mini manuel

Mathématiques financières

2e édition

- L'essentiel du cours
- Exercices corrigés
- Sujet d'examen

Benjamin Legros

DUNOD

Dans la même collection

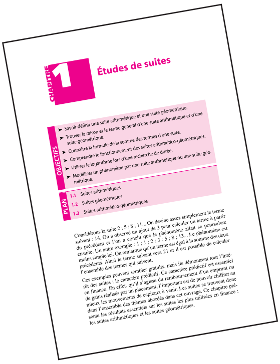
Augé B., Naro G., *Mini Manuel de Contrôle de gestion*, 2011
Augé B., Naro G., Vernhet A., *Mini Manuel de Comptabilité de gestion*, 2013
Collain B., Déjean F., Le Theule M.-A., *Mini Manuel de Comptabilité générale*, 2e ed., 2014
Legros B., *Mini Manuel de Mathématiques pour la gestion*, 2011
Legros B., *Mini Manuel de Mathématiques financières*, 2e éd., 2014
Kruger A, Ferrandi J.-M., Carpentier L., *Mini Manuel de Marketing*, 2e éd., 2016
Védie H.-L., *Mini Manuel d'Économie industrielle*, 2012

ISBN 978-2-10-074529-6

Table des matières

Comment utiliser le Mini Manuel ?

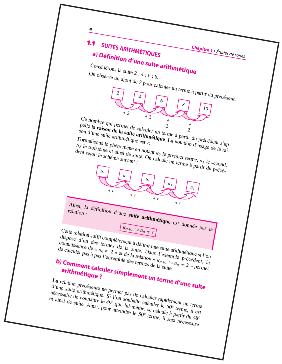
La page d'entrée de chapitre



Elle donne le plan du cours, ainsi qu'un rappel des objectifs pédagogiques du chapitre.

Le cours

Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.

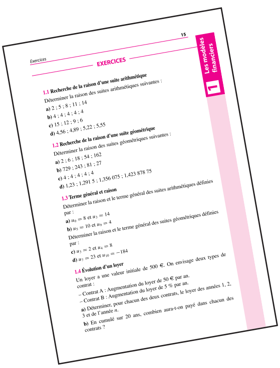


Les rubriques

Une erreur à éviter

Un peu de méthode

Les points clés à retenir



Les exercices

Ils sont proposés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

Le sujet d'examen

Situé à la fin de l'ouvrage, il permet de s'entraîner dans les conditions de l'examen.

PARTIE 1

Les modèles financiers

Comment évaluer un placement financier ? Que représente un gain à venir dans le bilan d'une entreprise ? Que représente un taux d'intérêt ? Quels mécanismes déterminent un emprunt ?

La première partie de cet ouvrage a vocation à modéliser les aspects essentiels du calcul financier. Les modèles présentés sont appliqués des différents points de vue du particulier, de l'entreprise ou de la banque. Le premier chapitre « Les suites » est le fondement mathématique nécessaire à la compréhension des formules de la finance. Ses résultats mathématiques vont se trouver dans l'ensemble du livre. Le second chapitre « Intérêts simples et Escompte » permet d'estimer les placements de durées courtes sur des comptes réglementés du type Livret A. Il permet aussi d'appréhender le fonctionnement de l'escompte pour les entreprises. Le troisième chapitre « Intérêts composés » présente le calcul des placements de longues durées et de l'actualisation. Une application essentielle de ce chapitre est le calcul des rentes qui permet de concevoir le fonctionnement d'une retraite par capitalisation. Le quatrième chapitre « Emprunts Indivis » modélise les échanges financiers entre le prêteur et l'emprunteur avec une mise en place des aspects comptables de l'emprunt.

CHAPITRE 1

Études de suites

OBJECTIFS

- Savoir définir une suite arithmétique et une suite géométrique.
- Trouver la raison et le terme général d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.
- Connaître la formule de la somme des termes d'une suite.
- Comprendre le fonctionnement des suites arithmético-géométriques.
- Utiliser le logarithme lors d'une recherche de durée.
- Modéliser un phénomène par une suite arithmétique ou une suite géométrique.

PLAN

Considérons la suite 2 ; 5 ; 8 ; 11... On devine assez simplement le terme suivant : 14. On a observé un ajout de 3 pour calculer un terme à partir du précédent et l'on a conclu que le phénomène allait se poursuivre ensuite. Un autre exemple : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13... Le phénomène est moins simple ici. On remarque qu'un terme est égal à la somme des deux précédents. Ainsi le terme suivant sera 21 et il est possible de calculer l'ensemble des termes qui suivent.

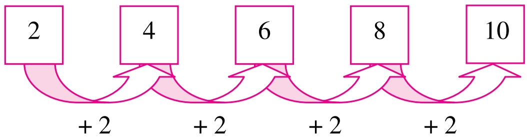
Ces exemples peuvent sembler gratuits, mais ils démontrent tout l'intérêt des suites : le caractère prédictif. Ce caractère prédictif est essentiel en finance. En effet, qu'il s'agisse du remboursement d'un emprunt ou de gains réalisés par un placement, l'important est de pouvoir chiffrer au mieux les mouvements de capitaux à venir. Les suites se trouvent donc dans l'ensemble des thèmes abordés dans cet ouvrage. Ce chapitre présente les résultats essentiels sur les suites les plus utilisées en finance : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

1.1 SUITES ARITHMÉTIQUES

a) Définition d'une suite arithmétique

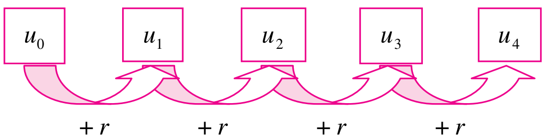
Considérons la suite 2 ; 4 ; 6 ; 8...

