Toute la PCSI en fiches

MATHS. PHYSIQUE. CHIMIE.

Toute la PCSI en fiches

MATHS. PHYSIQUE. CHIMIE.

2[E] ÉDITION | D. Fredon • S. Calléa • D. Magloire

DUNOD

Crédits photographiques :

Portrait de Leonhard Euler, 1753, par Jakob Handmann ; Max Planck, 1930, auteur inconnu ; Albert Einstein, 1921, photographié par Ferdinand Schmutzer ; Antoine Lavoisier, gravure de H. Rousseau et E. Thomas, *Album du centenaire*, 1889, Jouvet et cie.

Les figures des pages 489, 495 et 506 sont reprises des ouvrages ci-dessous, publiés aux Éditions Dunod :

Chimie tout en un, PC-PC*, B. Fosset, J.-B. Baudin, F. Lahitète, V. Prévost, 2012
Le Formulaire PCSI-PTSI, L. Porcheron, D. Fredon, M. Descombes-Vasset, 2013

Conception et création de couverture : Dominique Raboin

Collaboration technique : Thomas Fredon, ingénieur Télécom Bretagne

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-072733-9

Avant propos

Pour chaque matière proposée dans cet ouvrage (mathématiques, physique, chimie), vous trouverez un résumé de cours pour vous aider dans vos révisions tout au long de l'année et, dans la dernière ligne droite, juste avant vos concours.

Ces résumés sont enrichis - non pas aux omega 3 comme dans la publicité -mais avec des conseils, des méthodes, des mises en garde, et des exercices types pour vous entraîner à manipuler les notions présentées.

Synthèse des programmes, ce livre vous accompagnera avant tout contrôle oral ou écrit. L'ordre de présentation des notions a été pensé en fonction de cet objectif. Ne soyez pas surpris que l'ordre pédagogique de votre cours soit différent : l'apprentissage n'est pas un processus linéaire.

Grâce au découpage en fiches et à la présence d'un index détaillé, vous retrouverez facilement, et à tout moment, les notions que vous souhaitez réviser.

Il vous sera également utile en deuxième année car, rappelez-vous, le programme des concours que vous passerez porte sur les deux années de classes préparatoires.

Dans chaque des fiches, certaines parties sont mises en valeur par un fond tramé :
− pour mettre en évidence un résultat important,

− avec le pictogramme ✎ (prenez note !) pour des commentaires, remarques, méthodes,

− avec le pictogramme ☞ (Attention, danger !) pour des mises en garde, des erreurs à éviter.

Un résumé de cours n'est pas un cours complet. Pour ceci, rien ne remplace le cours de votre professeur. Vous pouvez aussi consulter le catalogue Dunod, riche de nombreux manuels et ouvrages d'entraînement.

N'hésitez pas à nous communiquer vos critiques, vos propositions d'amélioration, et aussi vos encouragements.

Daniel Fredon	**Didier Magloire**	**Savério Calléa**
daniel.fredon@laposte.net	didier.magloire@orange.fr	saverio.callea@laposte.net
mathématiques	physique	chimie

Un grand merci à Matthieu Daniel pour le suivi attentif de la réalisation de ce livre, à Roger Faure dont les compétences sont toujours disponibles, et à Françoise Couty-Fredon pour son soutien sans faille.

Table des matières

Physique

Mécanique

Induction

Thermodynamique

Chimie

Transformation de la matière

Architecture de la matière

Chimie organique

Solides cristallins

Partie 1
Mathématiques

Leonhard Euler, 1707-1783

Son oeuvre scientifique, qui comporte 886 titres (soit près de 80 volumes), est la plus vaste de l'histoire des sciences. Elle couvre tout le champ des mathématiques, de la mécanique céleste et de la physique de son époque.

Il est émerveillé par sa formule $e^{i\pi} + 1 = 0$ qui relie les cinq nombres fondamentaux e, i, π, 1 et 0. Et vous ?

