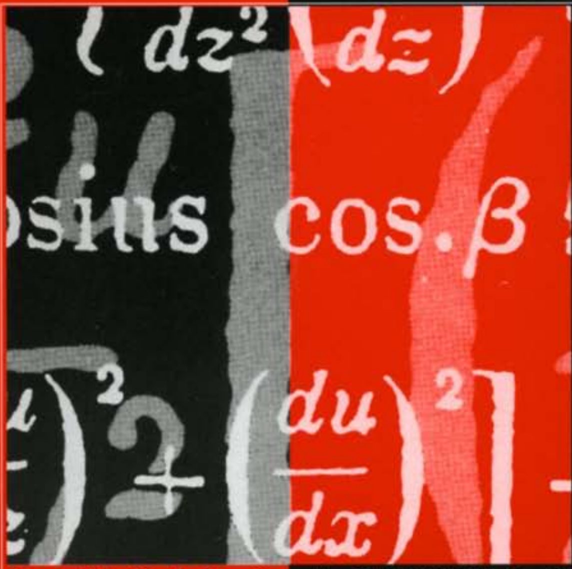
MATHÉMATIQUES

Claude SABBAH

Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius



SAVOIRS ACTUELS

CNRS EDITIONS

EDP SCIENCES

Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius

Claude Sabbah

Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius

SAVOIRS ACTUELS

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

ISBN EDP Sciences 2-86883-534-1

ISBN CNRS ÉDITIONS 2-271-05969-0

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Malgré un titre un peu ésotérique, ce livre traite d'un sujet classique, à savoir la théorie des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe. Les prototypes en sont les équations (portant sur la variable complexe t et la fonction inconnue $u(t)$) :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\alpha}{t}u(t)\ (\alpha \in \mathbb{C}), \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{t^2}u(t)$$

La première a pour solution la fonction « multiforme » $t \mapsto t^\alpha$ et la seconde a pour solution la fonction $t \mapsto \exp(-1/t)$. La fonction « multiforme » log est, quant à elle, solution d'une équation avec second membre :

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t},$$

ou, si l'on préfère rester dans le cadre des équations homogènes comme il est fait dans ce livre, de l'équation d'ordre 2 :

$$t\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = 0.$$

Ainsi, une équation différentielle à coefficients polynomiaux ou fractions rationnelles en la variable t admet en général pour solutions des fonctions transcendantes. D'autres familles sont célèbres elles aussi, les équations hypergéométriques ou les équations de Bessel, pour ne citer qu'elles.

Ceci constaté, la question se pose de savoir s'il est nécessaire de résoudre explicitement l'équation pour connaître les propriétés de ses solutions. Autrement dit, on se pose la question de savoir quelles sont les propriétés des solutions qui ne dépendent que de manière algébrique (donc en principe calculable) des coefficients de l'équation, et quelles sont celles qui nécessitent un recours à des manipulations transcendantes.

Pousser ce raisonnement jusqu'au bout conduit à développer la théorie des équations différentielles dans le champ complexe à l'aide des outils de la géométrie algébrique ou analytique complexe (*i.e.* la théorie des équations algébriques complexes). On est ainsi amené à traiter les *systèmes* d'équations linéaires, dépendant de plusieurs variables. La géométrie algébrique nous pousse aussi à considérer les propriétés globales de ces systèmes, c'est-à-dire à considérer des systèmes définis sur des *variétés algébriques* ou *analytiques* complexes.

Les équations différentielles que nous considérerons dans ce livre prendront le nom de *connexions intégrables sur un fibré vectoriel.* Notre « Drosophila melanogaster » (mouche du vinaigre) sera la droite projective complexe, communément appelée « sphère de Riemann » et notée $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{P}^1$, qui sera l'objet d'un certain nombre d'expériences portant sur les connexions : analyse des singularités et déformations.

