J'INTÈGRE LA FONCTION PUBLIQUE

Catégories A, B et C

2023
2024

LE GRAND LIVRE DES TESTS PSYCHOTECHNIQUES

De logique, de personnalité et de créativité

Bernard Myers
Concepteur de tests logiques, rédacteur de la revue « Spécial logique ».

Benoît Priet
Professeur de tests psychotechniques et de français, préparateur aux concours à l'IPECO de Poitiers.

Dominique Souder
Professeur de mathématiques retraité, ancien secrétaire de la Fédération française des jeux mathématiques.

Corinne Pelletier
Formatrice aux concours à Poitiers.

DUNOD

Photo de couverture : Shutterstock © smolaw

Mise en page : Belle Page

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-084871-3

Table des matières

Partie 1 : Aptitude numérique

Partie 2 : Aptitude logique

Partie 3 : Aptitude verbale

Partie 4 : Personnalité et créativité

Aptitude numérique

Nul besoin d'être Albert Einstein pour réussir aux questions d’aptitude numérique des concours. Si vous avez le niveau de la troisième en maths, vous pouvez vous en sortir ! Et ceux qui ont un niveau supérieur ou une certaine aisance avec les chiffres peuvent compter sur cette section pour faire monter leur moyenne. Le débat a longtemps faire rage : certains préconisent l’usage des maths pour opérer une sélection des candidats, car ils considèrent que l’aptitude mathématique est révélatrice d’intelligence, de logique, de rigueur et de bien d’autres qualités que l’on recherche chez les candidats. D’autres considèrent que les maths ne sont qu’un outil parmi d’autres et que les épreuves de maths trop poussées excluent des candidat(e)s qui ont de nombreuses autres qualités tout aussi nécessaires. Pour l’instant, à en juger par le niveau des épreuves, la balance penche plutôt du côté de ceux qui veulent limiter l’importance des maths. Ce n’est pas le cas dans toutes les régions, mais la difficulté des questions est nettement moins élevée qu’il y a quelques années. Cela ne veut pas dire qu’il faille négliger les maths pour autant ! Au contraire ! Considérez cette épreuve comme celle où vous pourrez consolider votre position. Pour cela, vous pouvez commencer par rafraîchir vos souvenirs scolaires avec les pages qui suivent. Ensuite, affrontez diverses questions pour vous remettre en forme. Au début, prenez votre temps, pour bien comprendre, bien assimiler. Puis, mettez-vous dans les conditions d’un concours, c’est-à-dire répondez dans un temps limité et sans calculette. Si ce dernier point vous cause de grandes difficultés, il faut réviser vos tables de multiplication : elles s’oublient vite !

Conseils méthodologiques 1

Comment s'organiser de façon à avoir le moins de travail possible pour aboutir au résultat d'un calcul…

Nous ne voulons pas entrer ici dans le détail des astuces utiles de calcul mental, qui feront l'objet d'un chapitre entier plus loin dans ce livre. Il s'agit seulement de vous sensibiliser à cette idée : « un calcul, cela se médite avant de se commencer ».

Voici une dizaine d'exercices pour vous tester. Essayez de les faire avant de lire la solution qui suit, et surtout les commentaires sur la (ou les) bonne(s) tactique(s) de résolution.

Exemples

1. Calculer : $500 \times 3 + (7 + 500) - (500 - 7) + 500 = \ldots$

2. Calculer : $(8 - 5)(8 - 6)(8 - 7)(8 - 8)(8 - 9) = \ldots$

3. Calculer : $12 - 10 + 11 - 9 + 8 - 6 + 7 - 5 + 4 - 2 + 3 - 1 = \ldots$

4. Calculer : $\dfrac{2014 + 2014 + 2014 + 2014 + 2014 + 2014}{2014 + 2014 + 2014} = \ldots$

5. Dans un théâtre il y a 30 rangées de 24 fauteuils au parterre, 20 rangées de 30 fauteuils au premier balcon et 16 rangées de 30 fauteuils au second balcon. Ainsi, le nombre total de fauteuils est…

6. Une opération nouvelle, notée * se définit ainsi : $a * b = \dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab}$.

Calculer : $2\,014 * (2\,015 * 2\,016) = \ldots$

7. Le tiers du quart de douze fois 2 014 est égal à…

8. Le chiffre des millièmes dans l'écriture décimale du quotient de 72 par 64 est…

9. Une salle rectangulaire a pour largeur 5,5 m et pour longueur 12 m. Son aire est égale à … m^2.

10. Calculer : $987\,654\,321 + 123\,456\,789 = \ldots$

Solutions

1. On factorise le plus possible :

$500(3 + 1 - 1 + 1) + 7 + 7 = 500 \times 4 + 14 = 2\,000 + 14 = 2\,014$.

2. Dans un produit de facteurs, si l'un est nul, le produit est nul.

À cause de la parenthèse $(8 - 8) = 0$, le résultat est ici 0.

3. On regroupe les structures équivalentes :

$(12 - 10) + (11 - 9) + (8 - 6) + (7 - 5) + (4 - 2) + (3 - 1) = 2 \times 6 = 12$.

4. On factorise et on simplifie la fraction :
$$\frac{2014 + 2014 + 2014 + 2014 + 2014 + 2014}{2014 + 2014 + 2014} = \frac{6 \times 2014}{3 \times 2014} = \frac{6}{3} = 2.$$
5. On repère un facteur commun :

$30 \times 24 + 20 \times 30 + 16 \times 30 = 30(24 + 20 + 16) = 30 \times 60 = 1\,800$ places.

6. On simplifie quand c'est possible :
$$\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{ab} = \frac{4ab}{ab} = 4.$$
Ainsi a * b vaut toujours 4, donc, par exemple 2015 * 2016 = 4.

Par suite : 2014 * (2015 * 2016) = 2014 * (4) = 4. Le résultat final est 4.

7. On remarque que $(1/3) \times (1/4) \times 12 = 12/12 = 1$ et, par suite, le tiers du quart de douze fois 2014 vaut 1 fois 2014, soit 2014.

8. On simplifie par 8 : le quotient de 72 par 64 est le même que celui de 9 par 8.

Mais $9 = 8 + 1$ donc $9/8 = 1 + 1/8 = 1 + 0{,}125 = 1{,}125$. Le chiffre des millièmes est 5.

9. L'aire en m^2 vaut $5{,}5 \times 12 = 5{,}5 \times (10 + 2) = 5{,}5 \times 10 + 5{,}5 \times 2 = 55 + 11 = 66$.

Ou encore : $5{,}5 \times 12 = 5 \times 12 + 0{,}5 \times 12 = 60 + 6 = 66$. On a utilisé la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

10. Les additions en colonne concernent des nombres qui se complètent pour donner toujours 10. À part le chiffre des unités qui sera 0, les autres chiffres du résultat, qui doivent tenir compte d'une retenue de 1, seront des 1. Combien y aura-t-il de 1 dans l'écriture ? Les deux nombres à ajouter ont neuf chiffres, et leur total doit en avoir dix. Mis à part le 0 de droite il faut donc neuf chiffres 1 à sa gauche. Le résultat est 1 111 111 110.