On observe un ajout de 2 pour calculer un terme à partir du précédent.



Ce nombre qui permet de calculer un terme à partir du précédent s'appelle la **raison de la suite arithmétique**. La notation d'usage de la raison d'une suite arithmétique est r.

Formalisons le phénomène en notant u_0 le premier terme, u_1 le second, u_2 le troisième et ainsi de suite. On calcule un terme à partir du précédent selon le schéma suivant :



Ainsi, la définition d'une **suite arithmétique** est donnée par la relation :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

Cette relation suffit complètement à définir une suite arithmétique si l'on dispose d'un des termes de la suite. Dans l'exemple précédent, la connaissance de « $u_0 = 2$ » et de la relation « $u_{n+1} = u_n + 2$ » permet de calculer pas à pas l'ensemble des termes de la suite.

b) Comment calculer simplement un terme d'une suite arithmétique ?

La relation précédente ne permet pas de calculer rapidement un terme d'une suite arithmétique. Si l'on souhaite calculer le 50^{e} terme, il est nécessaire de connaître le 49^{e} qui, lui-même, se calcule à partir du 48^{e} et ainsi de suite. Ainsi, pour atteindre le 50^{e} terme, il sera nécessaire d'effectuer un grand nombre de calculs. C'est pour cela qu'il est essentiel de mettre en place une formule générale qui fournit n'importe quel terme indépendamment du précédent.

Pour construire cette formule, on peut partir de la définition suivante pour calculer u_1 : $u_1 = u_0 + r$

De même pour calculer u_2 :

$$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2 \times r$$

Puis :

$$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2 \times r) + r = u_0 + 3 \times r$$

Ces premiers résultats induisent une **formule générale** :

$$\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$$

Remarque : la démarche présentée induit la formule mais n'a pas valeur de démonstration mathématique. Une démonstration rigoureuse utiliserait le principe de récurrence.

Si l'on ne dispose pas du terme u_0 mais d'un autre terme u_k, le terme général d'une suite arithmétique est donné par la relation suivante :

$$\boxed{u_n = u_k + (n - k) \times r}$$

Exemple

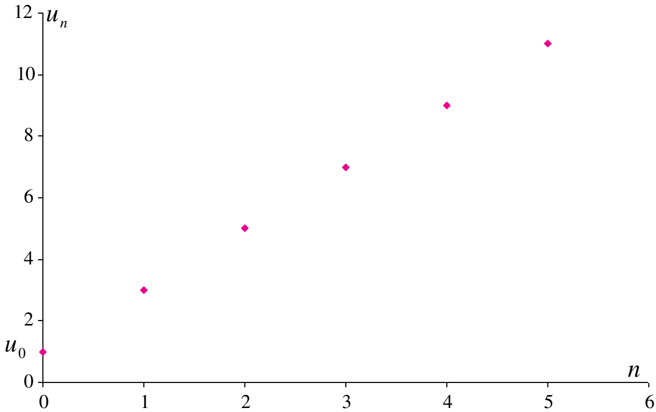
Cherchons le terme général de la suite arithmétique de raison 3 sachant que $u_5 = 22$.

Par application de la formule précédente avec $k = 5$, on trouve :

$$\begin{aligned} u_n &= u_5 + (n - 5) \times 3 = 22 + (n - 5) \times 3 = 22 + 3 \times n - 15 \\ &= 7 + 3 \times n \end{aligned}$$

c) Représentation graphique et sens de variation

Les termes successifs d'une suite arithmétique peuvent être représentés graphiquement. Les points représentés sont alignés sur une droite de pente r et d'ordonnée à l'origine u_0.



Le sens de variation d'une suite arithmétique dépend de sa raison :

– Si $r > 0$ la suite est croissante.

– Si $r < 0$ la suite est décroissante.

– Si $r = 0$ la suite est constante.

d) Somme des termes d'une suite arithmétique

On peut chercher à cumuler les termes d'une suite. Ce calcul a un intérêt dès que l'on souhaite cumuler des valeurs.

On cherche à calculer : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

En écrivant cette somme « à l'envers » on trouve :

$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_0$$

Ainsi en additionnant les deux lignes précédentes, terme à terme, on trouve :

$$2 \times S = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \cdots + (u_n + u_0)$$

À première vue, ce regroupement peut sembler artificiel mais la remarque suivante va simplifier l'expression :

On a $u_0 + u_n = u_0 + u_0 + n \times r = 2 \times u_0 + n \times r$

$u_1 + u_{n-1} = u_0 + r + u_0 + (n-1) \times r = 2 \times u_0 + n \times r = u_0 + u_n$

$$\begin{aligned} u_2 + u_{n-2} &= u_0 + 2 \times r + u_0 + (n-2) \times r = 2 \times u_0 + n \times r \\ &= u_0 + u_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_k + u_{n-k} &= u_0 + k \times r + u_0 + (n-k) \times r = 2 \times u_0 + n \times r \\ &= u_0 + u_n \end{aligned}$$