

Maurice Bellanger

Traitement numérique du signal

10^e ÉDITION

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba
Illustration de couverture : © raigvi - Shutterstock.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 1998, 2002, 2006, 2012, 2022

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

© Masson / CNET-ENST, Paris, 1980, 1984, 1987, 1990, 1996

ISBN 978-2-10-083691-8

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

PRÉFACE

Les révolutions techniques les plus importantes et les plus riches de conséquences ne sont pas toujours celles qui sont les plus visibles pour l'utilisateur final du produit. Les méthodes modernes de traitement numérique du signal entrent dans la catégorie des révolutions techniques aux conséquences encore insuffisamment perçues et qui ne font pas la première page des journaux.

Il est intéressant d'ailleurs de réfléchir quelques instants à la manière dont de telles techniques voient le jour. Le traitement par le calcul numérique d'un signal au sens le plus large du terme n'est certes pas en soi une idée nouvelle. Lorsque Kepler tirait les lois du mouvement des planètes des séries d'observations de son beau-père Tycho Brahé, c'est à un véritable traitement numérique du signal qu'il se livrait, le signal en l'occurrence étant constitué par les séries temporelles des observations de positions de Tycho Brahé. Mais ce n'est que dans le courant de ces toutes dernières décennies que le traitement numérique du signal est devenu une discipline en soi : c'est que la nouveauté tient à ce que l'on peut maintenant procéder, en temps réel, au traitement de signaux électriques, et ceci par des méthodes numériques.

Pour que cette évolution soit possible, il fallait que des progrès techniques, dans de nombreux domaines, voient progressivement le jour, et tout d'abord, bien sûr, la possibilité d'acquérir, sous forme de signal électrique, des informations à traiter. Cela impliquait le développement progressif de tout ce qu'il est parfois convenu d'appeler les capteurs d'informations, lesquels peuvent aller, dans leur complexité, de la simple jauge de contrainte (mais il a fallu de nombreuses et difficiles recherches de physique des solides pour la rendre possible) au radar.

Il fallait aussi que se développent, avec les prodigieux progrès de la micro-électronique, les outils technologiques permettant de réaliser, aux cadences extrêmement élevées qu'implique le traitement en temps réel, des opérations arithmétiques que les premiers ordinateurs (l'ENIAC n'a que 40 ans) ne pouvaient réaliser qu'en plusieurs heures souvent interrompues de plusieurs pannes, et que nous trouvons aujourd'hui tout à fait naturel de voir exécutées par un micro-processeur de quelques grammes consommant seulement quelques milliwatts, et dont le temps moyen entre pannes dépasse dix ans.

Il fallait enfin que les méthodes de programmation, c'est-à-dire d'utilisation optimisée de ces outils nouveaux, aient pu progresser, car quelles que soient les immenses capacités de calcul des micro-processeurs modernes, il n'est pas indifférent de ne pas gaspiller ces possibilités en opérations inutiles. L'invention des algorithmes de transformée de Fourier rapide est un des exemples les plus frappants de cette importance

des méthodes de programmation. Cette convergence des progrès techniques dans des domaines aussi différents relevant pour les uns de la physique, pour beaucoup de l'électronique, pour d'autres des mathématiques, n'a pas été accidentelle. Dans une certaine mesure, chacun des progrès a suscité le besoin nouveau auquel un nouveau progrès dans un autre domaine permettait de répondre. Il serait sans doute utile, du point de vue de l'histoire et de l'épistémologie des Sciences et des Techniques d'entreprendre un jour une étude approfondie de ce cas.

Car les conséquences en sont d'ores et déjà considérables. Sans doute le traitement analogique de signaux électriques a-t-il précédé le traitement numérique et sans doute continuera-t-il à occuper une place importante dans certaines applications, mais les avantages du traitement numérique qui tiennent en deux mots « précision et fiabilité » ont seuls rendu possibles certaines réalisations et qui débordent de loin les secteurs de l'électronique et des télécommunications dans lesquels ces techniques ont vu le jour. Pour n'en citer qu'une, la tomographie par rayon X, les « scanners » sont basés sur l'application d'un théorème dû à Radon et connu depuis 1917. Seules les évolutions que nous avons mentionnées plus haut ont rendu possible la réalisation pratique de ce nouvel outil de diagnostic médical. Il y a gros à parier que les techniques de traitement numérique du signal trouveront demain leur place dans des produits de plus en plus variés, y compris les produits utilisés par le grand public qui, tout en bénéficiant des avantages de prix, de performance et de fiabilité que ces techniques rendent possibles, ne se rendra pas toujours compte de la prodigieuse imbrication de recherche, de technique et d'invention que suppose ce progrès. Cette évolution a d'ailleurs déjà commencé dans le cas des récepteurs de télévision.

Mais lorsque se produisent de telles révolutions techniques, une autre difficulté se rencontre presque inévitablement. C'est celle de la formation des utilisateurs à ce qui est non seulement un nouvel outil, mais souvent un nouveau mode de pensée. Cette étape de la formation peut devenir, si l'on n'y prend garde, un goulot d'étranglement dans l'introduction de nouvelles techniques. C'est pourquoi l'ouvrage de M. BELLANGER, dont le point de départ est un enseignement donné depuis plusieurs années à l'École Nationale Supérieure des Télécommunications et à l'Institut Supérieur d'Électronique de Paris, constitue un événement dont il convient de souligner l'importance. Ouvrage didactique, accompagné d'exercices, contenant plusieurs programmes, que certains pourront souvent utiliser tel quel, il contribuera sans aucun doute à accélérer encore une évolution désirable et nécessaire.

P. AIGRAIN

1981

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE	III
AVANT-PROPOS	XIII
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 • LA NUMÉRISATION DU SIGNAL ÉCHANTILLONNAGE ET CODAGE	7
1.1 L'analyse de Fourier	7
1.2 Les distributions	12
1.3 Les principaux signaux traités	14
1.4 Normes d'une fonction	22
1.5 L'opération d'échantillonnage	23
1.6 L'échantillonnage en fréquence	24
1.7 Le théorème de l'échantillonnage	25
1.8 Échantillonnage de signaux sinusoïdaux et de signaux aléatoires	27
1.9 L'opération de quantification	32
1.10 La dynamique de codage	35
1.11 Codage non linéaire suivant une loi segmentée	37
1.12 Optimisation du codage	40
1.13 Quantité d'information et capacité d'un canal	42
1.14 Les représentations binaires	44
Annexe 1 : La fonction $I(x)$	45
Annexe 2 : La loi Normale Réduite	46
Bibliographie	47
Exercices	48
CHAPITRE 2 • LA TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE	50
2.1 Définition et propriétés de la TFD	51
2.2 La transformation de Fourier rapide	53
2.3 Dégradations dues aux limitations dans le calcul	62
2.4 Calcul de spectre par TFD	64
2.5 La convolution rapide	69

