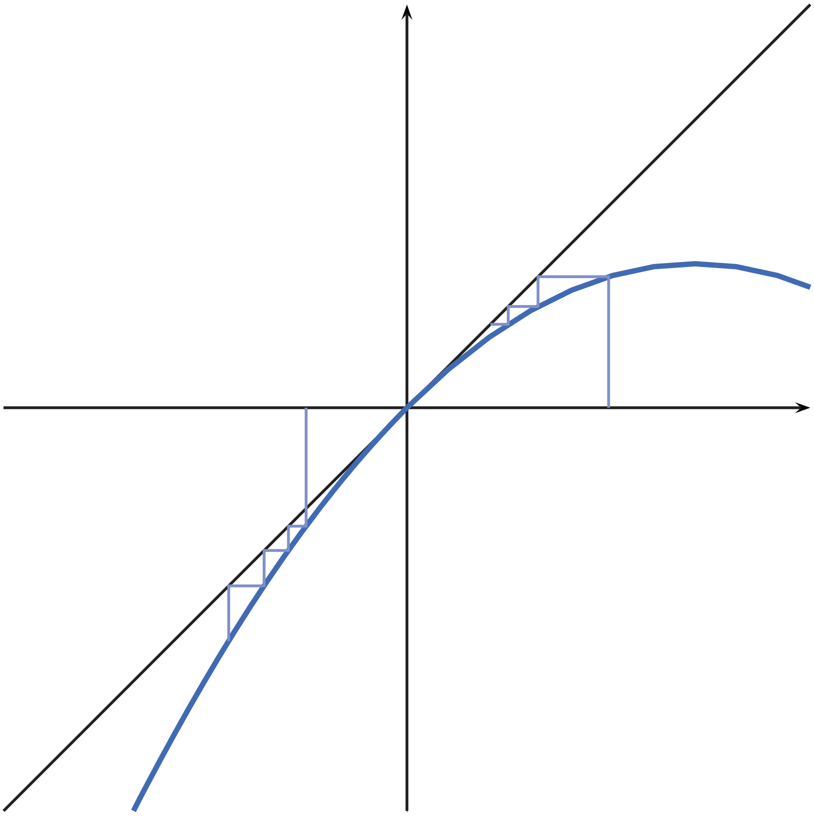
ENSEIGNEMENT SUP MATH

Agrégation
Master



Jean-Étienne Rombaldi

ÉLÉMENTS D'ANALYSE RÉELLE

2e édition

edp sciences

Jean-Étienne ROMBALDI

Éléments d'analyse réelle

2e édition

edp sciences

Imprimé en France

ISBN (papier) : 978-2-7598-2339-0 - ISBN (ebook) : 978-2-7598-2378-9

Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage destiné aux étudiants préparant l'agrégation de Mathématiques (interne ou externe) n'est pas organisé comme un cours suivant strictement les programmes. L'ouvrage de Guy Auliac et J. Y. Caby ou celui de Jean-François Dantzer indiqués en bibliographie répondent tout à fait à cet objectif. Je me suis efforcé de rédiger les chapitres de ce livre de manière indépendante en me concentrant sur les thèmes importants des programmes. Le chapitre 1 peut très bien utiliser un résultat classique exposé dans un chapitre suivant. Je pense que cette façon de procéder peut être utile pour construire des leçons d'oral de l'agrégation. J'ai également privilégié la recherche d'exemples d'applications et de contre-exemples illustrant la nécessité de certaines hypothèses dans l'énoncé d'un théorème, c'est ce travail de synthèse qu'il s'agit de faire dans l'élaboration d'un plan de leçon d'oral.

Chaque chapitre se termine par une série d'exercices tous corrigés en détails. On a un total de 166 exercices qui peuvent constituer un bon entraînement pour les épreuves écrites et fournir du matériel pour la deuxième épreuve orale de l'agrégation interne.

Les deux premiers chapitres sont consacrés aux espaces métriques et aux espaces normés. On y présente les principaux résultats topologiques en relation avec l'étude des suites et des fonctions continues. Le cas des espaces vectoriels normés de dimension fini est particulièrement étudié.

