Chapitre

1

Mécanique 1

101 Risque de collision au freinage

1. Une voiture roule à une vitesse constante V_0 en ligne droite. Au temps $t = 0$, le conducteur aperçoit un obstacle, mais il ne commence à freiner (avec une décélération constante de 7,5 m · s^{-2}) qu'au bout d'un temps $\varepsilon = 0,6$ s. Calculer la distance parcourue par le véhicule depuis l'instant initial jusqu'à l'arrêt.

Application numérique : $V_0 = 54$ km · h^{-1}, puis $V_0 = 108$ km · h^{-1}.

2. Deux voitures se suivent sur une route droite, à une distance d, et roulent à la même vitesse constante V_0. À l'instant $t = 0$, la première voiture commence à freiner avec une décélération a, la seconde voiture ne commence à freiner qu'au temps $t = \varepsilon = 0,6$ s avec une décélération b.

Quelle condition doit satisfaire d pour que la seconde voiture s'arrête en arrière de la première ?

Application numérique : $V_0 = 108$ km · h^{-1}, $a = 7,5$ m · s^{-2} et $b = 6$ m · s^{-2}.

La condition trouvée est-elle suffisante pour garantir qu'il n'y aura pas collision entre les deux voitures (pour des valeurs différentes de V_0, ε, a et b...) ?

Pourquoi cette condition est-elle suffisante avec les données numériques fournies ?

1. Ce qu'il faut savoir

- Mouvement à accélération constante.
- Équation horaire.

2. Ce qu'il faut comprendre

- Il est astucieux de résoudre la première question en tenant compte de la deuxième : on prendra des notations telles qu'il ne soit pas nécessaire de refaire plusieurs fois le même calcul.
- Pour la deuxième question, il faut prendre en compte les différentes phases du mouvement, avec des conditions initiales pertinentes.

3. Solution

1. On peut prendre l'origine des abscisses à la position de la voiture à la date $t = 0$: elle parcourt une distance $x_1 = V_0\varepsilon$ avant de freiner – avec une accélération $-a$ (a constante > 0) à partir de la date $t_1 = \varepsilon$.

Pour $t > t_1$, le mouvement est caractérisé par une vitesse :

$$V = \dot{x} = -a(t - t_1) + V_0$$

et une position

$$x = -\frac{1}{2}a(t - t_1)^2 + V_0(t - t_1) + x_1 \qquad (1)$$

compte tenu des conditions initiales ci-dessus.

L'arrêt est obtenu lorsque V = 0, soit $t - t_1 = \dfrac{V_0}{a}$.

En reportant cette valeur dans l'expression de $x(t)$, on obtient la distance d'arrêt D :

$$D = -\frac{1}{2}a\left(\frac{V_0}{a}\right)^2 + V_0\frac{V_0}{a} + x_1\,;$$

$$\boxed{D = \frac{V_0^2}{2a} + V_0\varepsilon}$$

Application numérique :

$V_0 = 54 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, d'où : **D = 24 m.**

$V_0 = 108 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, d'où : **D = 78 m.**

2. L'équation horaire de la première voiture est donnée par la relation (1), en faisant $t_1 = 0$ et $x_1 = 0$:

$$x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + V_0 t\,;$$

et elle s'arrête à l'abscisse $x_2 = x\left(\dfrac{V_0}{a}\right)$, soit :

$$x_2 = \frac{V_0^2}{2a}.$$

À la date $t = 0$, la seconde voiture était à l'abscisse $-d$, et à la date $t_1 = \varepsilon$, elle était donc à l'abscisse $x_1 = -d + V_0\varepsilon$.

La relation (1) donne alors pour la seconde voiture une position (avec a remplacé par b) :

$$x'(t) = -\frac{1}{2}b(t - t_1)^2 + V_0(t - t_1) + V_0\varepsilon - d\,;$$

ce qui donne une distance x'_2 parcourue jusqu'à l'arrêt (à la date $t = t_1 + \dfrac{V_0}{b}$) :

$$x'_2 = \frac{V_0^2}{2b} + V_0\varepsilon - d.$$

La condition demandée correspond à $x'_2 < x_2$ (on néglige les dimensions des voitures, assimilées à des points matériels…), soit :

$$\frac{V_0^2}{2b} + V_0\varepsilon - d < \frac{V_0^2}{2a}\,;$$

$$\boxed{d > \frac{V_0^2}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + V_0\varepsilon}$$

Soit, avec les valeurs données : $\boldsymbol{d > 33}$ **m.**

Cette condition n'est pas suffisante : il suffit d'imaginer une situation telle que $b > a$, avec $d < V_0\varepsilon$.