2.6	Calcul d'une TFD par convolution	70
2.7	Réalisation	71
	Bibliographie	73
	Exercices	73
CHAPITRE 3 • AUTRES ALGORITHMES DE CALCUL RAPIDE DE LA TFR		75
3.1	Le produit de Kronecker des matrices	75
3.2	Factorisation de la matrice de l'algorithme d'entrelacement fréquentiel	77
3.3	Les transformées partielles	79
3.4	Transformée avec recouvrement	91
3.5	Autres algorithmes de calcul rapide	93
3.6	Transformée de Fourier binaire – Hadamard	97
3.7	Les transformations algébriques	98
	Bibliographie	101
	Exercices	102
CHAPITRE 4 • LES SYSTÈMES LINÉAIRES DISCRETS INVARIANTS DANS LE TEMPS		103
4.1	Définition et propriétés	103
4.2	La transformation en Z	105
4.3	Énergie et puissance des signaux discrets	108
4.4	Filtrage des signaux aléatoires	109
4.5	Systèmes définis par une équation aux différences	110
4.6	Analyse par les variables d'état	113
	Bibliographie	115
	Exercices	115
CHAPITRE 5 • LES FILTRES À RÉPONSE IMPULSIONNELLE FINIE (RIF)		117
5.1	Présentation des filtres RIF	117
5.2	Fonctions de transfert réalisables et filtres à phase linéaire	120
5.3	Calcul des coefficients par développement en série de Fourier pour des spécifications en fréquence	123
5.4	Calcul des coefficients par la méthode des moindres carrés	127
5.5	Calcul des coefficients par TFD	131
5.6	Calcul des coefficients par approximation de Tchebycheff	132
5.7	Relations entre nombre de coefficients et gabarit de filtre	135
5.8	Filtre à transition en cosinus surélevé et cosinus	
	Filtre de Nyquist – Filtre demi-bande	137
5.9	Structures pour la réalisation des filtres RIF	139

5.10	Limitations du nombre de bits des coefficients	141
5.11	Fonction de transfert en Z d'un filtre RIF	144
5.12	Filtres à déphasage minimal	146
5.13	Calcul des filtres à très grand nombre de coefficients	149
5.14	Filtres RIF à deux dimensions	150
5.15	Calcul des coefficients de filtres RIF-2D par la méthode des moindres carrés	154
	Bibliographie	159
	Exercices	159
CHAPITRE 6 • CELLULES DE FILTRES À RÉPONSE IMPULSIONNELLE INFINIE (RII)		161
6.1	La cellule élémentaire du premier ordre	161
6.2	La cellule du second ordre purement réursive	166
6.3	Cellule du second ordre générale	175
6.4	Structures pour la réalisation	179
6.5	Limitations du nombre de bits des coefficients	182
6.6	Limitation du nombre de bits des mémoires de données	183
6.7	Stabilité et auto-oscillations	185
	Bibliographie	187
	Exercices	188
CHAPITRE 7 • LES FILTRES À RÉPONSE IMPULSIONNELLE INFINIE (RII)		190
7.1	Expressions générales pour les caractéristiques	190
7.2	Calcul direct des coefficients par les fonctions modèles	192
7.3	Techniques itératives pour le calcul des filtres RII avec des spécifications en fréquence	205
7.4	Filtres basés sur les fonctions sphéroïdales	209
7.5	Les structures représentant la fonction de transfert	210
7.6	Limitation du nombre de bits des coefficients	214
7.7	Bruit de calcul	218
7.8	Comparaison entre les filtres RII et RIF	219
	Bibliographie	221
	Exercices	222
CHAPITRE 8 • LES STRUCTURES DE FILTRES EN CHAÎNE		224
8.1	Propriétés des quadripôles	224
8.2	Les filtres en échelle simulée	228
8.3	Les dispositifs à commutation de capacités (DCC)	233
8.4	Les filtres en treillis	236

8.5	Éléments de comparaison	242
	Bibliographie	243
	Exercices	244
CHAPITRE 9 • SIGNAUX COMPLEXES FILTRES DE QUADRATURE INTERPOLATEURS		245
9.1	Transformée de Fourier d'une suite réelle et causale	245
9.2	Signal analytique	248
9.3	Calcul des coefficients d'un filtre de quadrature RIF	253
9.4	Déphaseurs à 90° de type récursif	255
9.5	Modulation à bande latérale unique	257
9.6	Les filtres à déphasage minimal	258
9.7	Filtre différentiateur	260
9.8	Interpolation par filtre RIF	261
9.9	Interpolation de Lagrange	262
9.10	Interpolation par bloc – Splines	264
9.11	Interpolation et restauration de signaux	266
9.12	Conclusion	269
	Bibliographie	270
	Exercices	270
CHAPITRE 10 • LE FILTRAGE MULTICADENCE		273
10.1	Sous-échantillonnage et transformée en Z	274
10.2	Décomposition d'un filtre RIF passe-bas	278
10.3	Le filtre RIF demi-bande	282
10.4	Décomposition avec filtres demi-bande	284
10.5	Filtrage par réseau polyphasé	286
10.6	Filtrage multicadence à éléments RII	290
10.7	Banc de filtres par réseau polyphasé et TFD	291
10.8	Conclusion	294
	Bibliographie	294
	Exercices	295
CHAPITRE 11 • FILTRES QMF ET ONDELETTES		296
11.1	Décomposition en deux sous-bandes et reconstitution	296
11.2	Filtres QMF	297
11.3	Décomposition et reconstitution parfaite	299
11.4	Ondelettes	302

11.5	Structure en treillis	306
	Bibliographie	307
	Exercices	307
CHAPITRE 12 • BANCS DE FILTRES		309
12.1	Décomposition et reconstitution	309
12.2	Analyse des éléments du réseau polyphasé	311
12.3	Calcul des fonctions inverses	313
12.4	Bancs de filtres pseudo-QMF	314
12.5	Calcul des coefficients du filtre prototype	320
12.6	Réalisation d'un banc de filtres réels	322
	Bibliographie	325
	Exercices	325
CHAPITRE 13 • ANALYSE ESTIMATION ET MODÉLISATION		327
13.1	Autocorrélation et intercorrélation	327
13.2	Analyse spectrale par corrélogramme	330
13.3	Estimation d'une fréquence	331
13.4	Matrice d'autocorrélation	334
13.5	Modélisation	337
13.6	Prédiction linéaire	339
13.7	Structures de prédicteur	340
13.8	Réseaux de capteurs – traitement d'antenne	343
13.9	Sources multiples – MIMO	346
13.9	Conclusion	347
	Annexe 1 : Bornes d'estimation	348
	Bibliographie	349
	Exercices	349
CHAPITRE 14 • FILTRAGE ADAPTATIF		351
14.1	Principe du filtrage adaptatif	351
14.2	Conditions de convergence	355
14.3	Constante de temps	357
14.4	Erreur résiduelle	358
14.5	Paramètres de complexité	360
14.6	Algorithmes normalisés et algorithmes du signe	362
14.7	Filtrage RIF adaptatif en structure cascade	364
14.8	Filtrage adaptatif RII	366

