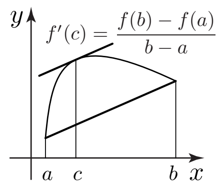
Chapitre 10

Utilisation de la dérivée et de l'intégrale

1. Étude des variations d'une fonction

La dérivée $f'(a)$ d'une fonction f en un point a est le taux de proportionnalité entre les infiniments petits $f(x){-}f(a)$ et $x{-}a$, quand x tend vers a : la dérivée en a ne fait intervenir que les valeurs $f(x)$ pour x voisin de a.
Nous allons voir que si f a une dérivée en tout point d'un intervalle I, les nombres $f'(x)$ donnent un contrôle sur tous les taux d'accroissement $\dfrac{f(b){-}f(a)}{b{-}a}$, quels que soient a et b dans I.

Théorème des accroissements finis. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Pour tous nombres a et b dans I, il existe un nombre c strictement compris entre a et b tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.*



La tangente en c est parallèle à la corde

Démonstration. Posons $k = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $\varphi(x) = k(x-a) + f(a)$.
Les fonctions f et φ sont continues, donc aussi leur différence $u(x) = f(x) - \varphi(x)$. D'après les propriétés des fonctions continues sur un segment, il y a un nombre c entre a et b où $u(x)$ atteint son maximum (page 283). On sait qu'en ce point c, la tangente au graphe de u est horizontale, donc $u'(c) = f'(c) - \varphi'(c) = 0$. Puisque $\varphi'(x) = k$, il vient $f'(c) = k$. ■

Une première conséquence du théorème, c'est qu'au moyen de la dérivée, on peut caractériser les fonctions constantes, les fonctions croissantes et les fonctions décroissantes.

Caractérisation des fonctions constantes. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante.

Caractérisation des fonctions monotones

- Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I. Si $f'(x) > 0$ sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x, alors f est strictement croissante sur I.
- De même, si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, f est décroissante sur I.

Application aux primitives

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

- *Si F est une primitive de f, alors $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.*
- *Toute primitive de f s'écrit $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c$, où c est une constante.*

On sait que la fonction $U(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est une primitive de f telle que $U(x_0) = 0$. Si F est une autre primitive de f, alors $U' = f = F'$, $U' - F' = 0$, donc la fonction $U - F$ est constante. Comme cette fonction prend en x_0 la valeur $U(x_0) - F(x_0) = -F(x_0)$, on en déduit $U(x) = F(x) - F(x_0)$ pour tout $x \in I$.

Notation. On notera simplement $\int f(t)\,dt$ une primitive de f. On écrit alors par exemple $\sin x = \int \cos t\,dt$: c'est une égalité de fonctions à constante près.

Les primitives suivantes s'obtiennent par dérivation, en vérifiant simplement que dans chaque cas, la dérivée du second membre est égale à la fonction sous le signe intégrale.

Primitives usuelles

$$\int t^{\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\,, \text{ si } \alpha \neq -1 \qquad \int \frac{dt}{at+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$$

$$\int e^{at}\,dt = \frac{1}{a}e^{ax} \qquad \int \ln t\,dt = x\ln x - x$$

$$\int \cos(at)\,dt = \frac{1}{a}\sin(ax) \qquad \int \sin(at)\,dt = -\frac{1}{a}\cos(ax)$$

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan x \qquad \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\tan x}$$

$$\int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arc}\tan\frac{x}{a} \qquad \int \frac{dt}{a^2-t^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}} = \ln\bigl(x+\sqrt{a^2+x^2}\bigr) \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \operatorname{Arc}\sin\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \ln\bigl|x+\sqrt{x^2-a^2}\bigr|$$

