CHAPITRE 1

Fonctions d'une variable réelle

PLAN

OBJECTIFS

- Décrire un phénomène par une fonction (observation en continu).
- Revoir les fonctions les plus utilisées en biologie.
- Savoir calculer, utiliser et interpréter une dérivée.
- Étudier divers éléments d'une courbe (tangentes, extrémums, branches infinies).
- Savoir construire une courbe paramétrée.

1.1 FONCTIONS USUELLES

1.1.1 Introduction

La biologie ne s'intéresse pas seulement aux descriptions et classifications des différents organismes ; mais aussi aux dépendances entre les différentes propriétés de ces organismes.

Ces dépendances peuvent être qualitatives (couleur, sexe, état solide, liquide ou gazeux) ou quantitatives. À la base des dépendances quantitatives, se trouvent les fonctions.

De façon générale, une fonction est la donnée de deux ensembles A et B (non vides) et d'une relation f, qui à tout élément x de A, associe un et un seul élément, noté $f(x)$, de B.

Les éléments de A sont appelés des objets, antécédents ou variables et ceux de B, des images ou valeurs de f.

Notations : $f : A \to B$ ou, lorsque A et B sont sous-entendus, $x \mapsto f(x)$.

Dans la première partie, nous nous intéresserons exclusivement aux fonctions réelles de variable réelle, c'est-à-dire à celles dont la variable x et l'image $f(x)$ sont des nombres réels. Nous en rappellons ici les plus importantes.

1.1.2 Fonctions polynomiales

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p \quad \text{avec } a_p \neq 0.$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sont des nombres fixés.

Le nombre entier p est appelé degré de la fonction polynomiale f.

Les représentations graphiques des fonctions polynomiales de degré 2 sont des paraboles.

1.1.3 Valeur absolue

Il s'agit de la fonction qui à tout réel x associe le nombre, noté $|x|$, défini par :

$$|x| = x \quad \text{si} \quad x \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad |x| = -x \quad \text{si} \quad x \leqslant 0\,.$$

Ainsi, par exemple, la fonction $x \mapsto |x-1|$ prend la valeur :

$$|x-1| = x-1 \quad \text{si} \quad x \geqslant 1 \quad \text{et} \quad |x-1| = -(x-1) = -x+1 \quad \text{si} \quad x \leqslant 1.$$

1.1.4 Fonctions rationnelles

Elles sont de la forme $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ où les fonctions f et g sont polynomiales. Le domaine de définition d'une telle fonction est l'ensemble des x tels que $g(x) \neq 0$.

Par exemple, les fonctions rationnelles définies par :

$$\frac{2x-1}{x^2+1}\ , \quad \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}\ , \quad \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$$

sont définies respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1.1.5 Fonctions exponentielles et logarithmiques

- **Fonction logarithme népérien**

La fonction logarithme népérien est notée ln. Elle est définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0\,; \\ \forall x > 0 \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}\cdot \end{cases}$$

Cette fonction est strictement croissante et

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty\,; \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty.$$

L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est notée e (e $\approx 2{,}718$).

En outre, la fonction logarithme népérien vérifie les propriétés suivantes :

$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b\,; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b\,; \quad \ln(a^r) = r\ln a\,.$$

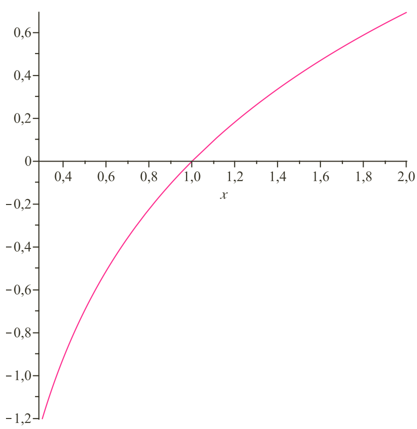

Figure 1.1 Fonction logarithme népérien.

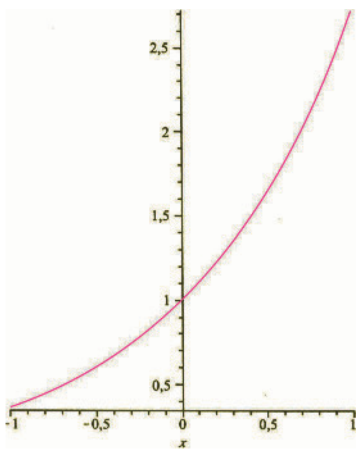

Figure 1.2 Fonction exponentielle.

- **Fonction exponentielle**

C'est la fonction réciproque de la fonction ln. Elle est notée exp, ou $x \to e^x$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, +\infty[$ et vérifie les