1 Nombres réels

1. Intervalles

1.1 Définitions

Pour $a \leqslant b$, le segment, $[a;b]$ est défini par :

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leqslant x \leqslant b\}$$

On utilise souvent la propriété :

$$c \in [a,b] \iff \exists t \in [0,1] \quad c = ta + (1-t)b$$

On définit de même les autres types d'intervalles :

$]a;b[$, $[a;b[$, $]a,b]$, $]a,+\infty[$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

1.2 Propriété caractéristique

Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si :

$$\forall a \in A \quad \forall b \in A \qquad a < c < b \implies c \in A.$$

1.3 Voisinage d'un point

Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de a si elle contient un intervalle ouvert centré sur a.

1.4 Parties denses dans $\mathbb{R}$

Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Exemples : Les décimaux, les rationnels, les irrationnels sont des parties denses dans $\mathbb{R}$. Cela signifie que, entre deux réels distincts, il existe toujours un rationnel et un irrationnel.

Par conséquent, entre deux réels distincts, il existe une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

2. Approximations décimales

2.1 Valeurs approchées

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. On dit que b est une *valeur approchée* de a à ε près si $|a-b| < \varepsilon$, c'est-à-dire si $b \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

On parle de valeur approchée *par excès* si $b > a$ et *par défaut* si $b < a$.

2.2 Partie entière

Étant donné un nombre réel x, il existe un plus grand entier relatif, noté $\lfloor x \rfloor$, tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x$. On l'appelle la partie entière de x.

On a donc, par définition : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

☞ *Attention à ne pas confondre avec la suppression de la partie décimale quand* $x < 0$ *; par exemple* $\lfloor -4,3 \rfloor = -5$.

2.3 Valeurs décimales approchées

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Il existe un entier d unique tel que

$$d \times 10^{-n} \leqslant x < (d+1) \times 10^{-n}.$$

d est la partie entière de $10^n x$.

$d \times 10^{-n}$ s'appelle la *valeur décimale approchée de* x *à* 10^{-n} *près par défaut*, et $(d+1) \times 10^{-n}$ celle *par excès*.

3. Ordre dans $\mathbb{R}$

3.1 Majoration, minoration

- **Définitions**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que a est un majorant de A si $x \leqslant a$ pour tout x de A.
Si, en plus, $a \in A$, alors a est le plus grand élément de A, noté $\max A$.

Si A admet un majorant, on dit que A est majorée.

On définit de même : minorant, plus petit élément, partie minorée.

- **Unicité**

Si une partie non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément, ou un plus petit élément, il est unique. Mais il peut ne pas exister.

☞ *Surveillez votre vocabulaire :* **un** *majorant,* **le** *plus grand élément.*

- **Cas particulier des entiers naturels**

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

3.2 Borne supérieure, inférieure

- **Définitions**

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A.

La borne inférieure de A est le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble des minorants de A.

- **Caractérisation**

M est la borne supérieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :

$\forall x \in A \quad x \leqslant M$, c'est-à-dire que M est un majorant ;

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x$, c'est-à-dire que $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant.

m est la borne inférieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :

$\forall x \in A \quad m \leqslant x$, c'est-à-dire que m est un minorant ;

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad x < m + \varepsilon$, c'est-à-dire que $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant.

- **Remarque**

Si A admet un plus grand élément, alors c'est la borne supérieure de A.

Si A admet un plus petit élément, alors c'est la borne inférieure de A.

- **Théorème d'existence**

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

2 Généralités sur les fonctions

1. Définitions

1.1 Fonction numérique

Définir une fonction numérique f sur une partie non vide E de $\mathbb{R}$, c'est indiquer comment faire correspondre au plus un réel y à tout x de E.

Le réel y est l'image de x par f et s'écrit $f(x)$. On note :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

L'ensemble des réels qui ont effectivement une image par f est l'ensemble de définition de f. Il est noté D_f, ou D s'il n'y a pas d'ambigüité.

1.2 Représentation graphique

Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique de f est l'ensemble C_f des points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in D_f$.

1.3 Images et images réciproques d'ensembles

Soit $A \subset D_f$. L'image de A par f est l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) \ ; x \in A\}.$$

Soit $B \subset \mathbb{R}$. L'image réciproque de B par f est l'ensemble :

$$\overset{-1}{f}(B) = \{x \in D_f \ ; f(x) \in B\}.$$

☞ *Cette notation permet de ne pas confondre avec la réciproque d'une bijection, car, ici, on ne suppose rien sur f. Quand la distinction sera installée, on utilisera $f^{-1}(B)$.*

1.4 Restriction, prolongement

Soit f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J. Si $I \subset J$ et si $f(x) = g(x)$ pour tout x de I, on dit que f est une restriction de g, ou que g est un prolongement de f.