QCM : comment être performant

Les conseils qui vont suivre concernent les QCM dont la règle du jeu, indiquée en début d'épreuve, précise qu'il y a une **bonne réponse et une seule parmi celles qui sont proposées**.

Si vous êtes bon en maths, vous allez avoir tendance **à résoudre le problème posé sans tenir compte des propositions de solutions**. Vous vérifierez que la réponse que vous avez trouvée figure bien parmi les propositions : si c'est le cas, vous vous direz « j'ai réussi » ; sinon vous chercherez une erreur dans vos calculs.

Dans certains types de problèmes, cette tactique va vous faire perdre du temps et vous ne pourrez pas finir l'ensemble des QCM, contrairement à d'autres candidats plus malins et efficaces.

Voici quelques exemples de problèmes où partir des valeurs proposées comme solutions permet d'être efficace et rapide.

Exemple

Bacchus se verse à boire la moitié d'une bouteille pleine de bon vin. Il revient vers la bouteille et boit le tiers de ce qui reste. Puis il retourne boire le quart du dernier reste. Le contenu restant de la bouteille lui permet de se remplir enfin un dernier verre de 33 cL.

Quelle est la capacité de cette bouteille ?

❒ **a.** 66 cL ❒ **b.** 100 cL ❒ **c.** 120 cL ❒ **d.** 132 cL ❒ **e.** 144 cL

Solution

Au lieu de se lancer dans des équations ou des calculs de fractions, on peut essayer de vérifier si l'on obtient le 33 cL final à partir d'une des valeurs proposées.

Un premier essai astucieux est de partir de la valeur du milieu parmi les propositions : ici 120 cL.

Bacchus verse 60 cL, il reste 60 cL. Il boit le tiers du reste soit 20 cL. Il reste 40 cL dans la bouteille. Il boit le quart de ce reste soit 10 cL, il reste 30 cL dans la bouteille et non 33 cL. Notre choix **c.** n'est pas le bon, mais comme il donne un peu moins que ce qu'il faut, on peut abandonner les essais pour une valeur moindre, et faire un autre essai avec la valeur du **d.** un peu supérieure : 132 cL.

Bacchus verse 66 cL, il reste 66 cL. Il boit le tiers du reste soit 22 cL, il reste 44 cL dans la bouteille. Il boit le quart du reste, soit 11 cL. Il reste 33 cL dans la bouteille : c'est ce qu'on souhaitait, la bonne réponse est **d.**

Apprivoisez une nouveauté : l'apparition de mini-problèmes dans les concours récents !

Dans cet exemple de mini-problème, les questions s'enchaînent : il convient d'utiliser la réponse du 1) pour trouver celle du 2), puis d'utiliser la réponse du 2) pour trouver celle du 3), etc. Chaque question n'est ni très longue ni difficile, mais il faut suivre rigoureusement l'enchaînement des questions.

Exemple

La suite des entiers strictement positifs est écrite sous forme d'un tableau triangulaire dont voici le début…

				1				
			2		3			
		4		5		6		
	7		8		9		10	
11		12		13		…		…

1. Comparer le numéro de la ligne à partir du haut avec le nombre de nombres écrits dessus.

2. Que vaut le premier terme de la 2 014^{e} ligne du tableau ?

3. Que vaut le dernier terme de la 2 014^{e} ligne du tableau ?

4. Que vaut la somme des termes de la 2 014^{e} ligne du tableau ?

Solution

1. Sur la ligne numéro n (à partir du haut du tableau) il y a n nombres écrits. Ainsi, sur la ligne numéro 2013, il y a 2 013 nombres, et sur la ligne numéro 2014, il y a 2 014 nombres.

2. Les lignes numéros 1 à 2013 contiennent (1 + 2 + 3 +…+ 2 013) nombres. On rappelle que la somme des nombres de 1 à n vaut n(n + 1)/2. Ainsi : (1 + 2 + 3 +…+ 2 013) = 2 013 × 2 014/2 = 2 027 091. Le premier nombre de la ligne numéro 2014 vaut donc 2 027 091 + 1 = 2 027 092.

3. Sur la ligne numéro 2014, il y a 2 014 nombres. Le dernier nombre de cette ligne est supérieur de 2 013 au premier. Le dernier nombre de la ligne est 2 027 092 + 2 013 = 2 029 105.

4. La somme des termes de la 2 014^{e} ligne du tableau est une somme de nombres consécutifs égale à :

$$2\,027\,092 + 2\,027\,093 + \ldots + 2\,029\,105$$
$$= (2\,027\,092 + 2\,029\,105) \times 1\,007 = 4\,056\,197 \times 1\,007 = 4\,084\,590\,379.$$

En effet, on peut regrouper les 2 014 nombres en 1 007 paires de même somme, celle-ci étant égale au total des premier et dernier termes de cette progression arithmétique de raison 1.

Exercices d'entraînement

1. Ma sœur a autant de frères que de sœurs. Mon frère a deux fois plus de sœurs que de frères. Combien y a t-il d'enfants dans notre famille ?

❑ **a.** 5 ❑ **b.** 6 ❑ **c.** 7 ❑ **d.** 8 ❑ **e.** 9

2. Je suis un nombre de deux chiffres. Si on intervertit mes deux chiffres, on obtient un nombre valant 1 de moins que ma moitié. Qui suis-je ?

❑ **a.** 32 ❑ **b.** 42 ❑ **c.** 52 ❑ **d.** 34
❑ **e.** un tel nombre n'existe pas

3. Dans 20 ans, ton âge sera le carré de ton âge actuel. Quel âge as-tu ?

❑ **a.** 5 ans ❑ **b.** 6 ans ❑ **c.** 7 ans ❑ **d.** 8 ans ❑ **e.** 9 ans

4. Soient a, b, c trois nombres réels. Quatre des cinq relations ci-dessous sont équivalentes entre elles (reviennent au même après simplification).

Quelle est celle qui n'est équivalente à aucune autre ?

❑ **a.** $b = \frac{(a+c)}{2}$ ❑ **b.** $b = \frac{(a+b+c)}{3}$ ❑ **c.** $b = \frac{(2a+b+2c)}{5}$ ❑ **d.** $b = \frac{(4a+2b+c)}{7}$
❑ **e.** $b = a - b + c$

5. Ludo écrit trois nombres. En les ajoutant deux par deux, il obtient les sommes 63, 65 et 68. Quel est le plus petit des trois nombres écrits ?

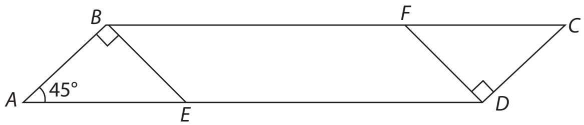
❑ **a.** 25 ❑ **b.** 28 ❑ **c.** 23 ❑ **d.** 31 ❑ **e.** 30

6. Une mouche s'est écrabouillée sur l'extrémité d'une pale d'éolienne de 20 m de rayon. Celle-ci tourne régulièrement à la vitesse de 30 tours à la minute.

Quelle est la vitesse de déplacement du cadavre de la mouche (à 1 km/h près) ?