La théorie des déformations isomonodromiques est une machine à produire des systèmes *non linéaires* d'équations différentielles ou aux dérivées partielles dans le domaine complexe et ce, à partir d'une équation ou d'un système d'équations *linéaires* d'une variable complexe. Elle donne en même temps un procédé (peu explicite en général) pour les résoudre, ainsi que des propriétés remarquables des solutions de ces systèmes (la propriété dite « de Painlevé » notamment). Si, au début, seule était considérée la déformation d'*équations* différentielles linéaires d'une variable complexe à coefficients polynomiaux, il est apparu plus tard que la déformation des systèmes linéaires de plusieurs équations pouvait jeter une lumière nouvelle sur la question, par l'usage d'outils de la géométrie algébrique ou différentielle : fibrés vectoriels, connexions, *etc.*

Pendant longtemps (et c'est toujours essentiellement le cas), cette méthode a servi aux théoriciens des systèmes dynamiques et aux physiciens qui analysent les équations non linéaires produites par des systèmes dynamiques intégrables : faire apparaître ces équations comme équations d'isomonodromie est en quelque sorte une linéarisation du problème initial. De ce point de vue, les équations de Painlevé ont joué le rôle de prototype, depuis l'article de R. Fuchs [**Fuc07**], suivi par ceux de R. Garnier, qui a montré comment la sixième pouvait s'écrire comme équation d'isomonodromie, sortant ainsi du strict cadre de la recherche de nouvelles fonctions transcendantes.

Une belle application de cette théorie est l'introduction de la notion de structure de Frobenius sur une variété. Si cette notion était clairement apparue dans les articles de Kyoji Saito sur les déploiements de singularités de fonctions holomorphes, ce n'est qu'avec Boris Dubrovin, à la suite de motivations issues de la physique, qu'elle s'est réellement développée, ouvrant des perspectives sur des sujets apparemment très éloignés (singularités, cohomologie quantique, symétrie miroir).

Mon ambition de garder à ce texte un niveau et une taille modérés, tout autant que mon incompétence sur les développements les plus récents, m'ont conduit à limiter les sujets abordés, renvoyant notamment à l'article de B. Dubrovin [**Dub96**] ou au livre de Y. Manin [**Man99a**].

Le chapitre 0, bien qu'un peu long, peut être sauté par tout lecteur ayant des connaissances de base en géométrie algébrique complexe ; il servira alors de référence pour les notations employées. Il regroupe les énoncés utilisés dans la suite en théorie des faisceaux, fibrés vectoriels, connexions holomorphes et méromorphes, faisceaux localement constants. Les résultats en sont classiques et existent, dispersés, dans la littérature.

On pourrait dire la même chose du chapitre I, bien qu'il soit plus difficile de trouver une référence pour le théorème de rigidité des fibrés triviaux dans les livres de géométrie algébrique élémentaire. On se restreint ici aux fibrés sur la sphère de Riemann, ce qui ne nécessite qu'un petit investissement de géométrie algébrique. On admet essentiellement dans ce chapitre le théorème de finitude de la cohomologie d'un fibré vectoriel sur une surface de Riemann compacte (et même seulement la sphère de Riemann), pour lequel il existe de bonnes références.

Avec les chapitres II et III commence l'étude des systèmes linéaires d'équations différentielles d'une variable complexe et de leurs déformations. Le type des points singuliers y est analysé. Ici encore, on ne démontre pas deux théorèmes d'analyse, dans la mesure où les techniques utilisées, bien qu'abordables, sortent trop du cadre de l'ouvrage.

Un des objets fondamentaux attachés à une équation différentielle ou, plus généralement, à une connexion intégrable sur un fibré vectoriel, est le *groupe des transformations de monodromie* dans sa représentation naturelle, reflétant la « multiformité » des solutions de cette équation ou connexion. La *correspondance de Riemann-Hilbert* — au moins lorsque les singularités de l'équation sont régulières — exprime que ce groupe contient toute l'information de l'équation différentielle. Ainsi, un des problèmes classiques de la théorie consiste, étant donnée une équation différentielle, à calculer son groupe de monodromie. Signalons aussi un autre objet, le *groupe de Galois différentiel* — non utilisé dans ce livre — qui a l'avantage d'être défini algébriquement à partir de l'équation.

Ce n'est pas ce problème que nous développons dans ce livre, et on ne trouvera pas de calcul explicite de tels groupes. Comme indiqué ci-dessus, nous cherchons plutôt à exprimer les propriétés des solutions de l'équation en terme d'objets algébriques, ici le fibré vectoriel (méromorphe) à connexion. Dans ce fibré méromorphe existent des *réseaux* (*i.e.* des fibrés holomorphes), qui correspondent aux différentes manières équivalentes d'écrire le système différentiel.

Trouver la manière la plus simple d'écrire un système différentiel à équivalence méromorphe près fait l'objet du *problème de Riemann-Hilbert* (cas des singularités régulières) ou du problème de Birkhoff. Il s'agit dans tous les cas d'écrire le système comme une connexion sur le fibré trivial. Le chapitre IV expose quelques techniques de résolution du problème de Riemann-Hilbert ou de Birkhoff. On trouvera dans les livres de A. Bolibroukh [**AB94**] et [**Bol95**] beaucoup d'autres résultats.

