Relativité restreinte

Claude Semay
Bernard Silvestre-Brac

Relativité restreinte

Bases et applications

Cours et exercices corrigés

3e édition

DUNOD

Illustration de couverture : © Melpomene – Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, 2005, 2010, 2016

5 rue Laromiguière, 75005 Paris
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-074703-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

AVANT-PROPOS

– Oui, mais qui a raison en réalité *? insista M. Tompkins.*
– Vous ne pouvez pas poser une question aussi générale.
En relativité, les observations sont toujours rapportées
à un observateur particulier, un observateur
dont le mouvement est bien défini relativement à ce qui est observé.

Extrait d'un dialogue entre M. TOMPKINS et le professeur

Depuis qu'Albert Einstein a, en 1905, jeté les bases d'une des théories les plus fondamentales de l'histoire des sciences, la relativité restreinte, des centaines de livres et des milliers d'articles ont été publiés sur le sujet. Nous croyons cependant que ce manuel se distingue d'autres livres par les caractéristiques détaillées dans les quatre paragraphes suivants :

• Nombre de nos concepts, basés sur le sens commun, doivent être abandonnés en relativité restreinte, dont le plus solidement ancré en nous est sans doute le caractère absolu du temps. La relativité d'Einstein est par bien des aspects une théorie étrange. Heureusement, cela n'interdit nullement qu'elle puisse être bien comprise. Un peu d'aide étant cependant toujours la bienvenue, nous avons illustré aussi souvent que possible certains développements formels de la théorie par une approche graphique originale due à F. W. Sears et R. W. Brehme. Nous pensons qu'une représentation graphique des concepts de base de la relativité restreinte peut fortement aider à la compréhension de la théorie et, en particulier, des fameux « paradoxes » qu'on lui attribue.

• Comme dans beaucoup de manuels, nous illustrons la théorie par des expériences et des applications tirées de publications scientifiques. Par exemple, une section entière est consacrée au GPS. Ce système de positionnement global est la seule application couramment utilisée qui nécessite pour son fonctionnement l'utilisation des lois relativistes. Dans cet ouvrage, nous faisons de plus appel à des exercices académiques basés sur les véhicules spatiaux relativistes. S'il est vrai que les fusées, et autres astronefs, ne sont pas capables d'atteindre des vitesses proches de celle de la lumière, on ne peut toutefois pas rejeter le fait qu'ils le deviennent un jour, dans un futur peut-être lointain. Nous pensons en outre que ces « applications », toujours développées avec rigueur, peuvent apporter un peu de fantaisie et de rêve dans un texte parfois (souvent ?) austère. C'est également dans le but d'agrémenter un peu le manuel que des illustrations issues de vieux magazines de science-fiction ont été ajoutées.

• Dans ce livre, les équations de transformation de la relativité restreinte sont établies, une première fois, en se basant sur l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide. Cette démarche, qui est la plus utilisée et sans doute aussi la plus simple, n'est cependant pas la plus générale. Dans une deuxième approche, nous démontrons l'existence d'une vitesse limite invariante dans l'univers en partant d'hypothèses très raisonnables sur la structure de l'espace-temps. Cela se fait indépendamment de la théorie électromagnétique, celle-ci ne fournissant qu'un cadre pratique pour mesurer cette vitesse.

• La théorie de la relativité générale n'est qu'évoquée dans ces pages. Toutefois, un chapitre entier est consacré à la perception de l'univers que peut avoir un observateur uniformément accéléré. Ce problème, qui est résolu ici dans le cadre unique de la théorie de la relativité restreinte, jette cependant un pont entre les deux relativités. Il permet une première approche d'une théorie relativiste de la gravitation et une meilleure compréhension des phénomènes relativistes influençant le fonctionnement du GPS. Un chapitre est consacré à l'étude du tenseur énergie-impulsion. Cet objet peut aussi être construit dans le cadre unique de la relativité restreinte. Mais il prend tout son intérêt dans le cadre de la relativité générale, puisqu'il occupe le membre de droite des fameuses équations d'Einstein.

Cet ouvrage ne se prétend nullement exhaustif. En particulier, certains points difficiles de la théorie de la relativité restreinte, comme les représentations des groupes de Lorentz ou de Poincaré, ne seront pas abordés. Bien qu'un chapitre important soit consacré aux connexions existant entre la relativité restreinte et l'électromagnétisme, cette dernière théorie est loin d'être complètement couverte.