Le cas particulier des espaces préhilbertiens fait l'objet du chapitre 3. Les résultats de ce chapitre seront utiles pour l'étude des polynômes orthogonaux.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude des suites réelles ou complexes et à l'approximation des nombres réels par des nombres décimaux ou par des fractions continues régulières limitées à coefficients entiers. On étudie en particulier les développements décimaux des réel, et les nombres rationnels sont caractérisés comme les réels admettant un développement décimal illimité propre périodique à partir d'un certain rang. Les fractions continues nous donnent un autre moyen d'approcher les nombres réels par des rationnels et ils permettent également de caractériser les nombres rationnels comme les réels admettant un développement en fraction continue régulière limité à coefficients entiers. Dans ce chapitre, on s'intéresse également aux sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ avec pour applications, un important critère d'irrationalité et l'étude des fonctions continues périodiques. Les théorèmes de Cesàro y sont étudiés en détails.

Le chapitre 5 complète le précédent par une étude des méthodes d'accélération de la convergence de Aïtken et de Richardson.

Avec le chapitre 6, on s'intéresse aux propriétés des fonctions continues d'une variable réelle à valeurs réelles. On s'intéresse aux notions propres à la droite réelle de continuité à gauche et à droite, ce qui permet de distinguer deux types de discontinuités : les discontinuités de première et de deuxième espèce. Le cas des fonctions monotones est particulièrement intéressant du fait qu'une fonction monotone sur un intervalle réel admet des limites à droite et à gauche en tout point, ce qui entraîne qu'elle ne peut avoir que des discontinuités de première espèce et que l'ensemble de ses points discontinuités est au plus dénombrable. Toujours dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, le cas des fonctions périodiques est particulièrement intéressant. L'étude des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ nous permet de montrer que le groupe des périodes d'une fonction continue périodique non constante est discret, ce qui permet de définir la plus petite période strictement positive d'une telle fonction. Quelques conséquences de ce résultat sont proposées en exercice. L'étude des propriétés globales des fonctions continues a été faite au premier chapitre. En lien avec la connexité, on montre que les connexes (et les convexes) de $\mathbb{R}$ sont les intervalles et que la continuité conserve la connexité. La version réelle de ce résultat est le théorème des valeurs intermédiaires. Dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, on montre le résultat suivant : si $f : I \to \mathbb{R}$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, où I est un intervalle réel, alors elle est continue si, et seulement si, $f^{-1}\{y\}$ est un fermé pour tout réel y. Dans le cas particulier des fonctions monotones, on montre que si $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone et si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur l'intervalle I. Ce résultat est utilisé pour montré le résultat suivant à la base des définitions des fonctions réciproques usuelles : si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue strictement monotone, elle réalise alors un homéomorphisme de I sur $f(I)$, les intervalles I et $f(I)$ étant de même nature.

L'étude de la dérivation des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes arrive naturellement au chapitre 7. Dans un premier temps, on rappelle les définitions des dérivées d'ordre 1 et d'ordre supérieur. Si une fonction dérivable est continue, on peut construire un exemple de fonction continue nulle part dérivable. J'ai choisi de présenter l'exemple classique de Van der Waerden. Les résultats usuels concernant les opérations sur les fonctions dérivables sont complétés par l'énoncé de la formule de Faà di Bruno donnant la dérivée d'ordre n d'une composée de deux fonctions dérivables en renvoyant à [13] pour une démonstration. La définition de la dérivée logarithmique est suivie d'une application au théorème de relèvement utilisé pour montrer que l'indice d'un lacet dans le plan complexe est un entier.

Après avoir étudié le lien entre dérivation et extrema, on s'intéresse au théorème de Darboux qui nous dit qu'une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Ce théorème est suivi de quelques applications qu'il est bon de connaître pour des leçons d'oral.

La dérivation est également utilisée pour étudier les positions relatives d'une courbe par rapport aux sécantes et aux tangentes. L'étude de la position d'une courbe par rapport aux sécantes nous conduit naturellement à la notion de convexité qui sera étudiée de manière plus approfondie au chapitre 8.

On s'intéresse également dans ce chapitre au lien entre dérivation et intégration et aux suites de fonctions dérivables.