❑ **a.** 147 km/h ❑ **b.** 166 km/h ❑ **c.** 185 km/h ❑ **d.** 204 km/h ❑ **e.** 226 km/h

La géométrie est propice à des questions enchaînées, mais la forme du concours conduit à ne poser que des questions donnant des réponses chiffrées faciles à corriger, et l'on ne demande jamais de rédiger des démonstrations structurées du raisonnement qui est utile pour aboutir aux réponses.



7. Testez-vous maintenant sur cet exercice.

Sur la figure ci-dessus :

- ABCD est un parallélogramme dont les côtés ont pour mesures en centimètre : AB = $\sqrt{2}$ et AD = 10.
- L'angle A vaut 45°
- Les droites (BE) et (DF) sont perpendiculaires à (AB)

Le but du problème est de calculer la distance entre les droites (BE) et (DF)

a. Calculer l'aire en cm^2 du triangle ABE.

b. Combien de cm mesure la hauteur issue de B dans le triangle ABE ?

c. Calculer l'aire en cm^2 du parallélogramme ABCD.

d. Calculer l'aire en cm^2 de BFDE.

e. Combien mesure la distance entre les droites (BE) et (DF) ? Donner la valeur exacte en cm.

8. Lequel des nombres ci-dessous est le plus grand ?

❑ **a.** $\frac{2013}{2014}$ ❑ **b.** $\frac{2014}{2015}$ ❑ **c.** $\frac{2015}{2016}$ ❑ **d.** $\frac{-2016}{-2017}$

❑ **e.** $\frac{-2016}{2017}$

9. Auquel des nombres ci-dessous est égal le quotient $\frac{50^{20}}{100^{10}}$?

❑ **a.** $1/2^{10}$ ❑ **b.** 5^{10} ❑ **c.** 2^{25} ❑ **d.** 25^{10} ❑ **e.** 50^{10}

10. Parmi les cinq expressions suivantes, l'une ne donne pas le même résultat que les quatre autres. Laquelle ?

❒ **a.** 0,25/2 ❒ **b.** $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ ❒ **c.** $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})/\ 4$ ❒ **d.** $\frac{1}{2} \times \frac{4}{16}$
❒ **e.** $\frac{125}{1\,000}$

11. Papy a un jardin rectangulaire dont l'aire est 70 m² et le périmètre 38 m. Quelle est en mètres la plus petite des deux dimensions ?

❒ **a.** 21 ❒ **b.** 7 ❒ **c.** 14 ❒ **d.** 5 ❒ **e.** 19

12. L'entier n tel que 2 014 = 1 + 2 + 3 + … + (n – 1) + n

❒ **a.** N'existe pas ❒ **b.** vaut 1 033 ❒ **c.** vaut 62 ❒ **d.** vaut 63
❒ **e.** vaut 64

Corrigés des exercices

1. Réponse c.

« Ma sœur a autant de frères que de sœurs » : il y a donc une fille de plus que le nombre de garçons. Essayons la valeur centrale proposée : 7 enfants, qui correspond à 4 filles et 3 garçons : une fille a autant de sœurs (3) que de frères (3), un garçon a deux fois plus de sœurs (4) que de frères (2). La solution est donc 7 enfants.

2. Réponse c.

On peut faire des essais avec les quatre valeurs proposées.

52 est la solution, car l'interversion donne 25, et 25 + 1 = 26, qui est la moitié de 52.

3. Réponse a.

Il peut sauter à l'œil immédiatement que 5 + 20 = 25, qui est le carré de 5.

4. Réponse d.

Partons de la première proposition, b = (1 / 2) (a + c), et imaginons des valeurs qui la respectent, par exemple a = 1, b = 2, c = 3, car 2 = (1 / 2) (1 + 3). Les calculs des propositions suivantes conduisent à :

a. (1 + 3) / 2 = 2 : vrai. **c.** (1 / 5) (10) = 2 : vrai. **e.** 1 – 2 + 3 = 2 : vrai.
b. (1 / 3) (6) = 2 : vrai. **d.** (1 / 7) (11) = 2 : faux.

La formule différente des autres est donc d.

5. Réponse d.

Classons les propositions par ordre croissant : 23, 25, 28, 30, 31. La valeur centrale est 28 : essayons-la.

Pour faire 63, il faut un deuxième nombre égal à 63 – 28 = 35. Pour faire 65, il faut un troisième nombre égal à 65 – 28 = 37. La somme de 35 et 37 fait 72, ce qui ne correspond pas à l'énoncé (68).

Comme on trouve trop avec ces deux nombres obtenus par des soustractions, on va plutôt essayer les valeurs supérieures du petit nombre, ce qui, par soustraction à ces deux grands nombres, donnera moins.

Prenons 30. Pour faire 63, il faut un deuxième nombre égal à 63 – 30 = 33. Pour faire 65, il faut un troisième nombre égal à 65 – 30 = 35. On obtient alors la somme 33 + 35 = 68 qui correspond à l'énoncé.

Le plus petit des trois nombres est 30.

6. Réponse e.

Le cadavre de la mouche parcourt un cercle dont le rayon est de 20 m, 30 fois par minute, donc $30 \times 60 = 1\,800$ fois par heure.

Le périmètre correspondant à un tour est $2\,\pi\,R = 40\,\pi$ (en mètres).

La distance parcourue en une heure par le cadavre, en km, est : $40\,\pi \times 1\,800 / 1\,000 = 40\,\pi \times 1{,}8 = 72\,\pi$.

On sait que π vaut environ 3,14, mais ce qui importe, c'est que π est plus grand que 3. Comme 72 est plus grand que 70, le résultat cherché est supérieur à $70 \times 3 = 210$ km. Il n'y a qu'une seule proposition supérieure à 210 km, c'est 226 km.

On peut éviter tout calcul précis dans ce QCM, et s'en tirer par une évaluation de l'ordre de grandeur du résultat confronté aux propositions. Ceci est vrai même si les propositions semblent précises (comme ici 147, 166, 204…).

7. **a.** Avec un angle droit et un angle de 45°, le triangle ABE est rectangle et isocèle ; les côtés de l'angle droit mesurent $\sqrt{2}$. Son aire vaut : $\sqrt{2} \times \sqrt{2}/2 = 1$ cm².

b. Grâce au théorème de Pythagore, dans le triangle rectangle ABE, $AE^2 = 2 + 2 = 4$, donc AE = 2. Dans ce triangle rectangle isocèle, la hauteur issue de B est aussi médiane, et sa longueur est la moitié de celle de l'hypoténuse AE, donc elle vaut 2/2 = 1 cm.

c. La hauteur issue de B dans ABE est aussi la hauteur perpendiculaire aux côtés AD et BC du parallélogramme ABCD. Comme AD = 10 cm, l'aire de ABCD est $10 \times 1 = 10$ cm².

d. Les triangles ABE et FDC sont symétriques par rapport au centre du parallélogramme ABCD ; ils ont la même aire : 1 cm². L'aire de BFDE vaut celle de ABCD diminuée de 2 fois celle de ABE, donc elle vaut 10 – 2 = 8 cm².

e. Les droites (BE) et (DF) sont parallèles, car elles sont toutes deux perpendiculaires à la même droite (AB). Comme on a aussi (BF) qui est parallèle à (ED), la figure BFDE a ses côtés parallèles deux à deux, donc c'est un parallélogramme. Son aire, qui vaut 8 cm², est le produit de sa base BE, qui vaut $\sqrt{2}$ cm, par sa hauteur perpendiculaire, qui est la distance entre les droites (BE) et (DF). Celle-ci vaut donc $8/\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm.