Nous proposons ici un petit guide de lecture. Certains mots importants, souvent propres à la théorie de la relativité restreinte, sont écrits en italique lorsqu'ils apparaissent pour la première fois dans le texte. Nous insistons sur un mot ou un bout de phrase en l'écrivant en gras. Certaines sections marquées d'un astérisque (*) abordent des sujets plus difficiles ou pouvant être omis dans une première lecture. Les nombreuses références citées dans le texte, ainsi que les ouvrages repris dans la bibliographie, permettent au lecteur d'approfondir certains points particuliers. L'indication « biblio » signale qu'une référence est mentionnée dans la bibliographie.

Une bonne compréhension d'une théorie se traduit par la capacité à résoudre des problèmes spécifiques. À la fin de chaque chapitre, des exercices sont donc proposés au lecteur dans un ordre de difficulté, approximativement et très subjectivement, croissante. Les exercices sont par nature une œuvre collective. Certains de ceux que nous proposons sont inspirés de problèmes parus dans d'autres manuels, cités dans la bibliographie ; d'autres sont extraits d'examens dont nous avons eu connaissance ; quelques-uns sont de notre cru. Des notes sur ces exercices, donnant les solutions ou des informations complémentaires, sont rassemblées à la fin de l'ouvrage. Les annexes sont disponibles sur le site www.dunod.com à partir de la page de présentation de l'ouvrage.

La rédaction de cet ouvrage a bénéficié des observations et critiques de nombreux lecteurs, étudiants, enseignants et amis. Nous les remercions tous chaleureusement, en particulier Fabien Buisseret, Benjamin Fuks et Vincent Mathieu. Nous remercions aussi Daniel Flipo pour ses nombreux conseils de TEXnicien. Nous tenons également à exprimer toute notre gratitude à Raoul Giordan qui nous a permis d'illustrer cet ouvrage avec quelques-uns de ses dessins.

TABLE DES MATIÈRES

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Le concept de relativité

1

Je ne peux rien vous prouver si vous ne me laissez faire aucune mesure.
La mesure est pour moi le seul moyen de trouver les lois de la nature.
Je ne suis pas un métaphysicien.

Arthur S. Eddington (1921)

1.1 La notion de référentiel

1.1.1 Systèmes de référence

L'homme désire comprendre le monde qui l'entoure et le pourquoi des choses. Il tire même une gloire personnelle à pouvoir faire des prédictions sur les phénomènes naturels. Pour ce faire, il doit effectuer des mesures, les plus précises possible, sur des quantités susceptibles d'intervenir dans la description de ces phénomènes. Or ces quantités dépendent de l'observateur et de ce par rapport à quoi il effectue ses mesures.

Considérons un homme A assis dans un train en marche. Il pense légitimement être au repos car il est immobile par rapport à tout son environnement proche : son voisin assis en face de lui, son livre sur les genoux, sa valise dans le compartiment à bagages sont fixes par rapport à lui. Le train passe devant un passage à niveau où un autre individu B laisse tomber un caillou en attendant l'ouverture de la barrière. Ce personnage pense également être au repos car il est immobile par rapport à la barrière, par rapport à l'arbre voisin. Il voit aussi son caillou tomber à ses pieds selon la verticale. En revanche, il voit A passer devant lui et manifestement il ne considère pas ce dernier comme étant au repos. Du point de vue de A, B n'est pas au repos non plus puisqu'il défile devant lui. De même la trajectoire du caillou n'est pas une droite verticale, mais une courbe qui peut ne pas être simple selon le mouvement du train. Pendant le temps de chute du caillou, le train a avancé et, par rap-

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

port au train, le point de contact du caillou au sol n'est pas à la verticale de son point de lâcher. Les deux personnages A et B ne « voient » pas les mêmes choses, pourtant ils doivent être en mesure d'en déduire l'un et l'autre ce qui se passe réellement, car les phénomènes naturels et les événements ont une réalité intrinsèque indépendante de la façon dont on les appréhende. Connaissant le mouvement du train par rapport à lui, B doit être en mesure de savoir que A est immobile dans le train. De même A, connaissant le mouvement de l'arbre par rapport à lui, doit être en mesure de savoir que B est immobile par rapport à l'arbre et, à partir de la mesure de la trajectoire du caillou dans le train, il doit aussi être en mesure d'en déduire que le caillou tombe verticalement par rapport à B.