La condition nécessaire d'extremum, $f'(a) = 0$ n'est qu'un cas particulier d'un résultat plus général portant sur les fonctions différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles.

Le chapitre 8 est consacré à l'étude des fonctions convexes d'une variable réelle. Après en avoir donné les principales propriétés, on s'intéresse à la régularité de ces fonctions, à savoir la continuité sur l'intérieur de l'intervalle de définition, la dérivabilité à droite et à gauche et la monotonie des dérivées. Dans le cas des fonctions dérivables, la convexité de la fonction f est équivalente à la croissance de sa dérivée f'. Ce résultat peut se généraliser au cas des fonctions définies sur un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé et à valeurs réelles. L'étude des fonctions convexes est en particulier intéressant pour l'obtention d'inégalités de convexité. Ainsi à partir de la convexité de la fonction exp et de la concavité de la fonction ln, on déduit quelques inégalités classiques dont celle de Hölder. La concavité de la fonction ln peut être utilisée pour comparer les moyennes harmoniques, arithmétiques et géométriques. Les inégalités de Jensen sont montrées dans le cas des espaces vectoriels normés.

Le chapitre 9 est consacré au théorèmes de Rolle et des accroissements finis ainsi qu'aux nombreuses applications de ces théorèmes. Pour l'étude du théorème de Rolle on se place directement dans le cadre des espaces vectoriels normés dans la mesure où le raisonnement est identique à celui mené dans le cadre des fonctions d'une variable réelle. Dans le cadre des fonctions d'une variable réelle ce théorème est encore valable sur une demi-droite fermée ou sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Rolle sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ peut aussi se montrer en utilisant le principe de dichotomie. Parmi les nombreuses applications du théorème de Rolle, on s'intéresse au théorème de Darboux, à l'étude des racines des polynômes réels avec comme cas particulier celui des polynômes orthogonaux, à l'obtention d'une majoration de l'erreur dans la méthode d'interpolation de Lagrange et à un critère de convexité.

Le théorème des accroissements finis et sa généralisation peuvent se déduire du théorème de Rolle. Ce théorème n'est pas valable pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ pour $p \geq 2$, mais on dispose toutefois d'une inégalité des accroissements finis. Parmi les nombreuses applications du théorème des accroissements finis, on s'intéresse à l'étude du sens de variation des fonctions, au lien entre limite et dérivation, à l'étude de la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale, à la longueur des arcs géométriques, à l'étude des points fixes attractifs et répulsifs, à l'obtention d'une majoration de l'erreur dans la méthode de Simpson, aux suites de fonctions dérivables, au lien entre l'existence de dérivées partielles et la différentiabilité, au théorème de Schwarz sur les dérivées partielles d'ordre 2, au théorème de Darboux et aux nombre de Liouville qui nous donnent un exemple d'ensemble infini de nombres transcendants.

Le théorème de Rolle permet également d'aboutir à la formule de Taylor-Lagrange. Les différentes formules de Taylor sont étudiées au chapitre 10. Dans ce chapitre on s'intéresse également au cas des fonctions de plusieurs variables avec pour application l'étude de problèmes d'extrema. Là encore l'accent est mis sur les applications avec l'introduction des développements limités à une et plusieurs variables, l'étude de problèmes d'extrema, l'obtention d'inégalités, les développements en série entière avec en particulier des théorèmes de Bernstein donnant des conditions suffisantes pour qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ soit développable en série entière, un théorème de Kolmogorov sur des majorations de dérivées, l'obtention de majorations d'erreurs dans les méthodes de Lagrange et de Newton ainsi que dans la méthode des rectangles.

La formule de Taylor-Young nous conduit naturellement à l'étude des développements limités. Cette étude est menée au chapitre 11. Dans ce chapitre on s'intéresse tout d'abord aux notions de prépondérance, de domination et d'équivalence en regroupant dans un premier paragraphe la plupart des résultats importants sur le sujet. Après avoir présenté les différentes techniques d'obtention des développements limités, on s'intéresse aux applications avec l'obtention d'équivalents pour les suites ou les séries, l'obtention de développements asymptotiques, l'étude de la position d'une courbe par rapport aux tangentes ou aux asymptotes.