8. Réponse d.

La dernière proposition est un nombre négatif, donc il n'est pas le plus grand.
Il est important de voir que les autres fractions ont toutes la même allure : $a/(a + 1)$.
On sait que la fonction « inverse » est décroissante. Quand a augmente, et donc quand $(a + 1)$ augmente, le quotient $1/(a + 1)$ diminue.
Remarquons que $a/(a + 1) = 1 - 1/(a + 1)$. Si on enlève $1/(a + 1)$ de 1, on lui enlève de moins en moins quand a augmente, donc on progresse vers 1. Quand a est positif, la fonction $f(a) = a/(a + 1) = 1 - 1/(a + 1)$ est croissante.
Ainsi $f(2\,013) < f(2\,014) < f(2\,015) < f(2\,016)$.

La plus grande valeur est $\dfrac{-2016}{-2017} = \dfrac{2016}{2017}$.

9. Réponse d.

D'une part, $50^{20} = (5^2)^{20} \times 2^{20} = 5^{40} \times 2^{20}$. D'autre part, $100^{10} = (2^2 \times 5^2)^{10} = 2^{20} \times 5^{20}$.

Le quotient $\dfrac{50^{20}}{100^{10}}$ se simplifie en 5^{20}, ce qui est égal à 25^{10}.

10. Réponse b.

Le **a.** et le **b.** donnent deux résultats différents (soit 1/8 = 0,125 et 1/6), donc il suffit de calculer un troisième nombre pour pouvoir répondre. Comme le dernier nombre (le e.) est clairement 0,125, on conclut que c'est le **b.** la valeur isolée.

11. Réponse d.

Quand on aime les chiffres, on réagit à partir de 70 en imaginant 5×14, puis $5 + 14 = 19$ dont le double est 38. On a deviné les dimensions du terrain : 5 et 14, et la bonne réponse est donc 5. Si l'on n'a pas cette intuition, il faut trouver deux nombres dont le produit est 70 et la somme 19, ce qui ramène à résoudre l'équation du second degré $x^2 - 19x + 70 = 0$. On peut aussi, comme l'aire est le produit de deux dimensions, chercher parmi les propositions des diviseurs de 70 : il n'y en a que trois à envisager et à tester : 5, 7 et 14.

12. Réponse a.

On sait que $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = n(n + 1)/2$ et les valeurs proposées sont en majorité dans le même ordre de grandeur (62, 63, 64). Essayons la formule avec $n = 63$: on obtient $63 \times 64/2 = 2\,016$, c'est trop grand. Essayons la formule avec $n = 62$: on obtient $62 \times 63/2 = 1\,953$, c'est trop petit.
Avec cet encadrement, les autres valeurs sont hors jeu, et on peut donc conclure que « n n'existe pas ».

Nombres relatifs

2

Testez-vous

Voici une série de 10 exercices à faire en 10 minutes pour évaluer votre niveau, puis vous donner un objectif de travail.

1. On invente une nouvelle opération notée * telle que pour tous les nombres x et y strictement positifs l'on ait $x^*y = \dfrac{xy}{x+y}$. Que vaut 10*2 ?

❐ **a.** 5/3 ❐ **b.** 5/2 ❐ **c.** 5 ❐ **d.** 20/3 ❐ **e.** 20

2. Dans le tableau incomplet ci-dessous, la somme de chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale doit être le même nombre. Que vaut Z ?

	− 8	3
Z	− 2	T
		− 3

❐ **a.** − 6 ❐ **b.** − 5 ❐ **c.** 2 ❐ **d.** 5 ❐ **e.** 8

3. Sur une droite, on donne 4 points A, B, C et D alignés dans cet ordre en respectant les distances suivantes : AD = 35, AC = 22 et BD = 29. Quelle est la distance BC ?

❐ **a.** 5 ❐ **b.** 6 ❐ **c.** 7 ❐ **d.** 3 ❐ **e.** 16

4. Pascal a acheté 3 chemises dans une boutique. Les deux premières d'entre elles étaient affichées au prix de deux pour 15 euros. Sachant que le prix moyen des trois chemises est 8 euros, combien Pascal a-t-il payé pour la troisième ?

❐ **a.** 7 € ❐ **b.** 7,67 € ❐ **c.** 8,50 € ❐ **d.** 9 € ❐ **e.** 7,75 €

5. On sait que $xy = 2$ et que $xy^2 = 8$. Que vaut x ?

❐ **a.** 0,5 ❐ **b.** 2 ❐ **c.** 4 ❐ **d.** 8 ❐ **e.** 16

6. Sachant que $y = (x + 3)^2$ à laquelle des expressions suivantes est égal $(-2x - 6)^2$?

❐ **a.** $-4y^2$ ❐ **b.** $-4y$ ❐ **c.** $-2y^2$ ❐ **d.** $4y^2$ ❐ **e.** $4y$

7. Bill possède des quarters (de 25 cents), des nickels (de 5 cents) et des dimes (de 10 cents). Il a 4 quarters de plus que de dimes, et 3 dimes de plus que

Aptitude numérique

de nickels. Si n désigne le nombre de nickels en sa possession, laquelle des formules suivantes représente en cents la valeur totale de toutes ses pièces ?

❒ **a.** $40n + 205$ ❒ **b.** $40n + 130$ ❒ **c.** $40n + 7$
❒ **d.** $7n + 130$ ❒ **e.** $3n + 10$

8. Que vaut $(10 - 9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1)(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10)$?

9. L'opposé de $22 - 50$ est…

❒ **a.** $22 + 50$ ❒ **b.** $50 - 22$ ❒ **c.** $\dfrac{1}{22 - 50}$
❒ **d.** $-22 - 50$ ❒ **e.** $1/22 + 1/50$

10. Dans le buffet, il y avait 7 assiettes dans une pile, 3 de moins dans une autre. Janine en place 6 sur la table et 3 de moins sur la desserte. Combien reste-t-il d'assiettes dans le buffet ?

Solutions

1. La bonne réponse est **a.**
2. La bonne réponse est **c.**
3. La bonne réponse est **e.**
4. La bonne réponse est **d.**
5. La bonne réponse est **b.**
6. La bonne réponse est **e.**
7. La bonne réponse est **a.**
8. Le produit final vaut $(+5)(-5) = -25$.
9. La bonne réponse est **b.**
10. Il reste 2 assiettes.

Quel est votre niveau ?

Notez-vous : un point par bonne réponse. Si vous obtenez :

- moins de 3 points sur 10 : il vous faudra travailler intensément ce chapitre ;
- entre 4 et 8 points, il vous faudra réviser et approfondir ce chapitre ;
- 9 ou 10 points, vous pourrez passer ce chapitre en première étape de votre préparation générale.

Le mot « relatif » peut s'entendre comme « relativement à zéro », et l'on considère donc des nombres qui peuvent être positifs (supérieurs à zéro) ou négatifs (inférieurs à zéro).