La restriction de f à I se note : $f_{|I}$.

2. Premières propriétés

2.1 Parité

- f est paire si :

$$\forall x \in D_f \qquad (-x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x).$$

Son graphe est symétrique par rapport à (Oy).

- f est impaire si :

$$\forall x \in D_f \qquad (-x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Son graphe est symétrique par rapport à O.

2.2 Périodicité

f est périodique, de période T (ou T-périodique), si

$$\forall x \in D_f \qquad (x+T) \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$

Son graphe est invariant par les translations de vecteurs $kT\overrightarrow{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Sens de variation

- f est croissante sur I si $I \subset D_f$ et

$$\forall x_1 \in I \qquad \forall x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

- f est décroissante sur I si $I \subset D_f$ et

$$\forall x_1 \in I \qquad \forall x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

- f est monotone sur I si elle est croissante sur I, ou décroissante sur I.
- Avec des inégalités strictes, on définit : f strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone, sur D_f.

2.4 Extrémum

- f admet un maximum (resp. minimum) global en x_0 si :

$$\forall x \in D_f \qquad f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

- f admet un maximum (resp. minimum) local en $x_0 \in D_f$, s'il existe un intervalle ouvert $I \subset D_f$, contenant x_0, tel que :

$$\forall x \in I \quad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{resp.} f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Un maximum ou un minimum local est dit extremum local en x_0.

Un extremum est un maximum ou un minimum.

3. Relation d'ordre

3.1 Comparaison de fonctions

f et g étant deux fonctions, à valeurs réelles, définies sur le même ensemble de définition D, on note $f \leqslant g$ (resp. $f \geqslant g$) si :

$$\forall x \in D \qquad f(x) \leqslant g(x) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant g(x)).$$

Si $f \geqslant 0$, f est dite positive.

3.2 Majorant, minorant

Si l'ensemble des images $f(D)$ est majoré, ou minoré, ou borné, on dit que f est majorée, ou minorée, ou bornée.

Si l'image $f(I)$ de I admet une borne supérieure, ou une borne inférieure, on parle de borne supérieure, de borne inférieure, de f sur I et on note :

$$\sup_{x \in I} f(x) \ ; \ \inf_{x \in I} f(x).$$

3.3 Propriétés

$\inf\limits_{x \in I} f(x) = -\sup\limits_{x \in I} \big(-f(x)\big).$

Si, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\sup_{x\in I} f(x) \leqslant \sup_{x\in I} g(x)$.

Si $I \subset J$, on a : $\sup_{x\in I} f(x) \leqslant \sup_{x\in J} f(x)$.

4. Opérations sur les fonctions

4.1 Valeur absolue d'une fonction

f étant définie sur D, la fonction $|f|$ est définie sur D par $x \mapsto |f(x)|$.

Une fonction f est bornée si, et seulement si, $|f|$ est majorée.

4.2 Opérations algébriques

Soit f et g deux fonctions numériques et λ un réel.

La fonction λf est définie sur D_f par : $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

La fonction $f + g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

La fonction $f\,g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par : $(f\,g)(x) = f(x)\,g(x)$.

La fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $D_f \cap \left[D_g \setminus \{x\ ;\ g(x) = 0\}\right]$ par : $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}\cdot$

4.3 Composition

On appelle composée de f par g la fonction, notée $g \circ f$, définie sur $D_f \cap \overset{-1}{f}(D_g)$ par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

3 Limites et continuité

1. Définitions

Soit f une fonction, à valeurs réelles, définie sur un intervalle I.

1.1 Limite d'une fonction en a

Soit a un point appartenant à I, ou extrémité de I. On dit que f admet une limite finie l en a, et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

✎ *Cette limite peut exister même si f n'est pas définie en a. Mais si f est définie en a et si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Si une fonction admet une limite l en x_0, cette limite est unique.

1.2 Limite à gauche, limite à droite

- f admet une limite à droite l en a si la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ admet pour limite l en a. On note : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l$.

- f admet une limite à gauche l en a si la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ admet pour limite l en a. On note : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$.