14.9 Conclusion	369
Bibliographie	370
Exercices	370
CHAPITRE 15 • RÉSEAUX DE NEURONES	372
15.1 Classification	372
15.2 Perceptron multi-couches	374
15.3 Algorithme de rétro-propagation	376
15.4 Exemples d'application	378
15.5 Réseaux de neurones convolutionnels	382
15.6 Réseaux de neurones récurrents/récurrents	383
15.7 Conclusion	384
Bibliographie	385
Exercices	385
CHAPITRE 16 • CODAGE CORRECTEUR	387
16.1 Les codes de Reed-Solomon	387
16.2 Les codes convolutionnels	395
16.3 Conclusion	411
Bibliographie	412
Exercices	412
CHAPITRE 17 • APPLICATIONS	414
17.1 Détection d'une fréquence	414
17.2 Boucle à verrouillage de phase	416
17.3 Codage différentiel de la parole	418
17.4 Codage du son	420
17.5 Annulation d'écho	421
17.6 Traitement des images de télévision	424
17.7 Transmission Multiporteuse – OFDM	426
17.8 Radiocommunications mobiles	430
Bibliographie	433
EXERCICES • ÉLÉMENTS DE RÉPONSE ET INDICATIONS	434
BIBLIOGRAPHIE	446
INDEX ALPHABÉTIQUE	448

CONTENTS

CHAPTER 1 • Signal Digitization – Sampling and Coding	7
CHAPTER 2 • Discrete Fourier Transform and FFT algorithms	50
CHAPTER 3 • Other Fast Algorithms for the DFT	75
CHAPTER 4 • Time Invariant Discrete Linear Systems	103
CHAPTER 5 • Finite Impulse Response Filters (FIR)	117
CHAPTER 6 • Infinite Impulse Response Filter Sections	161
CHAPTER 7 • Infinite Impulse Response Filters (IIR)	190
CHAPTER 8 • Two-Port Filter Structures	224
CHAPTER 9 • Complex Signals – Quadrature Filters – Interpolators	245
CHAPTER 10 • Multirate Filtering	273
CHAPTER 11 • QMF filters and wavelets	296
CHAPTER 12 • Filter banks	309
CHAPTER 13 • Signal analysis and modeling	327
CHAPTER 14 • Adaptive filters	351
CHAPTER 15 • Neural networks	372
CHAPTER 16 • Error correcting codes	387
CHAPTER 17 • Applications	414
EXERCISES: Hints and answers	434
INDEX	448

AVANT-PROPOS

En traitement du signal, les techniques numériques apportent des possibilités prodigieuses : conception rigoureuse des systèmes, flexibilité, reproductibilité des équipements, stabilité des caractéristiques en exploitation, facilité de supervision et contrôle. Cependant, ces techniques présentent un certain degré d'abstraction et leur application aux cas concrets requiert un ensemble de connaissances théoriques qui peuvent représenter un obstacle à leur utilisation. L'ambition du présent ouvrage est de vaincre cet obstacle et de faciliter l'accès aux techniques numériques en faisant la liaison entre la théorie et la pratique et en mettant à la portée de l'utilisateur les résultats les plus utiles dans le domaine.

La base de cet ouvrage est un enseignement donné dans des écoles d'ingénieurs, d'abord l'École nationale supérieure des télécommunications et l'Institut supérieur d'électronique de Paris, puis Supélec et le CNAM. L'auteur s'est efforcé d'y faire une présentation claire et concise des principales techniques de traitement numérique, de comparer leurs mérites et de donner les résultats les plus utiles sous une forme directement exploitable, aussi bien pour la conception des systèmes que pour leur mise en œuvre. Les développements théoriques ont été réduits à ce qui est nécessaire pour une bonne compréhension et une application correcte des résultats. Le lecteur trouvera dans des références bibliographiques les compléments qu'il pourrait souhaiter. À la fin de chaque chapitre, quelques exercices, souvent tirés de cas concrets, permettent de tester l'assimilation de la matière du chapitre et de se familiariser avec son utilisation. Pour ces exercices, des éléments de réponse et des indications ont été regroupés en fin d'ouvrage.

Par rapport aux précédentes éditions, cette dixième édition apporte des compléments, des simplifications, et, également, un nouveau chapitre sur l'un des outils importants du domaine de l'intelligence artificielle, les réseaux de neurones, dans leurs relations avec les systèmes adaptatifs.

Comme les précédentes, cette dixième édition doit beaucoup aux étudiants et aux collègues de l'auteur, qui tient à leur adresser ses plus vifs remerciements pour leurs contributions et leur assistance.

INTRODUCTION

Le signal est le support de l'information émise par une source et destinée à un récepteur ; c'est le véhicule de l'intelligence dans les systèmes. Il transporte les ordres dans les équipements de contrôle et de télécommande, il achemine sur les réseaux l'information, la parole ou l'image. Il est particulièrement fragile et doit être manipulé avec beaucoup de soins. Le traitement qu'il subit a pour but d'extraire des informations, de modifier le message qu'il transporte ou de l'adapter aux moyens de transmission ; c'est là qu'interviennent les techniques numériques. En effet, si l'on imagine de substituer au signal un ensemble de nombres qui représentent sa grandeur ou amplitude à des instants convenablement choisis, le traitement, même dans sa forme la plus élaborée, se ramène à une séquence d'opérations logiques et arithmétiques sur cet ensemble de nombres, associées à des mises en mémoire.

La conversion du signal continu analogique en un signal numérique est réalisée par des capteurs qui opèrent sur des enregistrements ou directement dans les équipements qui produisent ou reçoivent le signal. Les opérations qui suivent cette conversion sont réalisées par des calculateurs numériques agencés ou programmés pour effectuer l'enchaînement des opérations définissant le traitement.

Avant d'introduire le contenu des différents chapitres du présent ouvrage, il convient de donner une définition précise du traitement considéré.

Le traitement numérique du signal désigne l'ensemble des opérations, calculs arithmétiques et manipulations de nombres, qui sont effectués sur un signal à traiter, représenté par une suite ou un ensemble de nombres, en vue de fournir une autre suite ou un autre ensemble de nombres, qui représentent le signal traité. Les fonctions les plus variées sont réalisables de cette manière, comme l'analyse spectrale, le filtrage linéaire ou non linéaire, le transcodage, la modulation, la détection, l'estimation et l'extraction de paramètres. Les machines utilisées sont des calculateurs numériques.