Le chapitre V introduit la transformation de Fourier (qu'il serait peut-être plus juste d'appeler transformation de Laplace) pour les systèmes d'équations différentielles d'une variable. Il peut permettre de comprendre le lien entre les équations de Schlesinger et les équations de déformation du problème de Birkhoff, analysées au chapitre VI. Dans ce dernier est expliquée en détail la notion de déformation isomonodromique.

Le chapitre VII présente axiomatiquement la notion de structure de Saito (sous la forme introduite par K. Saito) ainsi que la notion de structure de Frobenius (sous la forme introduite par B. Dubrovin, reprenant ainsi sa terminologie). On y montre l'équivalence de ces notions, réunies dès lors sous le nom de « structure de Frobenius-Saito ». De nombreux exemples sont donnés, afin de mettre en évidence différents aspects. Il peut servir d'introduction à la théorie de K. Saito sur la structure de Frobenius-Saito associée aux déploiements de fonctions à singularités isolées. La démonstration de beaucoup de résultats de cette théorie fait appel à des techniques de géométrie algébrique en dimension $\geqslant 1$, techniques qui sortent du cadre de cet ouvrage et dont l'exposition demanderait un autre livre (la théorie de Hodge du système de Gauss-Manin).

Ce texte, version très développée de l'article [**Sab98**], est issu de plusieurs cours (parfois accélérés) faits dans le cadre de la formation doctorale des universités de Paris VI, Bordeaux I et Strasbourg ainsi que lors d'une école sur les variétés de Frobenius au CIRM (Luminy). Michèle Audin, Alexandru Dimca, Claudine Mitschi et Pierre Schapira m'ont ainsi donné l'occasion d'en exposer certaines parties.

Beaucoup d'idées, de même que leur présentation, viennent en droite ligne des articles de Bernard Malgrange, ainsi que de nombreuses conversations que nous avons eues. De nombreux aspects des variétés de Frobenius me seraient restés obscurs sans de multiples discussions avec Michèle Audin. J'ai aussi eu le plaisir de longs entretiens avec Andrei Bolibroukh, qui m'a expliqué ses recherches, notamment sur le problème de Riemann-Hilbert. Joseph Le Potier a répondu de bonne grâce à mes questions électroniques sur les fibrés.

Plusieurs personnes m'ont aidé à améliorer le texte, ou m'ont indiqué quelques erreurs, notamment Gilles Bailly-Maitre, Alexandru Dimca, Claus Hertling, Adelino Paiva, ainsi que les rapporteurs anonymes.

Je les en remercie.

Ce livre a été écrit notamment dans le cadre du programme INTAS 97-1644.

TERMINOLOGIE ET NOTATIONS

Certains mots utilisés dans ce livre ont traditionnellement plusieurs sens, suivant le contexte dans lequel on les emploie. Ainsi :

– la *platitude* (en géométrie) signifie l'absence de courbure (pour une métrique, une connexion...), elle est alors synonyme d'intégrabilité ; en algèbre commutative, elle traduit un bon comportement par rapport au produit tensoriel ;

– la *torsion* est une notion géométrique (pour une connexion sur le fibré tangent), mais aussi une notion algébrique (pour un module) ; on s'intéresse à la torsion d'une connexion plate, alors qu'un module plat sur un anneau n'a pas de torsion...

De manière analogue, l'appellation « de Frobenius » peut renvoyer à diverses propriétés bien distinctes : l'intégrabilité au sens de Frobenius concerne les systèmes de Pfaff, qui deviennent ainsi des feuilletages, tandis que la notion de variété de Frobenius (ou structure de Frobenius sur une variété) fait référence à la structure d'algèbre de Frobenius sur le fibré tangent de cette variété ; il n'empêche que la notion d'intégrabilité intervient dans la construction de telles structures.

On distinguera aussi les mathématiciens L. Fuchs (condition de Fuchs, équation fuchsienne, *etc.*) et R. Fuchs (isomonodromie et équations de Painlevé), de même que K. Saito et M. Saito.

J'ai adopté un principe assez simple pour les notations, auquel j'ai essayé de me tenir.