La seconde voiture heurte la première avant même le début de son freinage, alors que la condition trouvée peut être vérifiée !

Mais si $b < a$, la condition trouvée est effectivement suffisante. En effet, la seconde voiture se rapproche alors constamment de la première (la différence des vitesses $\dot{x}' - \dot{x}$ reste toujours positive ou nulle) : c'est donc lorsqu'elles sont arrêtées que leur distance d est minimale.

102 Projectile soumis au frottement de l'air

Un projectile M de masse m est lancé dans un plan vertical (Oxz) avec une vitesse initiale $\vec{V}_0$ faisant un angle θ avec l'horizontale Ox. Ce référentiel, lié à la surface de la Terre, sera supposé galiléen, et l'accélération $\vec{g}$ de la pesanteur constante. Ce projectile est soumis de plus à une force de frottement due à l'air, force que l'on peut mettre sous la forme $\vec{F}_f = -k \cdot \vec{V}$ avec $k > 0$ et $\vec{V}$ vitesse instantanée du projectile.

1. Établir les équations du mouvement : on introduira la constante de temps $\tau = \dfrac{m}{k}$. Montrer que la trajectoire du projectile admet une asymptote verticale, et que sa vitesse tend vers une limite $\vec{V}_l$ que l'on précisera.
Exprimer alors les vitesses et position du mobile en fonction de t, τ, θ, V_0 et V_l.

2. Calculer le temps t_s nécessaire au projectile pour atteindre le sommet S de sa trajectoire, et donner la position de S.
Application numérique : $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $V_0 = V_l$: calculer l'altitude de S, et comparer à l'altitude atteinte lorsqu'on néglige le frottement de l'air.

1. Ce qu'il faut savoir

Point de cours

- Loi fondamentale de la dynamique.

Outil mathématique

- Résolution d'équation différentielle du premier ordre avec second membre.

2. Ce qu'il faut comprendre

1. On appliquera la loi fondamentale de la dynamique au projectile M assimilé à un point matériel. La vitesse limite peut être trouvée directement en cherchant à quelle condition l'accélération $\vec{a}$ s'annule. On pourra intégrer l'équation différentielle sous sa forme vectorielle et projeter les expressions obtenues pour $\vec{V}$ et $\overrightarrow{OM}$.

2. À cause du freinage dû à l'air, la trajectoire étudiée doit se situer « au-dessous » de la trajectoire parabolique « classique » obtenue en l'absence de frottement.

3. Solution

1. La loi fondamentale de la dynamique appliquée au point M à un instant t s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{V}$. On trouve directement que $\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V} = \overrightarrow{\text{constante}}$.

Ce qui est réalisé pour $m\vec{g} - k\vec{V} = \vec{0}$ soit $\boxed{\vec{V}_l = \dfrac{m\vec{g}}{k}}$

ou encore en posant $\tau = \dfrac{m}{k}$ $\boxed{\vec{V}_l = \tau\vec{g}}$

Point méthode

En écrivant le principe fondamental sous la forme $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \Sigma\vec{F}$, on obtient directement une équation différentielle en $\vec{V}$:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{V}}$$

Résolvons maintenant l'équation différentielle

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{V} = \vec{g} \quad \text{soit en posant } \tau = \frac{m}{k} :$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{\vec{V}}{\tau} = \frac{\vec{V}_l}{\tau}.$$

Résolvons l'équation différentielle vectorielle :

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_l + \vec{A}\,e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Le vecteur $\vec{A}$ est défini par la condition initiale $\vec{V} = \vec{V}_0$ à $t = 0$: $\vec{A} = \vec{V}_0 - \vec{V}_l$

$$\boxed{\vec{V}(t) = \vec{V}_l + (\vec{V}_0 - \vec{V}_l)e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (1)$$

En intégrant une nouvelle fois par rapport à t, on obtient :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{V}_l\,t + (\vec{V}_0 - \vec{V}_l)(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}} + \vec{B}.$$

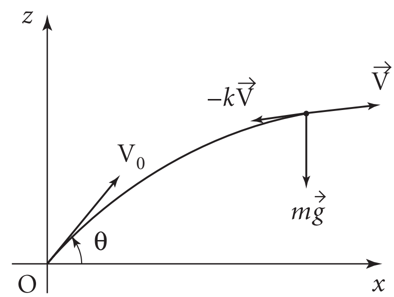
$\vec{B}$ est défini par la condition initiale $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ à $t = 0$:

$$\vec{B} = \tau(\vec{V}_0 - \vec{V}_l)$$

d'où

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \vec{V}_l\,t + \tau(\vec{V}_0 - \vec{V}_l)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad (2)$$

d'où en projection sur $(\vec{u_x}, \vec{u_z})$, avec $\vec{V_l} = -V_l \vec{u_z}$ (V_l est un module…) :