Les systèmes correspondant à ce traitement obéissent aux lois des systèmes discrets. Les nombres sur lesquels il porte peuvent dans certains cas être issus d'un processus discret. Cependant, ils représentent souvent l'amplitude des échantillons d'un signal continu et dans ce cas, le calculateur prend place derrière un dispositif convertisseur analogique-numérique et éventuellement devant un convertisseur numérique-analogique. Dans la conception de tels systèmes et l'étude de leur fonctionnement, la numérisation du signal revêt une importance fondamentale et les opérations d'échantillonnage et de codage doivent être analysées dans leur principe et leurs conséquences. La théorie des distributions constitue une approche concise,

simple et efficace pour cette analyse. Après un certain nombre de rappels sur l'analyse de Fourier, les distributions et la représentation des signaux, le chapitre premier rassemble les résultats les plus importants et les plus utiles sur l'échantillonnage et le codage d'un signal.

L'essor du traitement numérique date de la découverte d'algorithmes de calcul rapide de la Transformée de Fourier Discrète. En effet, cette transformation est à la base de l'étude des systèmes discrets et elle constitue dans ce domaine numérique l'équivalent de la Transformation de Fourier dans le domaine analogique, c'est le moyen de passage de l'espace des temps discret à l'espace des fréquences discret. Elle s'introduit naturellement dans une analyse spectrale avec un pas de fréquence diviseur de la fréquence d'échantillonnage des signaux à analyser.

Les algorithmes de calcul rapide apportent des gains tels qu'ils permettent de faire les opérations en temps réel dans de nombreuses applications pourvu que certaines conditions élémentaires soient remplies. Ainsi, la Transformation de Fourier Discrète constitue non seulement un outil de base dans la détermination des caractéristiques du traitement et dans l'étude de ses incidences sur le signal, mais de plus, elle donne lieu à la réalisation d'équipements de grande diffusion comme la radio mobile et la télévision numérique. Les chapitres 2 et 3 lui sont consacrés ; ils donnent d'une part une présentation des propriétés élémentaires et du mécanisme des algorithmes de calcul rapide et de leurs applications, et d'autre part, un ensemble de variantes associées aux situations pratiques.

Une grande partie du présent ouvrage est consacrée à l'étude des systèmes linéaires discrets invariants dans le temps à une dimension, qui sont facilement accessibles et très utiles. Les systèmes à plusieurs dimensions et en particulier à deux et trois dimensions connaissent un grand développement ; ils sont appliqués par exemple aux images ; cependant, leurs propriétés se déduisent en général de celles des systèmes à une dimension dont ils ne sont souvent que des extensions simplifiées. Les systèmes non linéaires ou variables dans le temps, soit contiennent un sous-ensemble important qui présente les propriétés de linéarité et invariance temporelle, soit peuvent s'analyser avec les mêmes techniques que les systèmes ayant ces propriétés.

La linéarité et l'invariance temporelle entraînent l'existence d'une relation de convolution qui régit le fonctionnement du système, ou filtre, ayant ces propriétés. Cette relation de convolution est définie à partir de la réponse du système au signal élémentaire que représente une impulsion, la réponse impulsionnelle, par une intégrale dans le cas des signaux analogiques. Ainsi, si $x(t)$ désigne le signal à filtrer, $h(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre, le signal filtré $y(t)$ est donné par l'équation :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

Dans ces conditions, une telle relation qui pourtant traduit directement le fonctionnement réel du filtre, offre un intérêt pratique limité. En effet, d'une part il n'est pas très aisé de déterminer la réponse impulsionnelle à partir des critères

qui définissent l'opération de filtrage envisagée et d'autre part une équation comportant une intégrale ne permet pas facilement de reconnaître et vérifier le comportement du filtre. La conception est beaucoup plus facile à aborder dans le domaine des fréquences car la transformation de Laplace ou la transformation de Fourier permettent d'accéder à un plan transformé où les relations de convolution du plan amplitude-temps deviennent de simples produits de fonctions. À la réponse impulsionnelle, la transformation de Fourier fait correspondre la réponse en fréquence du système, et le filtrage se ramène au produit de cette réponse en fréquence par la transformée de Fourier, ou spectre, du signal à filtrer.

Dans les systèmes numériques, qui sont du type discret, la convolution se traduit par une sommation. Le filtre est défini par une suite de nombres qui constitue sa réponse impulsionnelle. Ainsi, si la suite à filtrer s'écrit $x(n)$, la suite filtrée $y(n)$ s'exprime par la sommation suivante, où n et m sont des entiers :

$$y(n) = \sum_m h(m) x(n-m)$$

Deux cas se présentent alors. Ou bien la sommation porte sur un nombre fini de termes, c'est-à-dire que les $h(m)$ sont nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de la variable entière m . Le filtre est dit à réponse impulsionnelle finie ; en faisant allusion à sa réalisation, on le désigne encore par non récursif car il ne nécessite pas de boucle de réaction de la sortie sur l'entrée dans sa mise en œuvre. Il est à mémoire finie, puisqu'il ne garde le souvenir d'un signal élémentaire, une impulsion par exemple, que pendant une durée limitée. Les nombres $h(m)$ sont appelés les coefficients du filtre, qu'ils définissent complètement. Ils peuvent se calculer d'une manière directe très simple, par exemple en faisant le développement en série de Fourier de la réponse en fréquence à réaliser. Ce type de filtre présente des caractéristiques originales très intéressantes ; par exemple, la possibilité d'une réponse rigoureusement linéaire en phase, c'est-à-dire d'un temps de propagation de groupe constant ; les signaux dont les composantes se trouvent dans la bande passante du filtre ne sont pas déformés à la traversée de ce filtre. Cette possibilité est exploitée dans les systèmes de transmission de données ou en analyse spectrale par exemple.

Ou bien la sommation porte sur un nombre infini de termes, les $h(m)$ ont une infinité de valeurs non nulles ; le filtre est dit à réponse impulsionnelle infinie ou encore de type récursif, car il faut réaliser sa mémoire par une boucle de réaction de la sortie sur l'entrée. Son fonctionnement est régi par une équation selon laquelle un élément de la suite de sortie $y(n)$ est calculée par la sommation pondérée d'un certain nombre d'éléments de la suite d'entrée $x(n)$ et d'un certain nombre d'éléments de la suite de sortie précédents. Par exemple, si L et K sont des entiers, le fonctionnement du filtre peut être défini par l'équation suivante :

$$y(n) = \sum_{l=0}^L a_l x(n-l) - \sum_{k=1}^K b_k y(n-k)$$

Les a_l ($l = 0, 1, \dots, L$) et b_k ($k = 1, 2, \dots, K$) sont les coefficients. Comme pour les filtres analogiques, l'étude de ce type de filtre ne se fait pas en général simplement de manière directe ; il est nécessaire de passer par un plan transformé. La transformation de Laplace ou la transformation de Fourier pourraient être utilisées. Cependant, il existe une transformation beaucoup mieux adaptée, la transformation en Z , qui est l'équivalent pour les systèmes discrets. Un filtre est caractérisé par sa fonction de transfert en Z , désignée généralement par $H(Z)$, et qui fait intervenir les coefficients par l'équation suivante :

$$H(Z) = \frac{\sum_{l=0}^L a_l Z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^K b_k Z^{-k}}$$