Le chapitre 12 qui peut être vu comme une application à l'analyse numérique des chapitres précédents est consacré à l'étude des suites d'approximations successives définies par une relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Ces suites permettent d'obtenir des approximations des points fixes de la fonction continue f. Les suites homographiques représentent un cas intéressant de telles suites, elles sont étudiées en détail en s'intéressant à la façon de choisir le terme initial x_0 pour que la suite soit bien définie (cette étude est souvent éludée dans les ouvrages de premier cycle). Pour f continue sur un intervalle compact, une première condition nécessaire et suffisante de convergence d'une telle suite est donnée par la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. Le théorème du point fixe, qui nous donne une importante condition suffisante de convergence, est étudié dans le cadre des espaces métriques complets. Ce théorème peut être utilisé pour la recherche de solutions approchées d'une équation numérique $f(x) = 0$ et nous conduit naturellement aux méthodes de Lagrange et de Newton. Dans l'étude de ces méthodes on s'intéresse aux majorations des erreurs d'approximation.

Le chapitre 13 est consacré aux équations fonctionnelles. On étudie les équations classiques $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour f définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et à valeurs réelles ou complexes ; $f(xy) = f(x) + f(y)$ sur $\mathbb{R}^+$ et $f(x+y) = f(x) f(y)$ sur $\mathbb{R}$ qui nous conduisent aux fonctions logarithmes et exponentielles réelles ou complexes ; $f(xy) = f(x) f(y)$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ qui nous conduit aux fonctions puissances ; $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) f(y)$ qui nous conduit aux fonctions $\cos$ et ch. Pour ces études on ne se limite pas seulement au cas des fonctions continues. On s'intéresse également à une caractérisation de la fonction Γ d'Euler par sa log-convexité et l'équation fonctionnelle $f(x+1) = xf(x)$. Dans ce chapitre on ne se limite pas aux fonctions d'une variable réelle ou complexe. On donne une caractérisation des rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$ par l'équation fonctionnelle $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, où $\wedge$ désigne le produit vectoriel. Les suites définies par une récurrence linéaire d'ordre n sont également étudiées comme solutions d'équations fonctionnelles.

Le chapitre 14 est consacré à l'étude des équations différentielles linéaires. Dans un premier temps on étudie les équations différentielles linéaires d'ordre 1, ce qui permet de motiver l'introduction de l'équation caractéristique lors de l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants et sans second membre. Cette étude est généralisée au cas des équations d'ordre n et c'est le lemme des noyaux qui permet de donner la forme générale des solutions. Le cas des équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients non constants est étudié en se ramenant à un système linéaire d'ordre 1 et en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. Ce chapitre se termine par une étude qualitative des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 2 en s'intéressant aux racines de ces solutions.

Enfin le chapitre 15 est consacré à une étude des polynômes orthogonaux. On y présente les principales propriétés (relations de récurrence, racines de ces polynômes, ...). Les polynômes orthogonaux classiques sont présentés comme vecteurs propres de certains opérateurs différentiels, ce qui nous conduit aux formules de Rodrigues. Les polynômes de Legendre sont étudiés de façon plus approfondie.

Cette deuxième édition contient pour l'essentiel ce qui était présent dans la première avec l'ajout des chapitres sur les espaces métriques, normés, préhilbertiens et le chapitre sur les polynômes orthogonaux.

Pour conclure, je tiens à remercier les éditions EDP Sciences pour la confiance qu'ils m'accordent en publiant cette deuxième édition.

Chapitre 1

Espaces métriques

Avec ce chapitre, on se contente de donner les définitions et résultats basiques sur les espaces métriques. Les notions de suites et de continuité dans le cadre des espaces vectoriels normés et dans le cadre réel seront étudiées plus en détails dans les chapitres suivants.

1.1 Topologie associée à une distance

Pour ce paragraphe, on se donne un ensemble non vide E.

Définition 1.1. *Une distance sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que pour tous x, y, z dans E, on ait :*

- $d(y, x) = d(x, y)$;
- $d(x, y) = 0$ *si, et seulement si,* $y = x$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

Le couple (E, d) est un espace métrique.