- Si f est définie sur un intervalle de la forme $]a - \alpha, a + \alpha[$, sauf en a, alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l.$$

Si f est définie en a, ces deux limites doivent aussi être égales à $f(a)$.

1.3 Limite infinie en a

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si :

$$\forall A > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-a| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si :

$$\forall A > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x-x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \leqslant -A.$$

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

1.4 Limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

- On dit que f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, B > 0 \quad \forall x \in I \quad x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A.$$

On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On définit de manière analogue $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \ \ldots$

✎ *Toutes ces définitions peuvent se regrouper en considérant a et l dans* $\overline{\mathbb{R}}$.

2. Propriétés des limites

2.1 Caractérisation séquentielle

Soit f définie sur un intervalle I et a un point de I.
f a pour limite l au point a si, et seulement si, pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers l, finie ou non.

✎ *Pour démontrer qu'une fonction f n'a pas de limite lorsque x tend vers a, il suffit de fournir un exemple de suite* (x_n) *qui tende vers a et telle que* $\big(f(x_n)\big)$ *soit divergente ; ou encore deux suites qui tendent vers a et dont les suites images aient des limites différentes.*

2.2 Opérations sur les limites

- Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a et admettant des limites l et m en a, et λ un réel.

Alors les fonctions $f + g$, λf et fg admettent respectivement pour limites en a : $l + m$, λl et lm.

Si de plus $m \neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ a pour limite $\dfrac{1}{m}$ ·

- Soit f une fonction définie au voisinage de a avec $\lim\limits_{x \to a} f(x) = u_0$ et g définie au voisinage de u_0 telle que $\lim\limits_{u \to u_0} g(u) = v$.

Alors $g \circ f$ est définie au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = v$.

2.3 Propriétés liées à l'ordre

- Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.
- Si f admet une limite finie $l > 0$ en a, alors il existe $K > 0$ tel que $f \geqslant K$ au voisinage de a.
- Si f est positive au voisinage de a et admet une limite finie l en a, alors $l \geqslant 0$.
- Si $f \leqslant g$ au voisinage de a, et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, alors $l \leqslant m$.
- **Théorème d'encadrement**

Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a, et vérifiant $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a.

Si f et h ont la même limite l (finie ou infinie) en a, alors g a pour limite l en a.

- Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a, et vérifiant $f \leqslant g$ au voisinage de a.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

2.4 Théorème de la limite monotone

Soit f une fonction monotone sur $]\alpha,\beta[$. Elle admet en tout point a de $]\alpha,\beta[$ une limite finie à droite et une limite finie à gauche.

Lorsque f est croissante, si elle est majorée, elle admet en β une limite à gauche finie, si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$ quand x tend vers β^-.

Pour f décroissante, on a la propriété analogue en α.

3.Continuité

3.1 Continuité en un point

- f est continue en a si elle est définie en a et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue à droite (resp. à gauche) en a si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

(resp. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$).

3.2 Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur I et $a \notin I$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $I \cup \{a\}$ par $\tilde{f}(a) = l$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$, est la seule fonction continue en a dont la restriction à I soit f.

On l'appelle le prolongement par continuité de f en a.

3.3 Continuité sur un intervalle

Soit E un ensemble qui soit un intervalle ou une réunion d'intervalles. Une fonction f, définie sur E, est dite continue sur E, si f est continue en tout point de E.

4. Image d'un intervalle par une fonction continue

4.1 Image d'un intervalle

Si f est continue sur un intervalle I et à valeurs réelles, alors $f(I)$ est un intervalle.

4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue, pour tout y tel que $f(a) < y < f(b)$, il existe c tel que $y = f(c)$.

En particulier, si une fonction f est continue sur $[a,b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.

4.3 Image d'un segment

Toute fonction continue sur un segment et à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue et à valeurs réelles, est un segment.

4.4 Cas d'une fonction strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I.

f est une bijection de I sur $f(I)$, et sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $f(I)$.

Dans un repère orthonormé, les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.

Sauriez-vous répondre ?

Exercice 1 : Montrez que la fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n' a pas de limite quand x tend vers 0.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie pour $x \neq 3$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ ·
Est-elle prolongeable par continuité en $x = 3$?

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - \cos x$.
Montrez que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique.