Pour obtenir la réponse en fréquence du filtre, il suffit de remplacer dans $H(Z)$ la variable Z par l'expression suivante où f désigne la variable fréquence et T la période d'échantillonnage des signaux :

$$Z = e^{j2\pi f T}$$

Dans cette opération, à l'axe imaginaire, dans le plan de Laplace, correspond le cercle de rayon unité centré à l'origine dans le plan de la variable Z . Il apparaît clairement que la réponse en fréquence du filtre défini par $H(Z)$ est une fonction périodique ayant pour période la fréquence d'échantillonnage. Une autre représentation de la fonction $H(Z)$ est utile pour la conception des filtres et l'étude d'un certain nombre de propriétés, celle qui fait apparaître les racines du numérateur appelées zéros du filtre, Z_l ($l = 1, 2, \dots, L$) et les racines du dénominateur appelées pôles, P_k ($k = 1, 2, \dots, K$) :

$$H(Z) = a_0 \frac{\prod_{l=1}^L (1 - Z_l Z^{-1})}{\prod_{k=1}^K (1 - P_k Z^{-1})}$$

Le terme a_0 est un facteur d'échelle qui définit le gain du filtre. La condition de stabilité du filtre s'exprime très simplement par la contrainte suivante : tous les pôles doivent être à l'intérieur du cercle unité. La position des pôles et des zéros par rapport au cercle unité, permet une appréciation très simple et très utilisée des caractéristiques du filtre.

Un ensemble de quatre chapitres est consacré à l'étude des caractéristiques de ces filtres numériques. Le chapitre 4 présente les propriétés des systèmes linéaires discrets invariants dans le temps, rappelle les propriétés principales de la transformation en Z et donne les éléments nécessaires à l'étude des filtres. Le chapitre 5 traite des filtres à réponse impulsionnelle finie : leurs propriétés sont étudiées, les techniques de calcul des coefficients sont décrites ainsi que les

structures de réalisation. Les filtres à réponse impulsionnelle infinie étant généralement réalisés par une mise en cascade de cellules élémentaires du premier et second ordre, le chapitre 6 décrit ces cellules et leurs propriétés, ce qui d'une part facilite considérablement l'approche de ce type de système et d'autre part fournit un ensemble de résultats très utiles dans la pratique. Le chapitre 7 donne les méthodes de calcul des coefficients des filtres à réponse impulsionnelle infinie et traite les problèmes apportés par la réalisation, avec les limitations qu'elle implique et leurs conséquences, en particulier le bruit de calcul.

Les filtres à réponse impulsionnelle infinie ayant des propriétés comparables à celles des filtres analogiques continus, il est naturel d'envisager pour leur réalisation des structures du même type que celles qui sont couramment employées en filtrage analogique. C'est l'objet du chapitre 8 qui présente des structures en chaîne. Une digression est faite avec les dispositifs à commutation de capacités, qui ne sont pas de type numérique au sens strict, mais qui sont néanmoins de type échantillonné et sont des compléments très utiles aux filtres numériques. Pour guider l'utilisateur, un résumé des mérites respectifs des structures décrites est donné en fin de chapitre.

Certains équipements, par exemple en instrumentation ou dans le domaine des télécommunications, font intervenir des signaux représentés par une suite de nombres complexes. Dans l'ensemble des signaux de ce type, une catégorie présente un intérêt pratique notable, celle des signaux analytiques. Leurs propriétés sont étudiées au chapitre 9, ainsi que la conception des dispositifs adaptés à la génération ou au traitement de tels signaux. Des notions complémentaires sur le filtrage sont également données dans ce chapitre, qui présente, d'une manière unifiée, les principales techniques d'interpolation. La restauration de signal est également abordée.

Les machines de traitement numérique, quand elles fonctionnent en temps réel, opèrent à une cadence étroitement liée à la fréquence d'échantillonnage des signaux et leur complexité dépend du volume d'opérations à faire et de l'intervalle de temps disponible pour les réaliser. La fréquence d'échantillonnage des signaux est généralement imposée à l'entrée ou à la sortie des systèmes, mais à l'intérieur du système lui-même, il est possible de la faire varier pour l'adapter aux caractéristiques du signal et du traitement, et ainsi de réduire le volume d'opérations et la cadence des calculs. Une simplification des machines, qui peut être très importante, est obtenue en adaptant tout au long du traitement la fréquence d'échantillonnage à la largeur de bande du signal utile, c'est le filtrage multicadence présenté au chapitre 10. Les incidences sur les caractéristiques du traitement sont décrites ainsi que les méthodes de réalisation. Des règles d'utilisation et d'évaluation sont fournies. Cette technique donne des résultats particulièrement intéressants pour les filtres à bande passante étroite ou pour la mise en œuvre d'ensembles appelés bancs de filtres. Dans ce dernier cas, le système associe à un ensemble de circuits déphaseurs un calculateur de Transformée de Fourier Discrète.

Les bancs de filtres pour la décomposition et la reconstruction des signaux sont devenus un outil de base pour la compression. Leur fonctionnement est décrit aux chapitres 11 et 12 avec les méthodes de calcul et les structures de réalisation.

Les filtres peuvent être déterminés à partir de spécifications dans le temps ; c'est le cas par exemple de la modélisation d'un système comme décrit au chapitre 13. Si les caractéristiques varient, il peut être intéressant de modifier les coefficients en fonction des évolutions du système. Cette modification peut dépendre d'un critère d'approximation et se faire à une cadence qui peut atteindre la cadence d'échantillonnage du système ; alors le filtre est dit adaptatif. Le chapitre 14 est consacré au filtrage adaptatif, dans le cas le plus simple, mais aussi le plus courant et le plus utile, celui où le critère d'approximation retenu est la minimisation de l'erreur quadratique moyenne et où les variations des coefficients se font suivant l'algorithme du gradient. Après un ensemble de rappels donnés au chapitre 13 sur les signaux aléatoires et leurs propriétés, en particulier la fonction et la matrice d'auto-corrélation dont les valeurs propres jouent un rôle important, l'algorithme du gradient est présenté au chapitre 14 et ses conditions de convergence sont étudiées. Ensuite les deux paramètres d'adaptation principaux, la constante de temps et l'erreur résiduelle sont analysés, ainsi que la complexité arithmétique. Différentes structures de réalisation sont proposées.

Le chapitre 15 peut être vu comme une extension des chapitres 13 et 14 à un domaine de l'intelligence artificielle, les réseaux de neurones. Ces dispositifs se caractérisent par l'utilisation systématique de circuits non linéaires pour des fonctions de modélisation, de classification ou de reconnaissance de formes et les techniques adaptatives y sont utilisées dans les phases d'apprentissage.