Comparer deux nombres relatifs

- **Si l'un des deux nombres est positif et l'autre négatif** : c'est le nombre négatif qui est le plus petit.`

Exemple

$-2 < +1$.

- **Si les deux nombres sont positifs** : on applique la règle habituelle de comparaison.

Exemple
6 < 8 soit + 6 < + 8.

- **Si les deux nombres sont négatifs** : c'est le nombre qui a la plus grande distance à zéro qui est le plus petit.

Exemple
– 8 < – 6 car la distance – 8 à zéro est 8, ce qui est plus grand que la distance de – 6 à zéro qui n'est que 6.

Additionner des nombres relatifs

- **Pour deux nombres relatifs de même signe** : on ajoute les deux distances par rapport à zéro, et on met devant le résultat le signe commun aux deux nombres.

Exemples
(– 2) + (– 3) = (– 5)   (+ 6) + (+ 8) = (+ 14)

- **Pour deux nombres relatifs de signes différents** : on soustrait les deux distances à zéro, et on met devant le résultat le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.

Exemples
(– 2) + (+ 5) = (+ 3) : le signe du résultat est + car 5 > 2.
(– 7) + (+ 2) = (– 5) : le signe est – car 7 > 2.

- **Quand deux nombres sont opposés** : leur somme est égale à zéro.

Exemple
(– 4) et (+ 4) sont opposés : (– 4) + (+ 4) = 0.

Soustraire des nombres relatifs

- Pour **soustraire** un nombre relatif, il faut ajouter son opposé.

Exemples
(+ 12) – (– 4) = (+ 12) + (+ 4) = (+ 16).
(+ 10) – (+ 18) = (+ 10) + (– 18) = (– 8).

Simplifier l'écriture des nombres relatifs

- **Dans une suite d'additions** de nombres relatifs, on peut supprimer les signes d'addition et les parenthèses.

Un nombre positif écrit en début de calcul peut s'écrire sans signe (mais pas un nombre négatif).

Exemples

(+ 7) + (+ 11) + (– 16) peut s'écrire 7 + 11 – 16.

(– 3) + (+ 2) + (– 5) peut s'écrire – 3 + 2 – 5.

Inversement, le calcul 5 – 8 + 11 peut s'écrire (+ 5) + (– 8) + (+ 11).

Effectuer une suite de calculs avec des nombres relatifs

- **S'il n'y a pas de parenthèses encadrant les calculs** :

1re tactique : on transforme les soustractions de nombres relatifs négatifs en additions, on supprime les termes opposés s'il y en a, puis on regroupe les termes positifs et les termes négatifs, et on effectue les sommes de ces termes.

2e tactique : on applique les règles de simplification des écritures, on supprime les opposés, on regroupe les termes positifs et négatifs et on effectue les sommes.

- **S'il y a des calculs encadrés par des parenthèses** : on commence par effectuer les calculs dans les parenthèses, ensuite on applique une des méthodes précédentes.

Multiplier deux nombres relatifs

Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie leurs distances à zéro, puis on détermine le signe du produit :

- si les deux nombres sont de **même signe**, le produit est **positif** ;
- si les deux nombres sont de **signes différents**, le produit est **négatif**.

Exemples

(– 3) × (– 8) = (+ 24) (– 2) × (+ 6) = (– 12)

(+ 6) × (+ 7) = (+ 42) (+ 8) × (– 3) = (– 24)

Multiplier plusieurs nombres relatifs

On compte le nombre de nombres négatifs dans ce produit :

- si ce nombre est **pair**, le produit est **positif** ;
- si ce nombre est **impair**, le produit est **négatif**.

Exemples

(– 2) × (– 5) × (+ 7) × (– 6) = – 420 : il y a trois négatifs donc le produit est négatif.

(– 6) × (+ 5) × (– 5) × (+ 4) = + 600 : il y a deux négatifs donc le produit est positif.

Diviser deux nombres relatifs

Pour diviser deux nombres relatifs (le diviseur n'étant pas zéro) :

- on divise leurs distances à zéro ;
- on applique la même règle de signe que pour la multiplication.

Exemples

$\frac{(-8)}{(-2)} = (+4)$ $\frac{(-15)}{(+5)} = (-3)$

Appliquer les priorités

- Si un calcul comporte des **opérations entre parenthèses**, celles-ci sont effectuées en priorité.

Exemples

$(-6) - ((-5) + (-2)) = (-6) - (-7) = -6 + 7 = +1.$

$(-2{,}5) \times (-4 + 8) = (-2{,}5) \times (+4) = (-10).$

- Si un calcul ne comporte **pas d'opérations entre parenthèses**, les multiplications et les divisions sont effectuées en priorité sur les additions et les soustractions.

Exemple

$(-3) + (-4) \times (+3) = -3 + (-12) = (-15).$

Conduire un calcul

On observe d'abord la présence éventuelle de **parenthèses**, puis d'opérations de **priorités** différentes.

Cependant, pour faciliter le calcul de certaines expressions, on peut aussi utiliser la **distributivité** de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$
$$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$$

Exemples

$$\begin{aligned} & (-8) \times (+13) + (-8) \times (-3) \\ = \ & (-8) \times (+13 + (-3)) \\ = \ & (-8) \times (+10) = (-80). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-75) \times (+102) \\ = \ & (-75) \times (100 + 2) \\ = \ & (-75) \times 100 + (-75) \times 2 \\ = \ & -7\,500 - 150 = -7\,650. \end{aligned}$$

Avant d'exécuter un calcul, on pourrait dire qu'il se médite.

Exercices d'entraînement

Niveau 1

0015

1. Ranger par ordre décroissant les nombres suivants :

$-11 \qquad -11{,}8 \qquad -18 \qquad +11 \qquad -10{,}8$

2. Calculer x dans chacune des égalités suivantes :

a. $6 + x = -2$ **b.** $x + (-3) = +1$ **c.** $(+5) + x = -8$

3. Calculer les quatre nombres suivants :

a. $(-14) - (-11) =$ **c.** $-7 - 8 + 9 - 7 =$

b. $(+25) + (-7) =$ **d.** $6 - 15 - 7 + 2 =$

4. Calculer les deux nombres suivants :

a. $17 - ((-3) - (+12)) =$ **b.** $(13 - (-2)) - (9 - (+12)) =$

5. Calculer $(-2) \times (+4) \times (-5) \times (-3)$.

6. Calculer $(-7) + (-3) \times (-2) - (-9)$.

7. Calculer $15 - [7 - [-3 - (-12)]]$.

8. Déterminer x sachant que $(-5) + (-x) = 15$.

9. Calculer les trois expressions suivantes :

a. $\dfrac{(-9)}{(-3)}$ **b.** $7 \times (-4)$ **c.** $-5 \times (-2 + 6)$

10. Calculer astucieusement :

a. $970 \times (-13) + 30 \times (-13)$ **b.** $-99 \times (+25)$

11. Calculer $-8 - (-4) \times 7 + (-7) \times 4 + (-8)$.

12. Calculer $(-35)/(-7) - 5 \times 6 - 8/(-2)$.

Niveau 2

0025

13. Que vaut $3 - (2 - (1 - (3 - (2 - (1 - 3)))))$?

❑ **a.** -3 ❑ **b.** -1 **c.** 0 ❑ **d.** 1 ❑ **e.** 3

14. Roméo et Juliette ont décidé d'explorer un gouffre dont le point le plus bas est situé à -426 m par rapport au niveau de l'entrée. Ils arrivent à -134 m et doivent descendre dans un puits pour atteindre un ruisseau souterrain qui coule à -251 m. Lorsqu'ils ont atteint ce ruisseau, de combien de mètres doivent–ils encore descendre pour atteindre le fond du gouffre ?