4 Fonctions dérivables

1. Définitions

1.1 Dérivée en un point

Soit f une fonction définie sur D et x_0 un élément de D tel que f soit définie au voisinage de x_0. On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

On dit alors que f est dérivable en x_0.

Si $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe, f est dite dérivable à droite en x_0, et cette limite est appelée dérivée à droite de f en x_0, et notée $f'_d(x_0)$.

On définit de même la dérivée à gauche en x_0, notée $f'_g(x_0)$.

f est dérivable en x_0 si, et seulement si, f admet en x_0 une dérivée à droite et une dérivée à gauche égales.

1.2 Fonction dérivée

f est dite dérivable sur E, si elle dérivable en tout point de E.
On appelle fonction dérivée de f sur E, la fonction, notée f', définie sur E par : $x \mapsto f'(x)$.

1.3 Dérivées successives

Soit f dérivable sur E. Si f' est dérivable sur E, on note sa fonction dérivée f'' ou $f^{(2)}$. On l'appelle dérivée seconde de f.

Pour n entier, on définit par récurrence la dérivée n^e, ou dérivée d'ordre n, de f en posant $f^{(0)} = f$, puis $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur E.

f est dite de classe C^n sur E si $f^{(n)}$ existe sur E, et est continue sur E.

f est dite de classe C^∞, ou indéfiniment dérivable, si f admet des dérivées de tous ordres.

1.4 Interprétation graphique

f dérivable en x_0 signifie que le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$. Son équation est :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en x_0, mais le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à Oy.

1.5 Dérivabilité et continuité

Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0.

☞ *Attention, la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue, et non dérivable, en 0, car elle admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite différentes.*

2. Opérations sur les fonctions dérivables

2.1 Opérations algébriques

Si f et g sont dérivables en x_0, il en est de même de $f+g$, de fg, et de $\dfrac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$; et on a :

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\ .$$

2.2 Fonction composée

Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)\ .$$

2.3 Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. On suppose que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$.
Alors, la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}\ .$$

2.4 Cas des fonctions à valeurs complexes

- Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$f(x) = a(x) + \mathrm{i}\, b(x)$$

on dit que f est dérivable si, et seulement si, a et b le sont et on a :

$$f'(x) = a'(x) + \mathrm{i}\, b'(x)$$

- Les opérations algébriques se prolongent. On a le résultat (très utile en physique) : si φ est une fonction dérivable à valeurs complexes :

$$\Big[\exp(\varphi)\Big]' = \varphi' \times \exp(\varphi).$$

3. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

3.1 Condition nécessaire d'extrémum local

Si f admet un extrémum local en x_0 et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

3.2 Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

✎ *Autre énoncé*

Si f est dérivable, entre deux valeurs qui annulent f, il existe au moins une valeur qui annule f'.

3.3 Égalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

☞ *Cette égalité, valable pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ne se généralise pas aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, ainsi que le théorème de Rolle.*

3.4 Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Si $m \leqslant f' \leqslant M$, alors :

$$m\,(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M\,(b - a).$$

Si $|f| \leqslant K$, alors, pour tous x et x' éléments de $[a, b]$,

$$|f(x) - f(x')| \leqslant K\,|x - x'|.$$

Dans ce cas, on dit que f est K-lipschitzienne. Cette inégalité se généralise aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ en remplaçant la valeur absolue par le module.

3.5 Limite de la dérivée

Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et si f' a une limite finie l en a, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.

☞ *Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que $f'_d(a)$ existe sans que f' ait une limite en a.*

4. Variations d'une fonction dérivable

4.1 Théorème

Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I.

Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.

Ce dernier résultat est encore valable si f' s'annule en des point isolés, c'est-à-dire tels que leur ensemble ne contienne pas d'intervalle.

4.2 Condition suffisante d'extremum local

f, f' et f'' étant continues sur $]a, b[$, si en $x_0 \in]a, b[$, on a $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, la fonction f présente un extremum local en x_0.

C'est un maximum si $f''(x_0) < 0$, un minimum si $f''(x_0) > 0$.

Sauriez-vous répondre ?

Exercice 1 : Appliquez l'égalité des accroissements finis à la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ entre $a = 0$ et $b = 2\pi$. Concluez.

Exercice 2 : Montrez que $|\sin x| \leqslant |x|$ pour tout x réel.