Le chapitre 16 traite d'une application très particulière, le codage correcteur. En effet, les systèmes de traitement et transmission de l'information intègrent des techniques de codage correcteur qui sont généralement introduites par une approche mathématique, alors que certains des codages les plus utilisés sont en réalité des applications directes des techniques de base du traitement de signal. L'objet du chapitre est donc de proposer une vision traitement du signal de certains codages, de manière à en faciliter l'accès et l'utilisation.

Pour terminer, le chapitre 17 décrit brièvement quelques applications, en montrant comment les méthodes et techniques de base sont exploitées.

Chapitre 1

La numérisation du signal. Échantillonnage et codage

La conversion d'un signal analogique sous forme numérique implique une double approximation. D'une part, dans l'espace des temps, le signal fonction du temps $s(t)$ est remplacé par ses valeurs $s(nT)$ à des instants multiples entiers d'une durée T ; c'est l'opération d'échantillonnage. D'autre part, dans l'espace des amplitudes, chaque valeur $s(nT)$ est approchée par un multiple entier d'une quantité élémentaire q ; c'est l'opération de quantification. La valeur approchée ainsi obtenue est ensuite associée à un nombre; c'est le codage, ce terme étant souvent utilisé pour désigner l'ensemble, c'est-à-dire le passage de la valeur $s(nT)$ au nombre qui la représente.

L'objet du présent chapitre est d'analyser l'incidence sur le signal de ces deux approximations.

Pour mener à bien cette tâche, on utilise deux outils de base qui sont l'analyse de Fourier et la théorie des distributions.

1.1 L'ANALYSE DE FOURIER

L'analyse de Fourier est un moyen de décomposer un signal en une somme de signaux élémentaires particuliers, qui ont la propriété d'être faciles à mettre en œuvre et à observer. L'intérêt de cette décomposition réside dans le fait que la réponse au signal d'un système obéissant au principe de superposition peut être déduite de la réponse aux signaux élémentaires. Ces signaux élémentaires sont périodiques et complexes, afin de permettre une étude en amplitude et en phase des systèmes; ils s'expriment par la fonction $s_e(t)$ telle que :

$$s_e(t) = e^{j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) + j \sin(2\pi ft) \quad (1.1)$$

où f représente l'inverse de la période, c'est la fréquence du signal élémentaire.

Dans la mesure où les signaux élémentaires sont périodiques, il est clair que l'analyse se simplifie dans le cas où le signal est lui-même périodique. Ce cas va être examiné d'abord, bien qu'il ne corresponde pas aux signaux les plus intéressants, puisqu'un signal périodique est parfaitement déterminé et ne porte pratiquement pas d'information.

1.1.1 Développement en série de Fourier d'une fonction périodique

Soit $s(t)$, une fonction de la variable t périodique et de période T , c'est-à-dire satisfaisant la relation :

$$s(t + T) = s(t) \quad (1.2)$$

Sous certaines conditions, on démontre que cette fonction est développable en série de Fourier, c'est-à-dire que l'égalité suivante est vérifiée :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi nt/T} \quad (1.3)$$

L'indice n est un entier et les C_n sont appelés les coefficients de Fourier; ils sont définis par l'expression :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-j2\pi nt/T} dt \quad (1.4)$$

En fait les coefficients de Fourier minimisent l'écart quadratique entre la fonction $s(t)$ et le développement (1.3). En effet la valeur (1.4) est obtenue en dérivant par rapport au coefficient d'indice n l'expression :

$$\int_0^T \left(s(t) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{j2\pi mt/T} \right)^2 dt$$

et en annulant cette dérivée.

Exemple : développement en série de Fourier de la fonction $i_p(t)$ constituée par une suite d'impulsions, séparées par la durée T , de largeur τ et d'amplitude a , centrée sur l'origine des temps (fig. 1.1).

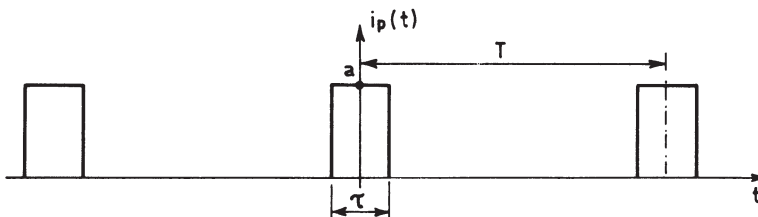


FIG. 1.1. Suite d'impulsions

Les coefficients C_n s'écrivent :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a e^{-j2\pi n t/T} dt = \frac{a\tau}{T} \frac{\sin\left(\pi n \frac{\tau}{T}\right)}{\pi n \frac{\tau}{T}} \quad (1.5)$$

et le développement est donné par :

$$i_p(t) = \frac{a\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi n \frac{\tau}{T}\right)}{\pi n \frac{\tau}{T}} e^{j2\pi n t/T} \quad (1.6)$$

On imagine l'importance que prend cet exemple dans l'étude des systèmes échantillonnés.

Les propriétés des développements en série de Fourier sont présentées dans l'ouvrage [1]. Une propriété importante est exprimée par l'égalité de Bessel-Parseval qui traduit le fait que dans la décomposition du signal il y a conservation de la puissance :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt \quad (1.7)$$

Les signaux élémentaires qui résultent de la décomposition d'un signal périodique ont des fréquences qui sont des multiples entiers de $\frac{1}{T}$, l'inverse de la période ; ils couvrent un ensemble discret de l'espace des fréquences. Par contre si le signal n'est pas périodique, les signaux élémentaires résultant de la décomposition couvrent un domaine continu de l'espace des fréquences.

1.1.2 Transformation de Fourier d'une fonction

Soit $s(t)$ une fonction de la variable t ; sous certaines conditions on démontre l'égalité suivante :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df \quad (1.8)$$

avec

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (1.9)$$

La fonction $S(f)$ est la transformée de Fourier de $s(t)$. Plus communément $S(f)$ est appelé spectre du signal $s(t)$.

Exemple : soit à calculer la transformée de Fourier $I(f)$ d'une impulsion isolée $i(t)$ de largeur τ , d'amplitude a et centrée sur l'origine des temps (fig. 1.2)

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j2\pi ft} dt = a \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$I(f) = a\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau} \quad (1.10)$$

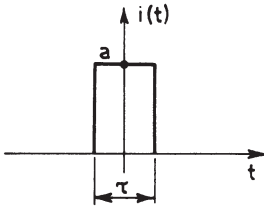


FIG. 1.2. Impulsion isolée

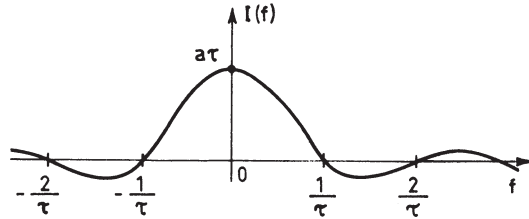


FIG. 1.3. Spectre de l'impulsion isolée

La figure 1.3 représente la fonction $I(f)$, qui sera très fréquemment utilisée par la suite. Il est important de remarquer qu'elle s'annule aux fréquences multiples entiers non nuls de l'inverse de la durée de l'impulsion.