❑ **a.** 41 m ❑ **b.** 175 m ❑ **c.** 185 m ❑ **d.** 292 m ❑ **e.** 309 m

15. Du cube de (– 1) on soustrait le carré de (– 4). Que vaut cette différence ?

❑ **a.** 65 ❑ **b.** 7 ❑ **c.** 63 ❑ **d.** – 15 ❑ **e.** – 17

16. $-2^2 - 2^2 = ?$

❑ **a.** -2^3 ❑ **b.** -2^0 ❑ **c.** 2^0 ❑ **d.** 2^4 ❑ **e.** 4^2

17. Le nombre 1 – 2 + 3 – 4 + … + 2 005 – 2 006 n'est pas :

❑ **a.** entier ❑ **b.** négatif ❑ **c.** inférieur à 500
❑ **d.** multiple de 3 ❑ **e.** multiple de 2

18. Que vaut : 2 – 4 + 6 – 8 + … – 204 + 206 – 208 + 210 ?

❑ **a.** 104 ❑ **b.** 106 ❑ **c.** 210 ❑ **d.** – 208 ❑ **e.** – 210

19. Que vaut $(-1)^{2006} - (-1)^{2007}$?

❑ **a.** – 2 ❑ **b.** – 1 ❑ **c.** 0 ❑ **d.** 1 ❑ **e.** 2

20. Parmi les nombres suivants, quel est le plus petit qui dépasse $-\frac{11}{7}$?

❑ **a.** – 1,57 ❑ **b.** – 1,58 ❑ **c.** – 1,56 ❑ **d.** – 11,7 ❑ **e.** – 11,71

21. Que vaut – 2,333… ?

❑ **a.** $-\frac{5}{3}$ ❑ **b.** $-\left(2+\frac{3}{10}\right)$ ❑ **c.** – 2,34 ❑ **d.** $-\frac{7}{3}$ ❑ **e.** – 2,4

22. 2 006 – (1 – 2) – (3 – 4) – (5 – 6) –… – (2 005 – 2 006) = ?

❑ **a.** 1 003 ❑ **b.** 2 006 ❑ **c.** 3 009 ❑ **d.** 0 ❑ **e.** 4 012

Corrigés des exercices

Niveau 1

1. Par ordre décroissant : + 11 > – 10,8 > – 11 > – 11,8 > – 18.

2. **a.** 6 + x = – 2 donne x = – 2 – 6 = – 8.
b. x + (– 3) = + 1 donne x = + 1 – (– 3) = + 4.
c. (+ 5) + x = – 8 donne x = – 8 – (+ 5) = – 13.

3. **a.** (– 14) – (– 11) = – 14 + 11 = – 3.
b. (+ 25) + (– 7) = + 18.
c. – 7 – 8 + 9 – 7 = – 15 + 9 – 7 = – 6 – 7 = – 13.
d. 6 – 15 – 7 + 2 = – 9 – 7 + 2 = – 16 + 2 = – 14.

4. **a.** 17 – ((– 3) – (+ 12)) = 17 – (– 3 – 12)
= 17 – (– 15) = 17 + 15 = + 32.
b. (13 – (– 2)) – (9 – (+ 12)) = (13 + 2) – (9 – 12)
= 15 – (– 3) = 15 + 3 = 18.

5. $(-2) \times (+4) \times (-5) \times (-3) = -120$. Le résultat est négatif, car il y a un nombre impair (3) de nombres négatifs dans le produit.

6. $(-7) + (-3) \times (-2) - (-9) = -7 + 6 + 9 = -1 + 9 = +8$.

7. $15 - [7 - [-3 - (-12)]] = 15 - [7 - (-3 + 12)]$
$= 15 - (7 - 9)$
$= 15 - (-2) = 15 + 2 = 17$.

8. $(-5) + (-x) = 15$ donne $-5 - 15 = x$, d'où $x = -20$.

9. **a.** $\dfrac{(-9)}{(-3)} = \mathbf{+3}$
b. $7 \times (-4) = \mathbf{-28}$
c. $-5 \times (-2 + 6) = -5 \times (4) = \mathbf{-20}$

10. **a.** $970 \times (-13) + 30 \times (-13)$
$= (970 + 30) \times (-13)$
$= 1\,000 \times (-13) = \mathbf{-13\,000}$

b. $-99 \times (+25)$
$= -(100 - 1)(25)$
$= -100 \times 25 - (-1) \times 25$
$= -2\,500 + 25 = \mathbf{-2\,475}$.

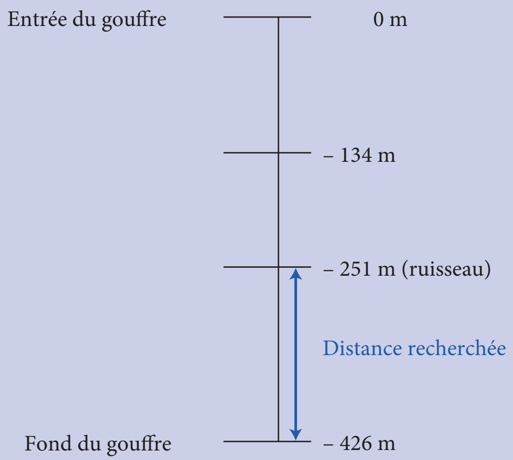
11. $-8 - (-4) \times 7 + (-7) \times 4 + (-8) = -8 - (-28) + (-28) - 8$
$= -8 + 28 - 28 - 8 = \mathbf{-16}$

12. $(-35)/(-7) - 5 \times 6 - 8/(-2) = 5 - 30 - (-4) = 5 - 30 + 4 = -25 + 4 = \mathbf{-21}$

Niveau 2

13. Bonne réponse : e.
$3 - (2 - (1 - (3 - (2 - (1 - 3))))) = 3 - (2 - (1 - (3 - (2 - (-2)))))$
$= 3 - (2 - (1 - (3 - (4))))$
$= 3 - (2 - (1 - (-1)))$
$= 3 - (2 - (2)) = \mathbf{3}$

14. Bonne réponse : b.
Dans ce genre d'exercices, un dessin pourrait aider à mieux comprendre l'énoncé et à trouver rapidement la solution :



Le -134 ne sert à rien. On calcule $426 - 251 = \mathbf{175\ m}$.

15. Bonne réponse : e.

On écrit le calcul : $(-1)^3 - (-4)^2 = -1 - (+16) = -17$.

16. Bonne réponse : a.

$-4 - 4 = -8 = -2^3$.

En l'absence de parenthèses, la puissance s'applique au 2 et non au signe –, de même que la multiplication a priorité sur la soustraction.