Exemple 1.1 *La valeur absolue [resp. le module] sur $\mathbb{R}$ [resp. sur $\mathbb{C}$] induit une distance en posant $d(x, y) = |y - x|$ pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ [resp. dans $\mathbb{C}$].*

On peut remarquer qu'une distance sur E est nécessairement à valeurs positives. En effet, pour tous x, y dans E, on a :

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

et nécessairement $d(x, y) \geq 0$. Cette condition de positivité est souvent imposée dans la définition d'une distance, ce qui n'est pas vraiment utile.

Si d est une distance sur E et I une partie non vide de E, la restriction de d à $I \times I$ définit alors une distance sur I (distance induite).

De l'inégalité triangulaire, on déduit que pour tous x, y, z dans E, on a :

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

(deuxième inégalité triangulaire). Cela résulte de $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ et $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$.

Pour la suite de ce paragraphe, (E,d) est un espace métrique.

Pour toute partie non vide A de E et tout élément x de E, on note respectivement $\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x,y)$ et $d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a)$ le diamètre de A et la distance de x à A. $d(x,A)$ est un élément de $\mathbb{R}^+$ (borne inférieure d'une partie non vide et minorée) et $\delta(A)$ est un élément $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Dans le cas où $\delta(A)$ est fini, on dit que A est bornée.

On vérifie facilement que pour tous x, y dans E, on a :

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

Pour tout $a \in E$ et tout $r \in \mathbb{R}^{+,*}$, on note $B(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) < r\}$ et $\overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) \leq r\}$. L'ensemble $B(a,r)$ [resp. $\overline{B}(a,r)$] est la boule ouverte [resp. la boule fermée] de centre a et de rayon r.

Définition 1.2. *On appelle voisinage d'un point a de (E,d) toute partie $\mathcal{V}$ de E qui contient une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$.*

Définition 1.3. *On dit qu'une partie $\mathcal{O}$ de (E,d) est un ouvert si elle est vide ou si elle est non vide et voisinage de chacun de ses points, ce qui signifie que pour tout $a \in \mathcal{O}$ il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \mathcal{O}$. On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de (E,d) est un fermé si son complémentaire $E \setminus \mathcal{F}$ est un ouvert.*

Un ouvert est donc une réunion de boules ouvertes.

Pour toute partie non vide I de E, les ouverts [resp. les fermés] de (I,d) sont les ensembles de la forme $\mathcal{O} \cap I$ [resp. $\mathcal{F} \cap I$] où $\mathcal{O}$ [resp. $\mathcal{F}$] est un ouvert [resp. un fermé] de E (ouverts et fermés pour la topologie induite).

Exemples 1.1

1. *Une boule ouverte [resp. fermée] de E est un ouvert [resp. un fermé] de (E,d). En effet, pour tout $x \in B(a,r)$, on a $r' = r - d(a,x) > 0$ et $B(x,r') \subset B(a,r)$ (pour $y \in B(x,r')$ on a $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < r' + d(x,a) = r$). De même pour $x \in E \setminus \overline{B}(a,r)$, on a $r' = d(a,x) - r > 0$ et $B(x,r') \subset E \setminus \overline{B}(a,r)$ (pour $y \in B(x,r')$ on a $d(y,a) \geq d(x,a) - d(x,y) > d(a,x) - r' = r$).*
2. *Pour toute partie non vide A de E et tout réel $r \in \mathbb{R}^{+,*}$, l'ensemble $\mathcal{V}_r(A) = \{x \in E \mid d(x,A) < r\}$ est un ouvert qui contient A. En effet, il est clair que $\mathcal{V}_r(A)$ contient A (on a $d(x,A) = 0$ pour $x \in A$) et pour tout $x \in \mathcal{V}_r(A)$, on a $r' = r - d(A,x) > 0$ et $B(x,r') \subset \mathcal{V}_r(A)$ (pour $y \in B(x,r')$ on a $d(y,A) \leq d(y,x) + d(x,A) < r' + d(x,A) = r$).*

Définition 1.4. *Un sous-ensemble non vide $\mathcal{C}$ de (E,d) est connexe si la condition $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ avec $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ ouverts de E tels que $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$*

entraîne $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$ (et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_2$) ou $\mathcal{C} \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ (et donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}_1$), c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ ne peut s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts de $\mathcal{C}$.