L'Annexe 1 donne une tabulation de cette fonction.

La correspondance entre coefficients de Fourier et spectre apparaît nettement sur cet exemple. En effet, en rapprochant les relations (1.6) et (1.10) on vérifie que, au facteur $\frac{1}{T}$ près, les coefficients du développement en série de Fourier de la suite d'impulsions correspondent aux valeurs que prend le spectre de l'impulsion isolée aux fréquences multiples entiers de l'inverse de la période des impulsions.

En fait, on a la relation :

$$C_n = \frac{1}{T} S\left(\frac{n}{T}\right)$$

Une relation comparable à l'égalité de Bessel-Parseval existe pour une fonction non périodique. Dans ce cas, c'est non plus la puissance mais l'énergie du signal qui se trouve conservée :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \quad (1.11)$$

Soit $s'(t)$ la dérivée de la fonction $s(t)$; sa transformée de Fourier $S_d(f)$ s'écrit :

$$S_d(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} \cdot s'(t) dt = j2\pi f \cdot S(f) \quad (1.12)$$

Ainsi prendre la dérivée d'un signal amène une multiplication de son spectre par $j2\pi f$.

Une propriété essentielle de la transformation de Fourier, qui est en fait la principale raison de son utilisation, est qu'elle transforme un produit de convolution

en un produit simple. En effet soit deux fonctions du temps $x(t)$ et $h(t)$ dont les transformées de Fourier sont respectivement $X(f)$ et $H(f)$. Le produit de convolution $y(t)$ est défini par :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (1.13)$$

La transformée de Fourier de ce produit s'écrit :

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi fu} du = H(f) \cdot X(f)$$

Réciproquement, on montre que la transformée de Fourier d'un produit simple est un produit de convolution.

Un résultat intéressant pour l'étude de l'échantillonnage et se rapportant à l'exemple ci-dessus peut être déduit directement de ces propriétés. En effet soit à calculer la transformée de Fourier $\Pi(f)$ de la fonction $i^2(t)$; d'après les relations (1.10) et (1.13), il vient :

$$\Pi(f) = I(f) * I(f) = a \cdot I(f) \quad (1.14)$$

et par suite :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\phi\tau)}{\pi\phi\tau} \cdot \frac{\sin[\pi(f-\phi)\tau]}{\pi(f-\phi)\tau} d\phi = \frac{1}{\tau} \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$$

En prenant $f = \frac{n}{\tau}$, pour tout entier n non nul, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi\phi\tau)}{\pi\phi\tau} \cdot \frac{\sin[\pi(\phi\tau - n)]}{\pi(\phi\tau - n)} d\phi = 0 \quad (1.15)$$

Les fonctions $\frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}$, avec n entier, forment un ensemble de fonctions orthogonales.

La définition et les propriétés de la transformation de Fourier s'étendent aux fonctions de plusieurs variables. Soit $s(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction de n variables réelles, la transformée de Fourier est une fonction $S(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ définie par :

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \iiint_{\mathbb{R}^n} \dots \int s(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-j2\pi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n)} dx_1 dx_2, \dots, dx_n \quad (1.16)$$

Si la fonction $s(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est séparable c'est-à-dire si :
 $s(x_1, x_2, \dots, x_n) = s(x_1) s(x_2) \dots s(x_n)$ alors il vient :

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = S(\lambda_1) S(\lambda_2) \dots S(\lambda_n)$$

Les variables $x_i (1 \leq i \leq n)$ représentent souvent des distances, par exemple dans le cas bidimensionnel, et les λ_i sont alors appelées fréquences spatiales.

Dans l'étude des signaux échantillonnés, la transformation de Fourier va être appliquée aux distributions.

1.2 LES DISTRIBUTIONS

Les distributions mathématiques constituent une définition mathématique correcte des distributions rencontrées en physique [1].

1.2.1 Définition

On appelle distribution D une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace vectoriel \mathcal{D} des fonctions définies sur \mathbb{R}^n , indéfiniment dérivables et à support borné.

À toute fonction φ appartenant à \mathcal{D} , la distribution D associe un nombre complexe $D(\varphi)$, qui sera aussi noté par $\langle D, \varphi \rangle$, avec les propriétés :

- $D(\varphi_1 + \varphi_2) = D(\varphi_1) + D(\varphi_2)$.
- $D(\lambda\varphi) = \lambda D(\varphi)$ où λ est un scalaire.
- Si φ_j converge vers φ quand j tend vers l'infini, la suite $D(\varphi_j)$ converge vers $D(\varphi)$.

Exemples :

- Si $f(t)$ est une fonction sommable sur tout ensemble borné, elle définit une distribution D_f par :

$$\langle D_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt \quad (1.17)$$

- Si φ' désigne la dérivée de φ , la fonctionnelle :

$$\langle D, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi'(t) dt = \langle f, \varphi' \rangle \quad (1.18)$$

est une distribution.

- La distribution de Dirac δ est définie par :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (1.19)$$

La distribution de Dirac au point réel x est définie par :

$$\langle \delta(t-x), \varphi \rangle = \varphi(x) \quad (1.20)$$

On dit que cette distribution représente la masse + 1 au point x .

• Soit l'impulsion $i(t)$ de durée τ , d'amplitude $a = 1/\tau$, centrée sur l'origine. Elle définit une distribution D_i :

$$\langle D_i, \varphi \rangle = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \varphi(t) dt$$

Pour des valeurs de τ très petites on obtient :

$$\langle D_i, \varphi \rangle \simeq \varphi(0)$$

c'est-à-dire que la distribution de Dirac peut être considérée comme la limite, quand τ tend vers 0, de la distribution D_i .

1.2.2 Dérivation des distributions

On définit la dérivée $\frac{\partial D}{\partial t}$ d'une distribution D par la relation :

$$\left\langle \frac{\partial D}{\partial t}, \varphi \right\rangle = - \left\langle D, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle \quad (1.21)$$

Soit par exemple la fonction Y de Heaviside, ou échelon unité, égale à 0 si $t < 0$ et + 1 si $t \geq 0$.

$$\left\langle \frac{\partial Y}{\partial t}, \varphi \right\rangle = - \left\langle Y, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = - \int_0^{\infty} \varphi'(t) dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \quad (1.22)$$

Il en résulte que la discontinuité de Y apparaît sous la forme d'une masse ponctuelle unitaire dans sa dérivée.

Cet exemple illustre un intérêt pratique considérable de la notion de distribution, qui permet d'étendre aux fonctions discontinues un certain nombre de concepts et de propriétés des fonctions continues.

1.2.3 Transformation de Fourier d'une distribution

Par définition la transformée de Fourier d'une distribution D est une distribution notée FD telle que :

$$\langle FD, \varphi \rangle = \langle D, F\varphi \rangle \quad (1.23)$$

Par application de cette définition aux distributions à support ponctuel il vient :

$$\langle F\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, F\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \langle 1, \varphi \rangle \quad (1.24)$$

Par suite : $F\delta = 1$.