17. Bonnes réponses : d. et e.

Il faut d'abord effectuer le calcul : $\underbrace{1-2}_{=-1} + \underbrace{3-4}_{=-1} + \ldots \underbrace{2\,005 - 2\,006}_{=-1}$

On remarque qu'on peut regrouper les nombres composant ce calcul par paires, chaque paire composant une soustraction et chaque soustraction étant égale à -1.

Il faut donc calculer le nombre de paires. Il y a 2 006 nombres dans le calcul.

Quand on les regroupe par deux, cela donne $\frac{2\,006}{2} = 1\,003$ paires.

Le résultat est donc : $-1 \times 1\,003 = -1\,003$.

$-1\,003$ est un nombre entier négatif inférieur à 500, mais il n'est ni multiple de 3 ni multiple de 2.

18. Bonne réponse : b.

Il y a 105 nombres, on laisse le premier 2, et les 104 autres peuvent être regroupés par paires (voir exercice précédent) soit 52 paires donnant chacune 2.

D'où la somme : $2 + 52 \times 2 = 106$.

19. Bonne réponse : e.

2 006 est pair, donc : $(-1)^{2\,006} = 1$; 2 007 est impair, donc : $(-1)^{2\,007} = -1$.

On a donc : $1 - (-1) = 2$.

20. Bonne réponse : a.

$\frac{-11}{7}$ vaut environ $-1{,}5714$; le plus petit nombre supérieur proposé est $-1{,}57$.

21. Bonne réponse : d.

Seul $\frac{-7}{3}$ donne la bonne valeur.

Au **b.** on trouve $-2{,}3$ ce qui n'est pas exactement la réponse mais seulement une valeur approchée.

22. Bonne réponse : c.

$2\,006 - (-1 \times 1\,003) = 2\,006 + 1\,003 = 3\,009$.

3 Calculs, priorités et estimations

Testez-vous

Voici une série de 10 exercices à faire en 10 minutes pour évaluer votre niveau, puis vous donner un objectif de travail.

1. Monsieur Laprune a vendu hier 98 kg de certains fruits pour 456 € et aujourd'hui 52 kg d'autres fruits pour 243 €. Quel est le prix moyen du kilo des fruits vendus en deux jours ?

2. Marco avait acheté pour un total de 300 € un lot de 125 paniers de fraises. Il a revendu chaque panier 2,50 €. A-t-il gagné ou perdu, et combien ?

3. La moyenne de 13 et de deux nombres égaux entre eux est 15. Quelle est la valeur des deux autres nombres ?

4. Pour le mouvement d'ensemble du concours de gymnastique, nous avons compté 24 rangs de 125 gymnastes chacun. Quand ils levaient les bras, combien voyait-on de bras levés ?

5. Parmi les nombres suivants, l'un est la moyenne arithmétique d'un entier et de son carré. Lequel ?

❒ **a.** 4 ❒ **b.** 9 ❒ **c.** 16 ❒ **d.** 25 ❒ **e.** 36

6. Pour leur début de journée, les bus 9, 23 et 41 partent tous de la même station à 6 h du matin, puis respectivement toutes les 12, 15, et 20 minutes. À quelle heure repartiront-ils simultanément pour la deuxième fois ?

7. Calculer le produit du PPCM et du PGCD de 24 et 15.

8. Un nombre réel est compris entre 5 et 11. La moyenne arithmétique de ce nombre et de 6 et 10 ne peut pas être…

❒ **a.** 7,1 ❒ **b.** 7,9 ❒ **c.** 8,5 ❒ **d.** 8,9 ❒ **e.** 9,1

9. Sylvain a fait entourer son pré d'une rangée de fil de fer qui revient posée à 30 € le mètre. Pour mesurer le tour du pré, on a posé 16 fois la chaîne d'arpenteur. Combien a coûté la clôture ?

10. Dans un théâtre, il y a 30 rangées de 24 fauteuils au parterre, 20 rangées de 30 fauteuils au premier balcon et 16 rangées de 30 fauteuils au second balcon. Quel est le nombre total de fauteuils ?

Solutions

1. Prix moyen du kg = 4,66 €.
2. Il a gagné 12,50 €.
3. Chaque nombre vaut 16.
4. Nombre de bras levés : 6 000.
5. Bonne réponse **e.** 36
6. Les bus se retrouvent ensemble pour la deuxième fois à 7 heures du matin.
7. Réponse : 360.
8. Bonne réponse **e.** 9,1
9. Le prix de la clôture est 4 800 €.
10. Total = 1 800 fauteuils.

Quel est votre niveau ?

Notez-vous : un point par bonne réponse. Si vous obtenez :

- moins de 3 points sur 10 : il vous faudra travailler intensément ce chapitre ;
- entre 4 et 8 points, il vous faudra réviser et approfondir ce chapitre ;
- 9 ou 10 points, vous pourrez passer ce chapitre en première étape de votre préparation générale.

Priorités

Calculs sans parenthèses

- Dans un calcul sans parenthèses et formé uniquement d'additions et de soustractions, les calculs s'effectuent de **gauche à droite**.

Exemple

$39 - 5 + 6 = 34 + 6 = 40$.

- Dans un calcul sans parenthèses, la **multiplication et la division sont effectuées en priorité** sur l'addition et la soustraction.

Exemples

$4 + 7 \times 3 = 4 + 21 = 25$; $7 - 6 / 3 = 7 - 2 = 5$.

Calculs avec parenthèses

Dans un calcul avec parenthèses, les calculs **entre parenthèses** sont effectués **en priorité.**

Exemples

$15 - (8 - 3) = 15 - 5 = 10$;

$(8 + 6 \times 2) \times (7 - 4 \times 2) = (8 + 12) \times (7 - 8) = (20) \times (-1) = -20$.

Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction

Quels que soient les nombres a, b, c :

- Les calculs : $a \times (b + c)$ et $(a \times b) + (a \times c)$ donnent le même résultat :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

Ce résultat se note également :

$$a\,(b + c) = a\,b + a\,c$$

- Les calculs : $a \times (b - c)$ et $(a \times b) - (a \times c)$ donnent le même résultat :

$$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$$

Ce résultat se note également :

$$a\,(b - c) = a\,b - a\,c$$

Exemples

- Pour calculer 62×99 « de tête », on peut penser à effectuer :

$62 \times 99 = 62 \times (100 - 1) = 62 \times 100 - 62 \times 1 = 6\,200 - 62 = 6\,138$.

- Pour calculer de tête $7 \times 35 + 7 \times 45$, on peut penser à effectuer :

$7 \times 35 + 7 \times 45 = 7 \times (35 + 45) = 7 \times 80 = 560$.

Parenthèses emboîtées

S'il y a des parenthèses les unes dans les autres, **on commence par les parenthèses les plus internes**.

Exemple

Calculer le nombre N égal à $(5 + (4 \times (3 - 2)) - 6)$.

$N = (5 + (4 \times 1) - 6) = (5 + 4 - 6) = 9 - 6 = 3$.

Nombres en écriture fractionnaire

La valeur d'une fraction ne change pas si l'on multiplie (ou si l'on divise) son **numérateur** et son **dénominateur** par un même nombre non nul :

Si b et k ne sont pas nuls : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{(a \times k)}{(b \times k)}$ et $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$.