Le résultat qui suit nous sera utile pour montrer que les connexes (et convexes) de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (corollaire 2.1).

Lemme 1.1 *L'intervalle* $[0,1]$ *est connexe dans* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Preuve. Supposons qu'il existe deux ouverts $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ dans $\mathbb{R}$ tels que $[0,1] \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ et $[0,1] \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. On peut supposer que $0 \in \mathcal{O}_1$. Il existe alors un réel $\varepsilon \in]0,1[$ tel que $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathcal{O}_1$ et l'ensemble $I = \{x \in]0,1] \mid [0,x] \subset \mathcal{O}_1\}$ est non vide majoré par 1. On peut donc poser $\alpha = \sup(I)$ et on a $0 < \alpha \leq 1$. Par définition de la borne supérieure, pour tout $x \in]0, \alpha[$ on peut trouver $y \in]x, \alpha] \cap I$ et on a $x \in [0, y] \subset \mathcal{O}_1$. On a donc ainsi montré que $]0, \alpha[\subset \mathcal{O}_1$. Si $\alpha \in \mathcal{O}_2$, il existe alors $\varepsilon \in]0, \alpha[$ tel que $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset \mathcal{O}_2$ et $[\alpha - \varepsilon, \alpha[\subset [0,1] \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ ce qui est impossible. On a donc $\alpha \in \mathcal{O}_1$ et $[0, \alpha] \subset \mathcal{O}_1$. Si $\alpha < 1$, il existe alors $\varepsilon \in]0, 1-\alpha[$ tel que $[0, \alpha + \varepsilon] \subset \mathcal{O}_1$ et $\alpha + \varepsilon \in I$ en contradiction avec $\alpha = \sup(I)$. On a donc $\alpha = 1$ et $[0,1] \subset \mathcal{O}_1$, ce qui entraîne $[0,1] \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. En conclusion, $[0,1]$ est connexe. □

Théorème 1.1.

L'ensemble vide, l'ensemble E, une réunion d'ouverts et une intersection finie d'ouverts sont des ouverts de (E, d) . L'ensemble vide, l'ensemble E, une réunion finie de fermés et une intersection de fermés sont des fermés de (E, d) .

Preuve. Il est clair que $\emptyset$ et E sont des ouverts.

Si $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'ouverts non vides (les $\mathcal{O}_i$ vides peuvent être supprimés de la réunion) et x un élément de $\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, il existe alors un réel $r_{i_0} > 0$ tel que $B(x, r_{i_0}) \subset \mathcal{O}_{i_0} \subset \mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ est ouvert.

Si $(\mathcal{O}_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille finie d'ouverts non vides (le cas où l'un des $\mathcal{O}_k$ est vide est trivial) et x un élément de $\mathcal{O} = \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{O}_k$, il existe alors des réel $r_k > 0$, tels que $B(x, r_k) \subset \mathcal{O}_k$ pour tout k compris entre 1 et n. Le réel $r = \min_{1 \leq k \leq n} r_k$ est alors strictement positif et $B(x, r) \subset \bigcap_{k=1}^{n} B(x, r_k) \subset \mathcal{O}$, donc $\mathcal{O}$ est ouvert.

Le résultat sur les fermés s'en déduit par passage au complémentaire. □

Une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert comme le montre l'exemple de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Une réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement un fermé comme le montre l'exemple de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, +\infty \right[=]0, +\infty[$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

De manière plus générale, un fermé de (E,d) est l'intersection d'une suite décroissante d'ouverts et un ouvert est la réunion d'une suite croissante de fermés (exercice 1.4).

Définition 1.5. *L'intérieur d'une partie A de (E,d), noté $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert de E contenu dans A. L'adhérence d'une partie A de (E,d), notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé de E contenant A.*

On vérifie facilement que l'intérieur de A est aussi la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A et que l'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés de E qui contiennent A.

Théorème 1.2.

Pour tout sous-ensemble A de (E,d), on a $\overset{\circ}{A} \subset A$ [resp. $A \subset \overline{A}$], l'égalité étant réalisée si, et seulement si, A est ouvert [resp. fermé].