De même $F\delta(t - a) = e^{-j2\pi fa}$.

Un cas fondamental pour l'étude de l'échantillonnage est celui que constitue la suite des distributions de Dirac décalées de T , notée u et telle que :

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.25)$$

Cette suite est une distribution de masses unitaires aux points dont l'abscisse est un multiple entier de T . Sa transformée de Fourier s'écrit :

$$Fu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fnT} = U(f) \quad (1.26)$$

On démontre que cette somme est en fait une distribution ponctuelle.

Une démonstration intuitive peut être obtenue à partir du développement en série de Fourier de la fonction $i_p(t)$ constituée par la suite d'impulsions séparées par la durée T , de largeur τ , d'amplitude $1/\tau$, centrée sur l'origine des temps.

En effet on peut considérer que : $u(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} i_p(t)$.

En se reportant à la relation (1.6) on trouve : $\lim_{\tau \rightarrow 0} i_p(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi nt/T}$

$$\text{Il en résulte que : } U(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fnT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (1.27)$$

Cette propriété fondamentale démontrée dans l'ouvrage [1], ainsi que dans l'ouvrage [2], s'exprime comme suit :

La transformée de Fourier de la distribution temporelle comportant une masse unitaire en chaque point dont l'abscisse est un multiple entier de T est une distribution fréquentielle comportant la masse $1/T$ aux points dont l'abscisse est un multiple entier de $1/T$.

Ce résultat va être utilisé pour étudier l'échantillonnage d'un signal.

La propriété que possède la transformation de Fourier d'échanger convolution et multiplication s'applique également aux distributions.

Avant d'étudier les incidences sur le signal des opérations d'échantillonnage et quantification, il est utile de caractériser les signaux qui sont les plus fréquemment traités.

1.3 LES PRINCIPAUX SIGNAUX TRAITÉS

Les signaux sont définis par une fonction du temps $s(t)$. Cette fonction peut être une expression analytique ou la solution d'une équation différentielle, auquel cas le signal est appelé déterministe.

1.3.1 Les signaux déterministes

Les signaux de ce type les plus utilisés sont les signaux sinusoïdaux ; par exemple :

$$s(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

où A est l'amplitude, $\omega = 2\pi f$ la pulsation et α la phase du signal.

Ils sont faciles à reproduire, à reconnaître aux différents points d'un système et offrent une possibilité de visualisation simple des caractéristiques. De plus, comme indiqué aux paragraphes précédents, ils servent de base à la décomposition d'un signal déterministe quelconque, par l'intermédiaire de la Transformation de Fourier.

Si le système considéré est linéaire et invariant dans le temps, il peut être caractérisé par sa réponse en fréquence $H(\omega)$. Pour chaque valeur de la fréquence, $H(\omega)$ est un nombre complexe dont le module est l'amplitude de la réponse. Par convention on désigne par phase de la réponse du système la fonction $\varphi(\omega)$ telle que :

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-j\varphi(\omega)} \quad (1.28)$$

Cette convention permet d'exprimer le temps de propagation de groupe $\tau(\omega)$, fonction positive dans les systèmes réels, par :

$$\tau(\omega) = \frac{d\varphi}{d\omega} \quad (1.29)$$

Le temps de propagation de groupe fait référence aux lignes de transmission, sur lesquelles les différentes fréquences d'un signal se propagent à des vitesses différentes, ce qui entraîne une dispersion dans le temps de l'énergie du signal. Pour illustrer cette notion, soit deux fréquences proches $\omega \pm \Delta\omega$ auxquelles correspondent les phases par unité de longueur $\varphi \pm \Delta\varphi$. Le signal somme s'écrit :

$$s(t) = \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (\varphi + \Delta\varphi)] + \cos[(\omega - \Delta\omega)t - (\varphi - \Delta\varphi)]$$

ou encore

$$s(t) = 2 \cos(\omega t - \varphi) \cos(\Delta\omega t - \Delta\varphi)$$

C'est un signal modulé et il n'y a pas de dispersion si les deux facteurs subissent le même retard par unité de longueur, c'est-à-dire si $\Delta\varphi/\Delta\omega$ est une constante. Le temps de propagation de groupe caractérise donc la dispersion apportée à un signal par une ligne de transmission ou un système équivalent.

En appliquant au système le signal sinusoïdal $s(t)$, on obtient en sortie le signal résultant $s_r(t)$ tel que :

$$s_r(t) = A \cdot |H(\omega)| \cos[\omega t + \alpha - \varphi(\omega)] \quad (1.30)$$

C'est encore un signal sinusoïdal et la comparaison avec le signal appliqué permet une visualisation de la réponse du système. On imagine aisément l'importance de cette procédure pour les opérations de test par exemple.

Les signaux déterministes cependant ne représentent pas très bien les signaux réels, car, en fait, ils ne portent pas d'information, si ce n'est pas leur présence même. Les signaux réels sont généralement caractérisés par une fonction $s(t)$

aléatoire. Pour le test et l'analyse des systèmes on utilise aussi des signaux aléatoires, mais qui présentent des caractéristiques particulières pour ne pas compliquer exagérément la génération et l'exploitation. Une étude des signaux aléatoires est faite dans le tome 2 de la référence [2].

1.3.2 Les signaux aléatoires

Un signal aléatoire est défini à chaque instant t par la loi de probabilité de son amplitude $s(t)$. Cette loi peut s'exprimer par une densité de probabilité $p(x, t)$ définie comme suit :

$$p(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Proba } [x \leq s(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} \quad (1.31)$$

Il est stationnaire si ses propriétés statistiques sont indépendantes du temps, c'est-à-dire que sa densité de probabilité est indépendante du temps :

$$p(x, t) = p(x)$$

Il est du second ordre s'il possède un moment d'ordre 1 appelé valeur moyenne, qui est l'espérance mathématique de $s(t)$, notée $E[s(t)]$ et définie par :

$$m_1(t) = E[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x, t) dx$$

et un moment d'ordre 2, appelé fonction covariance :

$$E[s(t_1) \cdot s(t_2)] = m_2(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

où $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ est la densité de probabilité du couple de variables aléatoires $[s(t_1), s(t_2)]$.

Le caractère de stationnarité peut être limité aux moments du premier et du second ordre; on dit alors que le signal est stationnaire d'ordre 2 ou stationnaire au sens large, et pour un tel signal il vient :

$$E(s(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = m_1$$

L'indépendance du temps se traduit comme suit pour le densité de probabilité $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$:

$$p(x_1, x_2; t_1, t_2) = p(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = p(x_1, x_2; \tau)$$

avec

$$\tau = t_2 - t_1$$

Seul intervient l'écart entre les deux instants d'observation du signal :

$$E[(s(t_1) \cdot s(t_2))] = m_2(\tau) \quad (1.33)$$