître la formule de la somme des termes d'une suite.
- Comprendre le fonctionnement des suites arithmético-géométriques.
- Utiliser le logarithme lors d'une recherche de durée.
- Modéliser un phénomène par une suite arithmétique ou une suite géométrique.

PLAN

- 1.1 Suites arithmétiques
- 1.2 Suites géométriques
- 1.3 Suites arithmético-géométriques

Considérons la suite 2 ; 5 ; 8 ; 11... On devine assez simplement le terme suivant : 14. On a observé un ajout de 3 pour calculer un terme à partir du précédent et l'on a conclu que le phénomène allait se poursuivre ensuite. Un autre exemple : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13... Le phénomène est moins simple ici. On remarque qu'un terme est égal à la somme des deux précédents. Ainsi le terme suivant sera 21 et il est possible de calculer l'ensemble des termes qui suivent.

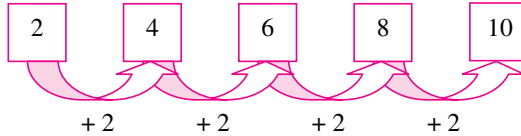
Ces exemples peuvent sembler gratuits, mais ils démontrent tout l'intérêt des suites : le caractère prédictif. Ce caractère prédictif est essentiel en finance. En effet, qu'il s'agisse du remboursement d'un emprunt ou de gains réalisés par un placement, l'important est de pouvoir chiffrer au mieux les mouvements de capitaux à venir. Les suites se trouvent donc dans l'ensemble des thèmes abordés dans cet ouvrage. Ce chapitre présente les résultats essentiels sur les suites les plus utilisées en finance : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

1.1 SUITES ARITHMÉTIQUES

a) Définition d'une suite arithmétique

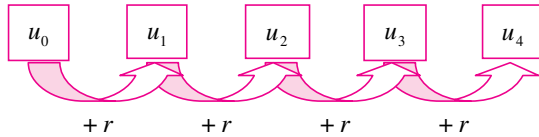
Considérons la suite 2 ; 4 ; 6 ; 8...

On observe un ajout de 2 pour calculer un terme à partir du précédent.



Ce nombre qui permet de calculer un terme à partir du précédent s'appelle la **raison de la suite arithmétique**. La notation d'usage de la raison d'une suite arithmétique est r .

Formalisons le phénomène en notant u_0 le premier terme, u_1 le second, u_2 le troisième et ainsi de suite. On calcule un terme à partir du précédent selon le schéma suivant :



Ainsi, la définition d'une **suite arithmétique** est donnée par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Cette relation suffit complètement à définir une suite arithmétique si l'on dispose d'un des termes de la suite. Dans l'exemple précédent, la connaissance de « $u_0 = 2$ » et de la relation « $u_{n+1} = u_n + 2$ » permet de calculer pas à pas l'ensemble des termes de la suite.

b) Comment calculer simplement un terme d'une suite arithmétique ?

La relation précédente ne permet pas de calculer rapidement un terme d'une suite arithmétique. Si l'on souhaite calculer le 50^e terme, il est nécessaire de connaître le 49^e qui, lui-même, se calcule à partir du 48^e et ainsi de suite. Ainsi, pour atteindre le 50^e terme, il sera nécessaire

d'effectuer un grand nombre de calculs. C'est pour cela qu'il est essentiel de mettre en place une formule générale qui fournit n'importe quel terme indépendamment du précédent.

Pour construire cette formule, on peut partir de la définition suivante pour calculer u_1 : $u_1 = u_0 + r$

De même pour calculer u_2 :

$$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2 \times r$$

Puis :

$$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2 \times r) + r = u_0 + 3 \times r$$

Ces premiers résultats induisent une **formule générale** :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Remarque : la démarche présentée induit la formule mais n'a pas valeur de démonstration mathématique. Une démonstration rigoureuse utiliserait le principe de récurrence.

Si l'on ne dispose pas du terme u_0 mais d'un autre terme u_k , le terme général d'une suite arithmétique est donné par la relation suivante :

$$u_n = u_k + (n - k) \times r$$

Exemple

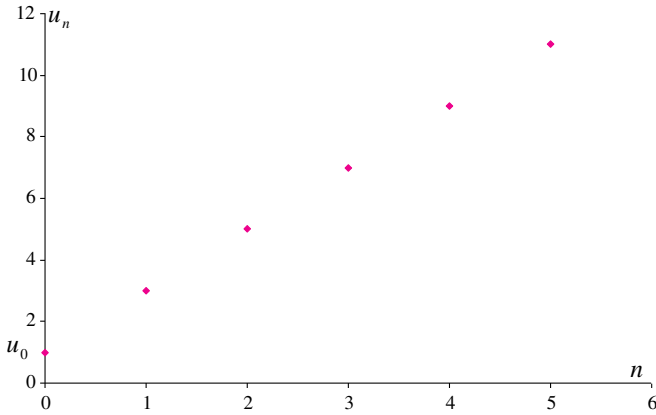
Cherchons le terme général de la suite arithmétique de raison 3 sachant que $u_5 = 22$.

Par application de la formule précédente avec $k = 5$, on trouve :

$$\begin{aligned} u_n &= u_5 + (n - 5) \times 3 = 22 + (n - 5) \times 3 = 22 + 3 \times n - 15 \\ &= 7 + 3 \times n \end{aligned}$$

c) Représentation graphique et sens de variation

Les termes successifs d'une suite arithmétique peuvent être représentés graphiquement. Les points représentés sont alignés sur une droite de pente r et d'ordonnée à l'origine u_0 .



Le sens de variation d'une suite arithmétique dépend de sa raison :

- Si $r > 0$ la suite est croissante.
- Si $r < 0$ la suite est décroissante.
- Si $r = 0$ la suite est constante.

d) Somme des termes d'une suite arithmétique

On peut chercher à cumuler les termes d'une suite. Ce calcul a un intérêt dès que l'on souhaite cumuler des valeurs.

On cherche à calculer : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

En écrivant cette somme « à l'envers » on trouve :

$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_0$$

Ainsi en additionnant les deux lignes précédentes, terme à terme, on trouve :

$$2 \times S = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \cdots + (u_n + u_0)$$

À première vue, ce regroupement peut sembler artificiel mais la remarque suivante va simplifier l'expression :

$$\text{On a } u_0 + u_n = u_0 + u_0 + n \times r = 2 \times u_0 + n \times r$$

$$u_1 + u_{n-1} = u_0 + r + u_0 + (n-1) \times r = 2 \times u_0 + n \times r = u_0 + u_n$$

$$u_2 + u_{n-2} = u_0 + 2 \times r + u_0 + (n-2) \times r = 2 \times u_0 + n \times r$$

$$= u_0 + u_n$$

$$u_k + u_{n-k} = u_0 + k \times r + u_0 + (n-k) \times r = 2 \times u_0 + n \times r$$

$$= u_0 + u_n$$