L'inégalité des accroissements finis

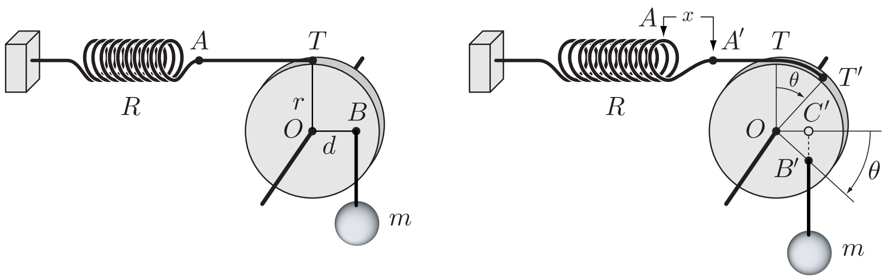
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Appliquons le théorème des accroissements finis entre des nombres x et y de I et prenons les valeurs absolues : on obtient $\bigl|f(x)-f(y)\bigr| = |x-y|\bigl|f'(z)\bigr|$, où z est un certain nombre compris entre x et y.

Proposition. *Supposons qu'on a la majoration $|f'(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in I$. Alors pour tous nombres x et y dans I, on a $\bigl|f(x) - f(y)\bigr| \leqslant M|x-y|$.*

Cette majoration très importante s'appelle *l'inégalité des accroissements finis*.
Si l'on connaît un majorant de la fonction $t \mapsto |f'(t)|$ sur un segment, l'inégalité

des accroissements finis permet de calculer un encadrement pour les valeurs de la fonction f sur ce segment.

Exemple. Le dispositif ci-dessous montre un disque mobile autour d'un axe horizontal en O. Le point T, à la verticale de O, est relié à un ressort R par un fil AT. Au point B situé à l'horizontale de O, on laisse pendre une masse m. La roue tourne alors d'un angle θ, le ressort s'allonge de $AA'=x$ et le fil s'enroule le long de l'arc $\overset{\frown}{TT'}$.



Notons r le rayon de la roue et d la distance OB. À l'équilibre, le point d'attache du poids est en B' et le vecteur $\overrightarrow{OB'}$ fait l'angle θ avec l'horizontale.
Le poids $\vec{P}$ appliqué en B' a pour valeur mg et le ressort exerce en T une force de rappel $\vec{F}$ horizontale d'intensité kx, où k est le coefficient de dureté du ressort. À l'équilibre, les moments de $\vec{P}$ et $\vec{F}$ ont la même valeur numérique :

- le moment de $\vec{F}$ est $F \times OT = kx \times r$
- le moment de $\vec{P}$ est $P \times OC' = P \times OB' \cos\theta = mg \times d\cos\theta$.

La distance x est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{TT'}$, donc $x = r\theta$. La condition d'équilibre s'écrit $kxr = kr^2\theta = mgd\cos\theta$, c'est-à-dire

$$(1) \qquad \theta = \frac{mgd}{kr^2}\cos\theta$$

Puisqu'il existe évidemment une position d'équilibre, l'équation (1) a une solution θ_e. On peut le démontrer en introduisant la fonction continue $u(\theta) = \dfrac{mgd}{kr^2}\cos\theta - \theta$. La valeur $u(0) = mgd/kr^2$ est positive et $u(\pi/2) = -\pi/2 < 0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (1) a au moins une solution entre 0 et $\pi/2$. La fonction $\theta \mapsto \cos\theta$ étant strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$, u est strictement décroissante entre 0 et $\pi/2$, donc la solution θ_e est unique.

Posons $K = \dfrac{mgd}{kr^2}$ et $f(\theta) = K\cos\theta$. Puisque $f(\theta_e) = \theta_e$, la solution θ_e est un point fixe de la fonction f. On a $f'(\theta) = -K\sin\theta$, $\left|f'(\theta)\right| \leqslant K$ et l'inégalité des accroissements finis pour la fonction f entre θ et θ_e s'écrit :

$$(2) \qquad \left|f(\theta) - f(\theta_e)\right| \leqslant K|\theta - \theta_e|$$