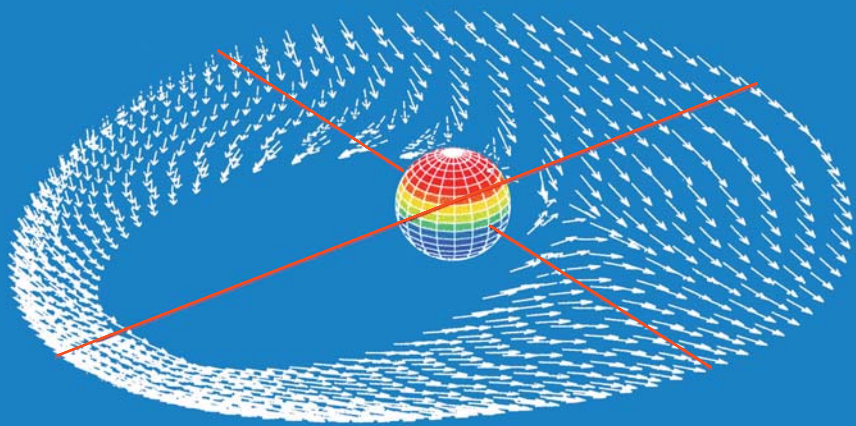
COLLECTION ENSEIGNEMENT SUP //// Mathématiques

L3

Calcul différentiel et équations différentielles

EXERCICES CORRIGÉS



Dominique Azé, Guillaume Constans
et Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

EDP SCIENCES

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercices et problèmes corrigés

Dominique Azé, Guillaume Constans, Jean-Babtiste Hiriart-Urruty

Collection dirigée par Daniel Guin

EDP SCIENCES

17, avenue du Hoggar
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Illustration de couverture : Transfert à faible poussée d'un satellite vers une orbite géostationnaire, par J.-B. Caillau, J. Gergaud et J. Noailles (ENSEEIHT-Toulouse).

Imprimé en France

ISBN : 978-2-7598-0413-9

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

© **2010, EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf,
91944 Les Ulis Cedex A

TABLE DES MATIÈRES

This page intentionally left blank

AVANT-PROPOS

Le module d'enseignement intitulé « calcul différentiel-équations différentielles » figure dans les formations de mathématiques au niveau L3 des licences de mathématiques. Il a la réputation d'être difficile, de manière injustifiée nous semble-t-il, car il est certainement moins abstrait que la Topologie générale ou la Théorie de la mesure enseignées au même niveau, et possède un aspect « mathématiques qui fonctionnent » qui fait son attrait et qu'il s'agit d'exploiter.

Le présent ouvrage s'adresse aux étudiants. C'est un recueil de devoirs, au sens premier de ce vocable, c'est-à-dire de travaux à effectuer, en temps limité ou chez soi, seul ou à plusieurs. Les devoirs –du moins lorsqu'on n'abandonne pas trop vite devant les difficultés– ont pour objectif de faire progresser dans la maîtrise du savoir et du savoir-faire qui vont avec le sujet ; bref, ici comme dans les autres modules, « on progresse en mathématiques en faisant… » La plupart des problèmes et exercices proposés sont originaux (mentionnons a contrario l'exercice 2 de 1.19 pris dans [12], 1.35 issu de [14] et de parties de 1.18 et de 1.27 adaptées de [5]). La durée estimée pour la plupart des devoirs proposés est de 3 heures. Certes, nous avons renoncé à ces devoirs à l'ancienne constitués d'un long problème en plusieurs parties, culminant en un résultat tangible de synthèse ; il s'agira davantage pour nous d'un ensemble de deux ou trois exercices indépendants, traitant de chapitres différents du programme. Les thèmes traités suivent grosso modo le déroulement d'un programme standard de module « Calcul différentiel-Équations différentielles » (cf. infra), avec au fur et à mesure qu'on avance, un retour sur les chapitres passés, bref une progression en spirale qui nous est chère, plutôt qu'une progression linéaire. La plupart –sinon tous– les devoirs proposés dans le présent recueil ont été posés durant les dix dernières années sous forme d'examens intermédiaires ou terminaux en temps limité, ou à rendre rédigés après y avoir travaillé chez soi. Ils ont parfois été reconstitués ou légèrement modifiés, ce qui a inévitablement introduit des perturbations voire de légères erreurs.

Voyons avec quelques commentaires le programme couvert.