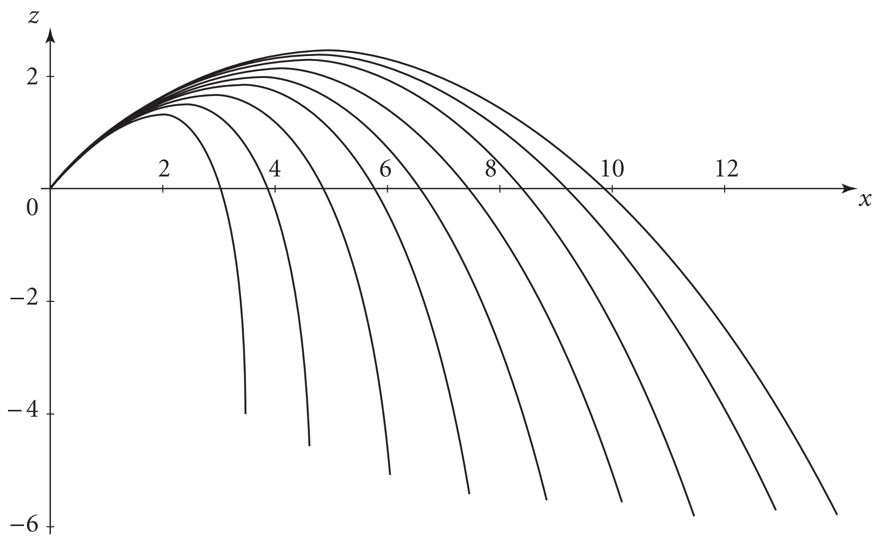


$$\boxed{\vec{V}\begin{cases} V_x = V_0\cos\theta\, e^{-\frac{t}{\tau}} \\ V_z = -V_l + (V_0\sin\theta + V_l)e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}}$$

On retrouve bien sûr que pour $t \to \infty$ $\vec{V} \to \vec{V_l}$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = \tau V_0\cos\theta\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ z = -V_l t + \tau(V_0\sin\theta + V_l)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{cases}}$$

Lorsque $t \to \infty$, $x \to x_{\lim} = \tau V_0\cos\theta$ ce qui correspond bien à une asymptote verticale.



2. Le sommet S de la trajectoire est déterminé par $V_z = 0$, ce qui correspond à une date t_s telle que : $0 = -V_l + (V_0\sin\theta + V_l)e^{-\frac{t_s}{\tau}}$

soit : $$\boxed{t_s = \tau\ln\left[1 + \frac{V_0}{V_l}\sin\theta\right]}$$

et, en reportant :

$$x_s = \tau V_0 \cos\theta \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{V_0}{V_l}\sin\theta}\right)$$

$$z_s = -\tau V_l \ln\left(1 + \frac{V_0}{V_l}\sin\theta\right) + \tau(V_0 \sin\theta + V_l) \cdot \left(1 - \frac{V_l}{V_0 \sin\theta + V_l}\right)$$

$$z_s = \tau V_0 \sin\theta - \tau V_l \ln\left(1 + \frac{V_0}{V_l}\sin\theta\right)$$

si $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $V_0 = +V_l$, il vient :

$$\left| \begin{aligned} x_s &= 0 \\ z_s &= \tau V_l - \tau V_l \ln 2 = \tau V_l(1 - \ln 2) \end{aligned} \right. .$$

En l'absence de tout frottement de l'air, le mouvement sur l'axe Oz devient :

$$\ddot{z} = -g$$

$$\dot{z} = -gt + V_0, \text{ d'où } \quad t_{s'} = \frac{V_0}{g}$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t$$

et $$z_{s'} = z(t_{s'}) = \frac{V_0^2}{2g}.$$

Pour comparer les altitudes de S et S′, exprimons z_s en fonction de V_0 et g :

$$\left(V_l = V_0 \text{ et } \tau = \frac{m}{k} = \frac{V_l}{g} = \frac{V_0}{g}\right) : z_s = \frac{V_0^2}{g}(1 - \ln 2)$$

d'où :

$$\frac{z_s}{z_{s'}} = 2(1 - \ln 2) \# 0{,}6.$$

$z_s < z_{s'}$: le résultat est bien cohérent ; en présence de frottement le point matériel monte moins haut.