Les lettres M, N, X sont (en principe) réservées aux variétés, la lettre X désignant souvent l'espace des paramètres d'une déformation, tandis que la lettre M désigne plutôt l'espace sur lequel vit l'objet déformé.

Les lettres $\mathscr{E}, \mathscr{F}, \mathscr{G}$ sont réservées aux faisceaux sur une variété, les lettres E, F, G aux fibrés qui leur correspondent, quand il y a lieu, et les lettres $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ à leur germe en un point. Les « fibrés méromorphes » sont notés en général par la lettre $\mathscr{M}$ (et parfois $\mathscr{N}$), leur germe en un point par

$\mathcal{M}$ ou $\mathcal{N}$. Enfin, dans un cadre algébrique, le module des sections globales d'un faisceau $\mathscr{E}, \mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{M}$ est noté $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{M}$.

Dans une famille paramétrée par un espace, la restriction d'un objet A pour la valeur x^o du paramètre est notée A^o.

Enfin, le carré blanc sur fond blanc $\square$ signifie la fin d'une démonstration, ou son absence.

CHAPITRE 0

LE LANGAGE DES FIBRÉS

Ce chapitre regroupe les principaux résultats généraux utilisés dans ce livre. Il a aussi pour but de préciser les notations employées plus loin. Les lecteurs pourront s'y reporter si nécessaire.

Nous supposons une certaine familiarité avec le langage de la théorie de faisceaux.

La notion de fibré vectoriel et de connexion permet d'aborder les problèmes globaux de la théorie des systèmes différentiels linéaires et de leurs singularités. Nous considérons ici uniquement le cadre holomorphe ou méromorphe. Nous nous sommes efforcé de donner des énoncés intrinsèques, indépendants des choix de coordonnées ou de base. Aussi les lecteurs ne s'étonneront-t-ils pas de ne pas trouver la notion de matrice fondamentale de solutions, de wronskien, *etc.* Par contre, nous insistons sur la différence entre la notion de système différentiel méromorphe (où les changements de base méromorphes sont permis) et celle de réseau d'un tel système (où seuls les changements de base holomorphes le sont).

1. Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$

On pourra se reporter par exemple à [**GR65**, chap. I], [**GH78**, chap. 0], [**Kod86**, chap. 1] (ainsi qu'à [**Hör73**, chap. 1] ou [**LT97**, chap. 1]) pour les propriétés élémentaires des fonctions holomorphes.

Soient n un entier $\geqslant 1$ et U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Les coordonnées sont notées $z_1, \dots, z_n$, où $z_j = x_j + iy_j$ est la décomposition en parties réelle et imaginaire.

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. On pose

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right).$$

Une fonction f de classe C^1 sur U est dite *holomorphe* si, pour tout $z \in U$ et tout $j = 1, \dots, n$, les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(z) = 0$$

sont satisfaites. On désigne par $\mathscr{O}(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur U et par $\mathscr{O}_U$ le *faisceau* des fonctions holomorphes sur U.

***1.1. Théorème* (les fonctions holomorphes sont les fonctions analytiques)**

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si elle est analytique, autrement dit développable en série convergente de $(z_1 - z_1^o, \dots, z_n - z_n^o)$ au voisinage de tout point $z^o \in U$.

Démonstration. — Analogue à celle pour les fonctions d'une variable. Soit

$$\Delta(z^o, r) = \prod_{j=1}^{n} D(z_j^o, r_j)$$

un polydisque ouvert de polyrayon $r = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ centré en $z^o \in U$ et contenu dans U. Le résultat découle de la « polyformule de Cauchy » qu'on montre par récurrence sur n : pour tout $z \in \Delta(z^o, r)$ on a

$$f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{C(z_1^o, r_1)} \cdots \int_{C(z_n^o, r_n)} \frac{f(w)}{(z_1 - z_1^o) \cdots (z_n - z_n^o)}\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n.$$

□

Soit $z^o \in U$. Le germe du faisceau $\mathscr{O}_U$ en z^o, noté $\mathscr{O}_{U,z^o}$, s'identifie donc à l'anneau des *séries convergentes* à n variables, noté $\mathbb{C}\{z_1 - z_1^o, \dots, z_n - z_n^o\}$.

1.2. Quelques propriétés

– Toute application holomorphe d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^p$ est une application C^∞.

– Toute application holomorphe bijective entre deux ouverts de $\mathbb{C}^n$ est biholomorphe.

– Toute fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$ est une application *ouverte.*

– On dispose du théorème des fonctions implicites et du théorème d'inversion locale pour les applications holomorphes.

– Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\varphi : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe $\not\equiv 0$ et $Z \subset U$ l'ensemble défini par l'équation $\varphi(z_1, \dots, z_n) = 0$ dans U. Si f est une fonction holomorphe sur $U \smallsetminus Z$ qui est bornée au voisinage de tout point de Z, alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur U.

2. Variétés analytiques complexes

On pourra se reporter à [**GH78**, chap. 0] ou [**Kod86**, chap. 2] pour plus de détails ou d'exemples. Soit M un espace topologique. Un *recouvrement ouvert* $\mathfrak{U}$ de M est une famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de M indexée par un ensemble I dont la réunion est égale à M.

Un espace topologique M est dit *paracompact* s'il est *séparé* et si, pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de M, il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{V}$ de M qui est *localement fini* et *plus fin* que $\mathfrak{U}$, c'est-à-dire que tout compact ne coupe qu'un nombre fini d'ouverts de $\mathfrak{V}$ et tout ouvert V_j de $\mathfrak{V}$ est contenu dans au moins un ouvert U_i de $\mathfrak{U}$.

Une *variété analytique complexe* M de dimension n est un espace topologique paracompact qui possède un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ et des cartes $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$, chaque φ_i induisant un homéomorphisme de U_i sur un ouvert Ω_i de $\mathbb{C}^n$, telles que, pour tous $i, j \in I$, le changement de carte

$$\varphi_i\left(U_i \cap U_j\right) \xrightarrow{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} \varphi_j\left(U_i \cap U_j\right)$$

soit un biholomorphisme.

Une *fonction holomorphe* sur une variété analytique complexe est une fonction de classe C^1 telle que chaque $f \circ \varphi_i^{-1}$ soit une fonction holomorphe sur l'ouvert $\varphi_i(U_i)$ de $\mathbb{C}^n$.

Tout ouvert de carte U_i admet alors des systèmes de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ provenant de ceux de Ω_i.

Une application entre deux variétés analytiques complexes est dite holomorphe si, pour un (ou tout) choix de coordonnées locales holomorphes de la source et du but, les composantes de l'application sont des fonctions holomorphes des coordonnées.

Une *sous-variété analytique complexe* N de M est un sous-ensemble localement fermé dans M pour lequel, au voisinage de tout point de N dans M, il existe des coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$ telles que N y soit définie par les équations $z_1 = \cdots = z_p = 0$; on dit alors que p est la *codimension (complexe)* de N dans M. Une *hypersurface lisse* est une sous-variété *fermée de codimension* 1.

Un *sous-ensemble analytique complexe fermé* de M est un sous-ensemble fermé, qui est *localement* défini comme ensemble des zéros d'une famille de fonctions analytiques. Nous serons amenés à utiliser le résultat suivant (les lecteurs pourront consulter [**GR65**, chap. II et III] pour plus de détails sur les sous-ensembles analytiques) :

MATHÉMATIQUES

Claude SABBAH

Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius

La théorie des déformations isomonodromiques est une machine à produire des systèmes non linéaires d'équations différentielles ou aux dérivées partielles dans le domaine complexe et ce, à partir d'une équation ou d'un système d'équations linéaires d'une variable complexe. La notion de structure de Frobenius sur une variété, apparue d'abord dans la théorie des singularités, puis développée sous l'impulsion de motivations physiques, en est une belle application. Ce texte est issu de plusieurs cours dispensés dans le cadre de la formation doctorale des universités de Paris VI, Bordeaux I et Strasbourg ainsi que lors d'une école sur les variétés de Frobenius au CIRM (Luminy).

***Claude SABBAH** est directeur de recherche C.N.R.S. à l'École polytechnique (Palaiseau). Ses travaux portent sur les aspects algébriques des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe, ainsi que sur leurs applications à la géométrie algébrique.*

Ces ouvrages, écrits par de chercheurs, reflètent de enseignements dispensé dans le cadre de l formation à la recherche. Il s'adressent donc au étudiants avancés, au chercheurs désireux d perfectionner leurs connais sances ainsi qu'à tou lecteur passionné par l science contemporaine.

Série Mathématiques dirigée par Claude SABBAH

SAVOIRS ACTUELS

Collection dirigée par Michèle LEDUC

CNRS EDITIONS

EDP SCIENCES

9 782868 835345

ISBN 2 86883 534 1
ISBN 2 271 05969 0