Calcul différentiel. Dans certaines universités, ce thème fait seul l'objet d'un module séparé en licence de mathématiques. Le calcul différentiel est né au XVII^e siècle de la nécessité de résoudre des problèmes d'optimisation (ou d'extremum selon une terminologie plus ancienne) ; la forme élaborée qui est présentée dès les premiers chapitres du programme date de la fin du XIX^e siècle et du début du XX^e.

– *Fonctions différentiables. Différentiation de fonctions composées. Différentielles partielles.*
– *Théorème des accroissements finis ou des valeurs moyennes. Suites et séries de fonctions différentiables.*
– *Différentielles d'ordre supérieur ; fonctions de classe C^p. Formules de* Taylor.

La différentiation des fonctions de deux ou trois variables, vue en premier cycle universitaire, est une aide importante dans l'assimilation de ce qui n'en est qu'une généralisation. Ne pas sous-estimer la difficulté, réelle, qu'engendre la notion de différentielle d'ordre supérieur (d'ordre deux en fait). Dans « calcul différentiel » il y a « calcul »..., on attend donc de l'étudiant-lecteur qu'il ne soit pas dérouté dès que des calculs lui sont proposés.

– *Théorèmes d'inversion locale, des fonctions implicites. Applications aux conditions d'optimalité du premier et du deuxième ordre : problèmes d'optimisation sans contrainte, problèmes avec contraintes du type égalité (dans ce cas, conditions du premier ordre uniquement), Théorème des multiplicateurs de* Lagrange.
– *Introduction aux sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ (cas particulier des courbes de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, et des surfaces de $\mathbb{R}^3$). Sous-espace (vectoriel, affine) tangent, normal. représentations locales par des équations ou des paramétrisations.*
– *Introduction aux problèmes variationnels.*

C'est typiquement du calcul différentiel sur des fonctions exprimées sous forme d'intégrales. On se permet d'insister par le biais de quelques exercices ; en effet, à partir d'exemples modélisant des situations d'applications (en Mécanique, Physique), on montre comment les concepts et résultats acquis permettent de résoudre des problèmes posés ou, à défaut, de mieux les cerner.

– *Équations différentielles.*
– *Théorèmes de* Cauchy-Lipschitz, *solutions maximales, dépendance des conditions initiales et des paramètres, intégrales premières.*

- *Équations différentielles vectorielles linéaires (ou systèmes différentiels). Résolvantes. Wronskien.*
- *Méthode de variation des constantes ; équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants.*

Voilà un domaine où l'on peut être touffu et prolixe à l'excès. Nous mettons l'accent sur deux points : les équations différentielles vectorielles sont posées dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, rarement au-delà, jamais en dimension infinie ; nous insistons volontairement sur les équations différentielles linéaires, pas seulement parce que la théorie et les calculs y sont plus agréables et complets, mais aussi en raison de leur importance dans l'approximation du non-linéaire. Pour cette partie, nous pensons qu'une connaissance des équations différentielles, telles que présentées dans un bon cours de Mathématiques spéciales, est un objectif amplement suffisant.

- *Introduction à l'analyse numérique des équations différentielles.*

Cette partie du programme figure habituellement plutôt dans les cours d'Analyse numérique du même niveau de formation ; seuls deux devoirs sont proposés ici.

Sur un semestre d'enseignement, la 1$^{\text{e}}$ partie (Calcul différentiel) occupe les deux tiers, la 2$^{\text{e}}$ partie le tiers restant. En volume horaire de cours magistral, il faut compter 36-40 heures pour couvrir ce programme ; quant aux séances dirigées d'exercices, un minimum de 45-50 heures est nécessaire.

Cet ouvrage fut publié pour la première fois aux éditions Dunod en octobre 2002, mais il n'est plus disponible depuis 2007. Ainsi, pour répondre à une demande de collègues et étudiants, une nouvelle édition a été envisagée. Nous remercions les éditions EDP Sciences, notament notre collègue D. Guin (directeur de la collection Enseignement Sup-Mathématiques), d'avoir accueilli ce projet.

This page intentionally left blank

ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS

$:=$: égal par définition (utilisé de temps en temps).

cf. : *confer*, signifie « se reporter à ».

i.e. : *id est*, signifie « c'est-à-dire ».