Autrement dit, l'homme a besoin de repères dans l'espace et dans le temps. Considérons d'abord les propriétés de l'espace. Toute mesure doit être faite par rapport à « quelque chose ». Ce « quelque chose » demande à être précisé et se nomme un *système de référence* ou *référentiel*. Celui-ci est un ensemble infini continu de points (au sens mathématique du terme) tels qu'ils sont fixes les uns par rapport aux autres. Cette propriété est le fait d'un corps solide et un système de référence pourrait être un solide, à condition qu'il ait une extension suffisamment importante pour recouvrir tous les phénomènes qui nous intéressent. C'est un fait d'expérience que, pour décrire notre espace, il faut désigner un point spécial O, appelé origine, et trois axes Ox, Oy, Oz, que l'on peut prendre mutuellement orthogonaux (formant, par exemple un trièdre direct). En termes mathématiques, on dit que l'espace est *affine* à trois dimensions. La donnée de l'origine et des trois axes constitue un « référentiel d'espace » (ou un « repère », ou un « système de référence ») et, par définition, ces éléments sont **fixes** les uns par rapport aux autres. Un autre référentiel est défini par une autre origine O' et par trois autres axes $O'x', O'y', O'z'$ qui, eux-aussi, sont fixes les uns par rapport aux autres. Par contre, ce nouveau référentiel peut se déplacer, de manière rigide, dans le premier référentiel. La formalisation des phénomènes physiques dans chacun des référentiels et le lien entre les quantités mathématiques qui les décrivent est la question de base du physicien.

Et le temps ? Le temps est mesuré par une horloge et jouit d'un statut spécial : en mécanique classique (newtonienne) le temps est absolu, indépendant du repère. Toutes les horloges dans tous les référentiels peuvent être synchronisées. Le voyageur prenant le train à Paris règle sa montre sur l'horloge de la gare. En arrivant à Bruxelles, il compare l'heure de sa montre à celle indiquée par l'horloge de la gare d'arrivée (qui est supposée synchronisée sur celle de Paris) : elle marque exactement la même heure, et ceci quel que soit le mouvement du train le long du parcours.

En relativité, même restreinte, qui nous intéresse ici, il n'en va plus de même. Le temps dépend du mouvement ; il ne peut être absolu. Ainsi, pour définir proprement un référentiel, on doit lui affecter également son propre système d'horloges synchronisées (voir section 2.1.2). La lecture du temps sur l'horloge définit un nouvel axe, temporel, sur lequel il faut également définir une origine. Il faut toutefois se garder de mettre sur le même pied le temps et l'espace. S'il est vrai que le temps peut être considéré comme une quatrième dimension, elle est de nature différente des dimensions spatiales, même en relativité. En effet, dans un référentiel donné, un objet peut explorer une direction spatiale dans un sens ou dans l'autre. Par contre, son évolution se fait toujours dans un seul sens du temps, vers le futur. La raison profonde de cette dissymétrie est encore mal connue (voir section 3.6).

Pour résumer cette longue discussion, un référentiel $\mathcal{R}$ est fixé par la donnée d'une origine O dans l'espace et dans le temps, et de 4 axes de repérage : trois axes dans des directions, par exemple, mutuellement orthogonales et un dans la « direction du temps ». En mécanique classique, on omet souvent l'axe des temps car il n'est pas spécifique à un repère particulier. En relativité, on utilise abusivement le nom de référentiel en se restreignant au référentiel spatial lorsqu'on se concentre uniquement sur la partie espace ; c'est de pratique courante et nous tomberons souvent dans cet abus de langage qui ne porte pas à conséquence. Dans la suite, nous utiliserons fréquemment la notion de *référentiel propre* : le référentiel propre d'un observateur ou d'un objet est le référentiel dans lequel cet observateur ou cet objet est au repos.

Signalons enfin que l'espace de la relativité restreinte est euclidien et que tous les théorèmes de géométrie euclidienne (rapport du périmètre d'un cercle à son rayon, théorème de Pythagore, somme des angles d'un triangle égale à 180°, etc.) y ont cours. En relativité générale, cette propriété n'est plus vraie car la géométrie dépend du contenu en matière et seul le vide est euclidien. À strictement parler, lorsque nous utilisons le terme référentiel, nous sous-entendons toujours un espace vide ou un espace pour lequel la densité de matière est trop faible pour induire une modification significative à la géométrie euclidienne. Dans cet ouvrage, c'est toujours dans ce cadre que nous emploierons le terme référentiel.

1.1.2 Systèmes de coordonnées

Se fixer un référentiel est une étape indispensable pour étudier la nature, mais cela ne suffit pas. Dire par rapport à quoi on fait une mesure c'est bien, encore faut-il maintenant effectuer les mesures proprement dites et affecter des nombres à celles-ci. Pour cela, nous avons d'abord besoin d'une unité de longueur et d'une unité de temps. Chaque axe du référentiel peut ainsi être gradué.