Preuve. Par définition, on a $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \subset A$ où $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est la famille de tous les ouverts de E contenus dans A. L'égalité $A = \overset{\circ}{A}$ nous dit que A est ouvert comme réunion d'ouverts. Réciproquement si A est ouvert, c'est alors l'un des $\mathcal{O}_i$ et nécessairement, $A \subset \overset{\circ}{A}$, ce qui donne l'égalité $A = \overset{\circ}{A}$.

De même, on a $A \subset \overline{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ où $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est la famille de tous les fermés de E qui contiennent A. L'égalité $A = \overline{A}$ nous dit que A est fermé comme intersection de fermés. Réciproquement si A est fermé, c'est alors l'un des $\mathcal{F}_i$ et nécessairement, $\overline{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \subset A$, ce qui donne l'égalité $A = \overline{A}$. □

Théorème 1.3.

L'adhérence d'une partie A de (E,d) est l'ensemble des éléments x de E tels que $d(x,A) = 0$, ce qui revient à dire que $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $d(x,y) < \varepsilon$ (soit $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$).

Preuve. Il revient au même de montrer que $d(x,A) > 0$ si, et seulement si, $x \in E \setminus \overline{A}$.

Si $\delta = d(x,A) > 0$, on a alors $d(x,y) \geq \delta$ pour tout $y \in A$ et $E \setminus B(x,\delta)$ est un fermé qui contient A, donc $\overline{A} \subset E \setminus B(x,\delta)$ et en conséquence, $B(x,\delta) \subset E \setminus \overline{A}$, donc $x \in E \setminus \overline{A}$. Réciproquement, si $x \in E \setminus \overline{A}$, comme cet ensemble est ouvert, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset E \setminus \overline{A}$, donc $A \subset \overline{A} \subset E \setminus B(x,\varepsilon)$ et on a $d(x,y) \geq \varepsilon$ pour tout $y \in A$, ce qui implique que $d(x,A) \geq \varepsilon > 0$. □

Du théorème précédent, on déduit que $A \subset E$ est fermé si, et seulement si, $d(x,A) = 0$ pour tout $x \in A$.

Définition 1.6. *On dit qu'une partie A de E est dense dans (E, d) si $\overline{A} = E$, ce qui signifie que pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $d(x, y) < \varepsilon$ (soit $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$).*

Définition 1.7. *On dit que l'espace métrique (E, d)est séparable s'il existe dans E une partie dense dénombrable.*

Exemples 1.2

1. *De la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (corollaire 4.2 ou exercice 4.1), on déduit que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est séparable.*
2. *Un espace métrique compact est séparable (exercice 1.6).*

1.2 Suites à valeurs dans un espace métrique

Pour ce paragraphe, (E, d) est un espace métrique et les résultats de base sur les suites réelles sont supposés connus. Ces suites sont étudiées au chapitre 4.

Définition 1.8. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de (E, d) est convergente s'il existe un élément ℓ de E tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, \ell) = 0$. Une suite non convergente est dite divergente.*

La convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0,\ d(x_n, \ell) < \varepsilon \tag{1.1}$$

Dans l'assertion (1.1), les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges et il est parfois commode de se limiter à $\varepsilon \in]0, 1[$ sans que cela ne soit restrictif.

Cette notion de convergence dépend de la distance choisie sur E (exercice 1.2 et le paragraphe 2.1).

En utilisant l'inégalité triangulaire, on vérifie facilement que si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de (E, d) est convergente, sa limite est alors unique, ce qui nous permet de noter $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ ou $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$.

Une suite convergente est bornée. En effet, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$, il existe alors un entier n_0 tel que $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \ell) + d(x_m, \ell) < 2$ pour tout $n > n_0$ et tout $m > n_0$, donc $\sup\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} d(x_n, x_m) \leq \max\left(\max\limits_{0\leq n,m\leq n_0} d(x_n, x_m), 2\right)$, ce qui signifie que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Définition 1.9. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de (E,d) est de Cauchy si :*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}\mid\forall n\geq n_0,\ \forall m\geq n_0,\ d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

Les entiers m et n jouant des rôles symétriques, on peut se limiter à $m>n\geq n_0$ dans la définition précédente.