---

log ou ln : logarithme népérien.

arctan : arctangente.

tan : tangente.

sinh (resp. cosh, tanh : sinus (resp. cosinus, tangente) hyperbolique.

$\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}_+$: ensemble des réels ≥ 0.

$\mathbb{R}^+_*$ ou $\mathbb{R}^*_+$: ensemble des réels strictements positifs.

$\{1, \cdots, n\}$ ou $[1, n]$: ensemble des entiers compris entre 1 et n.

$t \downarrow 0$ (resp. $t \uparrow 0$) t tend vers 0 par valeurs strictement positives (resp. strictement négatives).

$\bar{B}(x, r)$ (resp. $B(x, r)$) : boule fermée (resp. ouverte) de centre x et de rayon r. On utilisera aussi $\bar{B}_r(x)$ et $B_r(x)$.

id_E ou I_E : application identité de l'ensemble E.

$x(\cdot)$: fonction et application sont des appellations utilisées indifféremment ; ici la notation est pour suggérer que x est une fonction.

$f_{|A}$: restriction de l'application $f : E \longrightarrow F$ à la partie $A \subset E$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou $(\cdot \,|\, \cdot)$: notation générique pour un produit scalaire ; $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ est plus volontiers utilisé dans l'espace des matrices (de manière à distinguer ce qui est relatif aux matrices et aux vecteurs).

$Df(x)$ (resp. $D^p f(x)$) : pour une application f différentiable en x (resp. p fois différentiable en x), $Df(x)$ (resp. $D^p f(x)$) désigne la différentielle première (resp. p-ième) de f en x. Si la variable est réelle (et notée t), on utilise la notation $f'(t)$ (resp. $f^p(t)$) pour la dérivée première (resp. p-ième) de f en t (ce sont des éléments de l'ensemble d'arrivée et non des applications linéaires).

$\nabla f(x)$: Si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert et si f est différentiable en x, $\nabla f(x)$ désigne le vecteur *gradient* de f en x (dépendant donc du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\partial_i f(x)$: (fonction) dérivée partielle de $f : O \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par rapport à la i-ème variable x_i.

$D_i f(x)$: différentielle partielle par rapport à la i-ème variable.

$\nabla^2 f(x)$: matrice *Hessienne* d'une fonction $f : O \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable en x.

$Jf(x)$ ou $J_f(x)$: matrice *Jacobienne* d'une application $f : O \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable en x.

$o(\|h\|)$: notation générique pour désigner une fonction de h de la forme $\|h\|\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

$\varphi'_d(t)$ (resp. $\varphi'_g(t)$) : dérivée à droite (resp. à gauche) de la fonction (de la variable réelle) φ.

$\mathcal{C}^0(I, E)$ ou $\mathcal{C}(I, E)$: ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans un espace normé E.

$\mathcal{C}^p(I, E)$: ensemble des fonctions p fois continûment dérivables sur I à valeurs dans un espace normé E.

$\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$: qualification d'une fonction continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que f soit la restriction d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$.

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices (m, n) (m lignes et n colonnes) à coefficients réels ; $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une abréviation de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

$[a_{ij}]$: matrice dont le terme de i-ème ligne j-ème colonne est a_{ij}.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.

Tr (A) ou tr (A) : trace de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i.e. Tr $(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

A^T : matrice *transposée* de la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

$\det(A)$ ou $\det A$: déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

cof (A) : matrice des *cofacteurs* de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (on dit aussi comatrice de A), i.e. celle dont le terme (i, j) est $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, où A_{ij} est la matrice obtenue en enlevant de A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.

Vect $(d_1, \cdots, d_q)$ ou $[d_1, \cdots, d_q]$: sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $d_1, \cdots, d_q$.

Sauf indication contraire $\mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique ; ainsi à $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est canoniquement associée une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

L'isomorphisme canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est celui qui à $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe la matrice unicolonne $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On identifie alors $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par cet isomorphisme. Si, par exemple, u et v sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors uv^T est la matrice (n, n) de terme général $u_i v_j$ alors que $u^T v$ est la matrice $(1, 1)$ (un scalaire donc) $\sum_{i=1}^n u_i v_i$.

$\mathcal{L}(E, F)$: ensemble des applications linéaires continues de l'espace normé E dans l'espace normé F ; $\mathcal{L}(E)$ est une abréviation pour $\mathcal{L}(E, E)$.