Un *événement* est, par définition, un point de l'espace et du temps. Il repère un phénomène quelconque qui a lieu en un point bien précis de l'espace et en un moment bien précis, par exemple un flash lumineux ou le passage d'une particule. Comme nous le verrons plus loin, la relativité restreinte est avant tout une bonne gestion des événements. L'événement est déterminé sans ambiguïté par 3 nombres (x,y,z) qui donnent sa position par rapport aux 3 axes spatiaux, que nous prenons orthonormés (orthogonaux et normés) par commodité, et un temps t repéré sur l'axe du temps.

Comment fait-on, en pratique, la mesure des coordonnées d'un événement ? Pour la coordonnée temporelle, on utilise une horloge étalonnée suivant l'unité de temps ou une sous-unité. Pour les coordonnées d'espace, on utilise une règle étalonnée aussi suivant l'unité et ses sous-multiples (on supposera que ce sont les mêmes sur

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

chacun des axes). Par la pensée, on peut faire, grâce à cette règle, un découpage régulier de l'unité, repéré par des traits, aussi fins que souhaité, sur chacun des axes d'espace. À partir de ces axes, on construit un maillage de tous les points d'espace qui ont pour coordonnées l'un quelconque des repères sur chacun des axes. On obtient une sorte de « cristal » dont chaque sommet est étiqueté de façon unique par les coordonnées correspondant aux multiples de l'unité ou de ses sous-unités. Enfin, à chaque sommet on affecte une horloge. Le cadran des horloges est gradué par l'unité de temps choisie, et éventuellement des sous-multiples de cette unité. Les horloges, supposées identiques et parfaites, de tous les points du référentiel sont synchronisées (nous préciserons comment synchroniser celles-ci dans la section 2.1.2). Un événement déclenche, par un mécanisme approprié, le blocage de l'horloge sur une graduation et l'allumage du « sommet du cristal » où il a lieu. La mesure consiste à lire l'indication de l'horloge, qui fournit le temps t, et l'examen du sommet allumé fournit les trois coordonnées d'espace (x,y,z). Ces nombres (t,x,y,z), obtenus par projection sur chacun des axes, s'appellent les *coordonnées cartésiennes* de l'événement. On recommence cette opération pour tous les événements qui nous intéressent et, si on veut des mesures encore plus précises, on réduit l'écart du maillage en utilisant une sous-unité plus petite, et on réduit l'écart entre les graduations des horloges. On a représenté sur la figure 1.1 un tel « cristal d'horloges » qui est nécessaire pour définir correctement un événement.

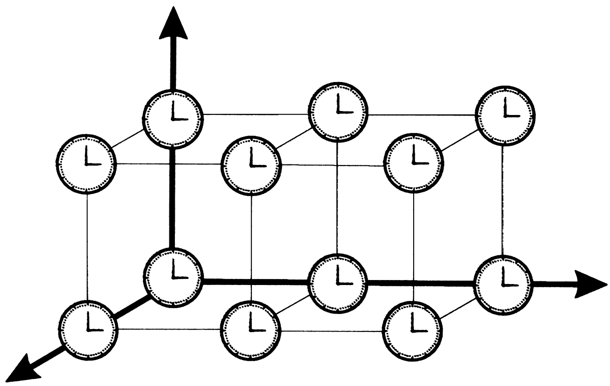

Figure 1.1 – Un cristal d'horloges, toutes synchronisées en tous les points du maillage de l'espace, est nécessaire pour définir les coordonnées des événements.

Cette façon de structurer l'espace et le temps comme un « cristal d'horloges » est une vue idéale qui permet de définir proprement un événement et qui simule la quatrième dimension, relative au temps. D'un point de vue pratique, on ne met évidemment pas une horloge en chaque point étiqueté de l'espace. Pour décrire un phénomène se déroulant dans l'espace et dans le temps, on se borne en général à mettre une horloge au départ de celui-ci, une autre à la fin, puis on interpole tous les points intermédiaires par une loi mathématique adéquate et vraisemblable. Dans la suite de cet ouvrage, il sera très souvent question d'événements, et on sous-entend que ceux-ci peuvent être déterminés de façon précise par l'existence implicite d'un « cristal d'horloges » ou d'un procédé qui lui est équivalent.