Le résultat suivant est souvent utilisé pour montrer qu'une suite est de Cauchy.

Théorème 1.4.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de (E,d) pour laquelle il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq n_0}$ de réels positifs et un entier n_0 vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l}\forall m>n\geq n_0,\ d(x_m,x_n)\leq\varepsilon_n\\ \lim\limits_{n\to+\infty}(\varepsilon_n)=0\end{array}\right.$$

elle est alors de Cauchy.

Preuve. De $\lim\limits_{n\to+\infty}(\varepsilon_n)=0$, on déduit que pour tout réel $\varepsilon>0$ on peut trouver un entier $n_1\geq n_0$ tel que $\varepsilon_n<\varepsilon$ pour tout $n\geq n_1$, ce qui entraîne $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ pour $m>n\geq n_1$. □

Théorème 1.5.

Toute suite de Cauchy dans (E,d) est bornée et toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve. La première affirmation est une conséquence directe de la définition et la deuxième se déduit de l'inégalité triangulaire. □

Dans le cas où toute suite de Cauchy dans (E,d) est convergente, on dit que l'espace métrique (E,d) est complet.

Les notions d'intérieur et d'adhérence peuvent se définir de façon séquentielle.

Théorème 1.6.

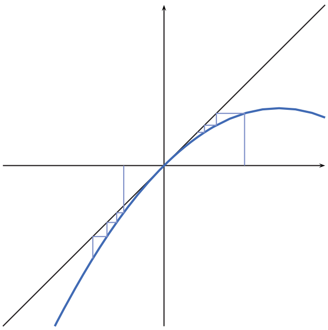
Soit A une partie non vide de (E,d). L'intérieur de A est l'ensemble des points x de E tels que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers x, il existe un entier n_0 tel que $x_n\in A$ pour tout $n\geq n_0$. L'adhérence de A est l'ensemble des points x de E qui sont limites d'une suite de points de A.

Preuve. Si $x\in\overset{\circ}{A}$, il existe alors un réel $\varepsilon>0$ tel que $B(x,\varepsilon)\subset A$ et pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers x, il existe un entier n_0 tel que $d(x_n,x)<\varepsilon$ pour tout $n\geq n_0$, ce qui implique que $x_n\in A$. Si $x\notin\overset{\circ}{A}$, alors pour tout entier $n\geq 1$, la boule $B\left(x,\dfrac{1}{n}\right)$ n'est pas contenue dans A (comme $B\left(x,\dfrac{1}{n}\right)$

ENSEIGNEMENT SUP MATH

Agrégation – Master

Jean-Étienne Rombaldi



Cette deuxième édition du cours d'analyse réelle est destinée aux étudiants préparant l'agrégation externe de Mathématiques et aux enseignants préparant l'agrégation interne. Cette nouvelle édition revue et corrigée est augmentée de quatre chapitres : espaces métrique, espaces normés, espaces préhilbertiens et polynômes orthogonaux.

Ce livre n'est pas organisé comme un cours suivant strictement les programmes des concours cités. Il est centré sur des notions fondamentales tant pour la préparation à l'écrit que pour la préparation à l'oral. C'est un ouvrage de synthèse où les chapitres sont rédigés de manière relativement indépendante avec pour lignes directrices :

— approfondir les notions de base ;
— privilégier les applications à d'autres domaines des mathématiques ;
— bien analyser les hypothèses des théorèmes en proposant de nombreux contre-exemples ;
— élargir le champs des connaissances du lecteur.

C'est ce travail de synthèse et d'approfondissement que l'on demande de réaliser dans l'élaboration d'une leçon d'oral d'Agrégation. Chaque chapitre se termine par une série d'exercices tous corrigés en détails et constituant un bon entraînement pour les épreuves écrites.

Jean-Étienne Rombaldi *est professeur agrégé de mathématiques, son dernier poste étant à l'institut Fourier de Grenoble (université Grenoble-Alpes). Il a longtemps été préparateur à l'agrégation interne et externe de mathématiques.*

ISBN : 978-2-7598-2339-0

9 782759 823390

edp sciences
www.edpsciences.org