Isom (E, F) : ensemble des isomorphismes topologiques de l'espace normé E dans l'espace normé F ; Isom (E) est une abréviation pour Isom (E, E).

$\mathcal{L}_n(E; F)$ ou $\mathcal{L}_n(E^n; F)$: ensemble des applications multilinéaires continues de E^n dans F.

D'une manière générale, la règle est de se servir de notations *d'un usage courant* en Mathématiques et *cohérentes* à l'intérieur d'un même exercice.

This page intentionally left blank

1

ÉNONCÉS

1.1. Calcul différentiel sur des espaces de matrices. Transformation de Legendre-Fenchel

Durée : 3 heures

EXERCICE 1

Soit $E := \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ structuré en espace euclidien grâce au produit scalaire

$$(A, B) \in E \times E \mapsto \langle\langle A, B \rangle\rangle := \operatorname{Tr}(A^T B).$$

Pour une fonction $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ouvert U de E et différentiable en $X \in U$, on désigne par $\nabla f(X)$ le gradient de f en X ($\nabla f(X)$ est donc une matrice ici).

1) Soit A fixé dans E et $f_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $X \longmapsto f_A(X) := \operatorname{Tr}(A^T X)$. Dire pourquoi f_A est différentiable en tout $X \in E$ et calculer $\nabla f_A(X)$.

2) On suppose que $m = n$. Soit $A \in E := \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit U l'ensemble ouvert des matrices inversibles de E et soit $g_A : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$X \longmapsto g_A(X) := \operatorname{Tr}(X^{-1} A).$$

Montrer que g_A est différentiable en tout $X \in U$ et déterminer $\nabla g_A(X)$. (On rappelle que l'application $f_1 : X \in U \longmapsto f_1(X) := X^{-1}$ est différentiable sur U avec $Df_1(X)H = -X^{-1}HX^{-1}$ pour tout $X \in U$ et $H \in E$.)

3) Soit $a \in \mathbb{R}^n$, U et E comme dans la question précédente et $h_a : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$X \longmapsto h_a(X) := \langle X^{-1} a, a \rangle,$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que h_a est différentiable en tout $X \in U$ et déterminer $\nabla h_a(X)$.

Au fur et à mesure qu'on avancera dans la résolution des questions posées, on vérifiera la cohérence des résultats obtenus en se référant au cas particulier où $m = n = 1$.

EXERCICE 2

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de HILBERT réel ; on note $\|.\|$ la norme hilbertienne associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$ (c'est-à-dire $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$). Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(y) := \begin{cases} \frac{1}{2}(\|y\|^2 - 1) & \text{si } \|y\| \geq 1, \\ \\ 0 & \text{si } \|y\| < 1. \end{cases}$

1) a) Soit $a \in H$ de norme égale à 1. Montrer que f n'est pas différentiable en a.

b) Montrer que f est différentiable sur chacun des ouverts $\{y \in H : \|y\| < 1\}$ et $\{y \in H : \|y\| > 1\}$.

2) a) On définit pour tout $x \in H$ la fonction

$$\theta_x : y \in H \longmapsto \theta_x = \langle x, y \rangle - f(y).$$

Montrer que θ_x est majorée sur H et que sa borne supérieure sur H est dans $\mathbb{R}^+$. Cela permet de définir la fonction

$$g : x \in E \longmapsto g(x) := \sup_{y \in H} \{\langle x, y \rangle - f(y)\}.$$

Déterminer $g(0)$.

b) On désigne désormais par S la sphère-unité de H, c'est-à-dire $S = \{y \in H : \|y\| = 1\}$. Déterminer $\sup_{y \in S}\{\langle x, y \rangle - f(y)\}$.

c) Montrer que si $\|x\| > 1$, alors $\sup_{y \in H \setminus S}\{\langle x, y \rangle - f(y)\}$ est atteint en un point que l'on précisera. En déduire la valeur de $g(x)$ en fonction de x.

d) Montrer que si $0 < \|x\| < 1$, alors $\sup_{y \in H}\{\langle x, y \rangle - f(y)\}$ est atteint en un point de S. Donner alors l'expression de $g(x)$.

3) Montrer que g est de classe C^1 sur $H \setminus \{0\}$. Exprimer la différentielle

$$h \in H \longmapsto Dg(x)h$$

de g en $x \in H \setminus \{0\}$. La fonction g est-elle deux fois différentiable en $a \in S$?