Exemples

$\frac{2}{3} = \frac{(2\times 5)}{(3\times 5)} = \frac{10}{15}$ $\qquad$ $\frac{18}{12} = \frac{\frac{18}{6}}{\frac{12}{6}} = \frac{3}{2}$;

$\frac{3}{2}$ est une écriture simplifiée de $\frac{18}{12}$.

Quand on ne peut plus simplifier une fraction, on a obtenu une fraction irréductible.

Exemple

La question : « mettre $\frac{18}{12}$ sous forme de fraction irréductible » aura pour réponse : $\frac{3}{2}$.

Le résultat d'une division ne change pas si l'on multiplie ou si l'on divise le **dividende** et le **diviseur** par un même nombre.
Cette règle permet, par exemple, de se débarrasser de nombres à virgule :

Exemple

$\frac{1{,}25}{0{,}25} = \frac{100\times 1{,}25}{100\times 0{,}25} = \frac{125}{25} = 5$;

$\frac{0{,}4}{1{,}24} = \frac{(100\times 0{,}4)}{(100\times 1{,}24)} = \frac{40}{124} = \frac{(4\times 10)}{(4\times 31)} = \frac{10}{31}$.

Produit de deux fractions

Pour calculer le produit de deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux : $\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{(a\times c)}{(b\times d)}}$.

Exemple

$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7} = \frac{3\times 4}{5\times 7} = \frac{12}{35}$.

Somme et différence de deux fractions

- Pour calculer la somme ou la différence de deux **fractions de même dénominateur** :
  - on additionne ou on soustrait les numérateurs ;
  - on garde le dénominateur commun.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{(a+b)}{c}; \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{(a-b)}{c}$$

Exemple

$\frac{13}{5} - \frac{8}{5} = \frac{(13-8)}{5} = \frac{5}{5} = 1$.

- Pour calculer la somme ou la différence de deux **fractions dont les dénominateurs sont différents**, on commence par écrire des fractions qui sont égales aux fractions données mais qui ont le même dénominateur (pour cela, on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs).

Exemples

$\frac{5}{3}+\frac{7}{6}=\frac{10}{6}+\frac{7}{6}=\frac{(10+7)}{6}=\frac{17}{6}$.

$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{(4\times 1)}{(4\times 3)}-\frac{(3\times 1)}{(3\times 4)}=\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{1}{12}$.

- Si les nombres à additionner ou à soustraire ont **des numérateurs et dénominateurs qui ne sont pas entiers**, on commence par remplacer les fractions par des fractions égales où numérateurs et dénominateurs sont entiers.

Exemple

$\frac{2{,}5}{3{,}2}+\frac{1}{1{,}6}=\frac{25}{32}+\frac{10}{16}=\frac{25}{32}+\frac{20}{32}=\frac{(25+20)}{32}=\frac{45}{32}$.

Quotients de nombres en écritures fractionnaires

L'inverse d'un nombre « a » non nul est le nombre qui multiplié par a donne 1.

On le note : « $\frac{1}{a}$ ». Et l'on peut écrire, pour toute valeur de a non nulle :

$$a\times\frac{1}{a}=1\ ;$$

Exemples

- L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$ et on vérifie que $3\times\frac{1}{3}=1$.
- L'inverse de $\frac{4}{3}$ est $\frac{3}{4}$, en effet $\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{4\times 3}{3\times 4}=\frac{12}{12}=1$.
- L'inverse de $\frac{-3}{5}$ est $\frac{-5}{3}$, car $\frac{(-3)\times(-5)}{(5\times 3)}=\frac{15}{15}=1$.

Pour diviser un nombre par un nombre non nul, on le multiplie par son inverse.

Si a, b, c, d sont des nombres avec b, c, d différents de zéro, alors :

$$\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}\ ;\qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Exemples

$\frac{8}{3}=8\times\frac{1}{3}$; $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3\times 2}{4\times 5}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

Il peut être judicieux de **simplifier « tôt »** au lieu de calculer les numérateurs et dénominateurs puis de simplifier « tard ».

Exemple

Dans le calcul précédent, avant de calculer $\frac{6}{20}$ on simplifie par 2, et on obtient $\frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}$.

Conventions

On peut supprimer le signe « × » entre :

- un nombre et une lettre ;
- un nombre et une parenthèse ;
- une lettre et une parenthèse.
- deux lettres ;
- deux parenthèses ;

Exemples

$5 \times a = 5a$;

$7 \times (a + b) = 7a + 7b$;

$a \times (b + c) = a(b + c) = a\,b + a\,c$;

$(a + b) \times (c + d) = (a + b)\,(c + d)$;

$a \times b = a\,b$.

Propriétés de la multiplication

Multiplier plusieurs facteurs peut se faire dans n'importe quel ordre.

Exemple

$3a \times 4a^2 \times 2a^3 = 3 \times 4 \times 2 \times a \times a^2 \times a^3 = 24\,a^6$.

Quels que soient les nombres a et b :

$$\begin{gathered} 1 \times a = a \\ (-1) \times a = -a \\ 0 \times a = 0 \\ 1 \times (a + b) = a + b \\ (-1) \times (a + b) = -(a + b) \end{gathered}$$

Addition et parenthèses

Quand les parenthèses sont précédées du signe « + » et qu'elles ne sont pas suivies de signes « multiplier » ou « diviser » :

Aptitude numérique

- on peut supprimer ce « + » et les parenthèses ;
- on ne change pas les signes à l'intérieur des parenthèses.

Exemples

$5a + (6a - 5) = 5a + 6a - 5$; $\quad 7 + (-3a - 1) = 7 - 3a - 1$.

Par contre l'expression : $4 + (5a - 2) \times 3$ ne peut pas se remplacer par : $4 + 5a - 2 \times 3$ car la multiplication par 3 finale ne s'appliquerait qu'au 2 alors qu'elle doit s'appliquer aussi à 5a.

Soustraction et parenthèses

Quand les parenthèses sont précédées du signe « – » et qu'elles ne sont pas suivies de signes « multiplier » ou « diviser » : on peut supprimer ce « – » et les parenthèses à condition de multiplier par (–1) l'intérieur des parenthèses.

Exemples

$8 - (-3a + 4) = 8 + 3a - 4$; $\quad 5a - (2a - 7) = 5a - 2a + 7$

Division euclidienne

Effectuer une division euclidienne d'un entier a par un entier b c'est trouver deux nombres entiers : le quotient q et le reste r.

Exemple

Quand on divise 82 par 14, le quotient est 5 et le reste est 12 (on rappelle que 14 est le diviseur et que 82 est le dividende).

dividende	8 2	1 4	**diviseur**
reste	1 2	5	**quotient**

On a la relation $82 = (14 \times 5) + 12$.

En général :

$$\text{Dividende} = (\text{diviseur} \times \text{quotient}) + \text{reste}$$
$$\text{soit } a = b\,q + r$$

- le reste est toujours inférieur strictement au diviseur ;
- le reste peut être nul (la division tombe juste avec un quotient entier), cela arrive quand le dividende est un multiple du diviseur.