Indications : Noter la « symétrie sphérique » de f, cela aide grandement. La notion d'application de classe C^1 et celle d'application deux fois différentiable n'interviennent qu'à la toute dernière question.

1.2. Caractérisation d'un opérateur gradient (lemme de Poincaré)

Durée : 3 heures

Soit U un ouvert d'un espace de Banach E. On note E^* l'ensemble $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur E et l'on note pour $\varphi \in E^*$, $x \in E$,

$$\langle \varphi, x\rangle = \varphi(x).$$

On dit que $A \in \mathcal{L}(E, E^*)$ est symétrique si, pour tout u, $v \in E$ on a $\langle Au, v\rangle = \langle Av, u\rangle$. On note $\mathcal{C}(U, E^*)$ l'ensemble des applications continues de U dans E^*. Un élément $f \in \mathcal{C}(U, E^*)$ est dit un opérateur gradient s'il existe une fonction $F \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ telle que $DF(x) = f(x)$ pour tout $x \in U$. On dit alors que F est une primitive de f. *Dans la suite, on supposera que U est un ouvert convexe contenant l'origine. Étant donné $f \in \mathcal{C}^1(U, E^*)$, on considère les propriétés suivantes :*

i) f est un opérateur gradient.

ii) Pour tout $a \leq b$ et pour toute application de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux $x : [a,b] \to U$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \langle f(x(t)), x'(t)\rangle\, dt$ ne dépend que des valeurs $x(b)$ et $x(a)$.

iii) Pour tout x, $y \in U$, on a

$$\int_0^1 (\langle f(sy), y\rangle - \langle f(sx), x\rangle)\, ds = \int_0^1 \langle f(sy + (1-s)x), y - x\rangle\, ds.$$

iv) $Df(x) \in \mathcal{L}(E, E^*)$ est symétrique pour tout $x \in U$.

1) Montrez que i) implique ii).

2) Montrez que ii) implique iii). On pourra utiliser les deux chemins $z_1(s) = sy + (1-s)x$, $s \in [0,1]$ et $z_2(s) = (1-s)x$ pour $s \in [0,1]$, $z_2(s) = (s-1)y$ pour $s \in [1,2]$.

3) On suppose que iii) est vérifiée.

a) On pose, pour $x \in U$, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \langle f(sx), x\rangle\, ds$. Montrez que pour tout $h \in E$ et pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ assez petit pour que $x + \tau h \in U$, on a

$$F(x+\tau h) - F(x) = \tau \int_0^1 \langle f(x + s\tau h), h\rangle\, ds$$

This page intentionally left blank

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Azé, *Éléments d'analyse convexe et variationnelle*, Ellipses, Paris, 1997.

[2] D. Azé, *Calcul différentiel ; équations différentielles*, Cours polycopié, Université Paul Sabatier de Toulouse, http ://www.math-fonda.ups-tlse.fr/A08-09/.

[3] H. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1977.

[4] G. Christol, A. Cot, Ch.-M. Marle, *Calcul différentiel*, Ellipses, Paris, 1997.

[5] P. Donato, *Calcul différentiel pour la licence*, Dunod, Paris, 2000.

[6] M. Gostiaux, *Cours de Mathématiques spéciales*, tome 3, Presses Universitaires de France, Paris, 1995.

[7] J.-B. Hiriart-Urruty, *Les mathématiques du mieux faire, volume 1 : premiers pas en optimisation*, Ellipses, Paris, 2007.

[8] J.-B. Hiriart-Urruty, *Calcul différentiel ; équations différentielles*, polycopié d'un Cours, Université Paul Sabatier de Toulouse, tirage 1998.

[9] M.W. Hirsch, S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, New York, 1974.

[10] J. Hubbard, B. West, *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, 1999.

[11] D. Leborgne, *Calcul Différentiel et Géométrie*, Presses Universitaires de France, Paris, 1982.

[12] F. Rideau, *Exercices de Calcul Différentiel*, Hermann, Paris, 1979.

[13] N. Rouché, J. Mahwin, *Équations différentielles ordinaires, tome 1*, Masson, Paris, 1973.

[14] M. Schatzman, *Analyse numérique. Cours et exercices pour la licence de mathématiques*, Inter Éditions, Paris, 1991.

[15] L. Schwartz, *Analyse 2 : Calcul différentiel et équations différentielles*, Hermann, Paris, 1992.