Concentrons-nous sur la position dans l'espace. Nous l'avons compris, un point est déterminé par trois nombres : ses coordonnées cartésiennes sur chacun des axes. Dans ce cas précis, ces nombres ont pour dimension une longueur. Mais l'utilisation des coordonnées cartésiennes, bien que très pratique, n'est pas une nécessité. Il nous suffit d'avoir une prescription qui définit un point de l'espace de façon non ambiguë. Pour cela il nous faut 3 nombres (u,v,w) et un procédé permettant de déterminer le point de façon unique. Ce procédé consiste souvent en pratique à définir ces nombres comme fonctions des coordonnées cartésiennes $(u(x,y,z), v(x,y,z),\ w(x,y,z))$, permettant une correspondance univoque. Une fois cette transformation effectuée, on dit qu'on a défini un autre jeu de coordonnées et on appelle ce nouveau jeu les *coordonnées curvilignes*, par opposition aux coordonnées cartésiennes (voir annexe D sur www.dunod.com).

Les étudiants ont souvent tendance à confondre le concept de référentiel et celui de système de coordonnées. Précisons à nouveau la différence. Un référentiel définit un cadre, un contenu dans lequel on effectue des mesures, indépendamment de la façon dont on effectue celles-ci. Un système de coordonnées est un procédé permettant, dans un référentiel donné, de déterminer de façon unique un point de ce référentiel. On peut très bien imaginer travailler avec des coordonnées cartésiennes dans deux référentiels différents (et vous verrez par la suite que nous ne nous en priverons pas !) ; on peut aussi, dans le même référentiel, utiliser des systèmes de coordonnées différents. Les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques sont très utilisés en pratique.

1.1.3 Référentiels d'inertie

Parmi tous les référentiels imaginables, certains vont jouer un rôle incontournable, ce sont les *référentiels d'inertie*, ou *référentiels inertiels*, ou *référentiels galiléens*. Pour comprendre ce point, il convient de remarquer que la vitesse ou la trajectoire d'un point matériel sont des quantités qui dépendent du référentiel. La façon dont les quantités cinématiques se modifient en fonction des perturbations extérieures, nommées forces, fait l'objet de lois. Les lois de la mécanique classique [1] ont été énoncées par Newton, après que Galilée ait grandement préparé le terrain du point de vue conceptuel. La première loi peut être formulée de la façon suivante :

1. Pour des informations détaillées sur la mécanique classique, on peut consulter, par exemple, les ouvrages suivants : le cours de Berkeley (biblio) ; l'ouvrage de H. Goldstein, C. Poole et J. Safko (biblio) ; Philippe Spindel, *Mécanique*, Gordon and Breach Science Publishers, vol. 1 et 2, 2001-2002 ; Claude Gignoux et Bernard Silvestre-Brac, *Mécanique. De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien*, EDP Sciences, 2002.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

Il existe une classe de référentiels particuliers, nommés référentiels galiléens, dans lesquels tout corps conservera son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, en l'absence de force extérieure agissant sur lui.

Il s'agit d'un postulat, mais cautionné par plusieurs siècles d'expériences. De ce postulat même, on conclut que les référentiels galiléens se déduisent les uns des autres par un mouvement rectiligne uniforme. On peut dire qu'il existe une *relation d'équivalence* au sens mathématique du terme entre les référentiels d'inertie, c'est-à-dire une relation qui possède les propriétés suivantes :

– *Réflexivité* : tout référentiel $\mathcal{R}$ est équivalent à lui-même ;

– *Symétrie* : si un référentiel $\mathcal{R}$ est équivalent à un référentiel $\mathcal{R}'$, alors la réciproque est vraie ;

– *Transitivité* : si les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont équivalents et qu'il en est de même pour les référentiels $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}''$, alors les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}''$ sont équivalents.

Nous verrons que ces propriétés sont cohérentes avec la seconde loi. Celle-ci stipule :

Dans un référentiel galiléen, la résultante des forces $\vec{F}$ appliquée à un corps est le produit de sa masse m par son accélération $\vec{\varphi}$

$$\vec{F} = m\,\vec{\varphi}. \tag{1.1}$$

En général l'expression de la force dépend de la position et de la vitesse, et cette seconde loi, aussi nommée principe fondamental de la dynamique, permet de déterminer par calcul l'évolution dans le temps de ce corps matériel. La troisième loi concerne l'égalité des forces d'action et de réaction. Elle suppose une interaction instantanée entre les corps et ne peut s'accommoder de la relativité restreinte. Nous n'en ferons pas usage par la suite, mais nous en reparlerons brièvement dans la section 11.10.

Naïvement, on a l'impression que la seconde loi contient la première puisque si on annule la force, on déduit que la vitesse est constante. En fait il n'en est rien. Si on veut pouvoir énoncer la seconde loi, il faut au préalable dire dans quel référentiel on se place et, pour cela, il faut se baser sur la première loi. On veut énoncer des lois simples. Mais cette simplicité ne peut pas être universelle, et le cadre dans lequel elle s'applique est celui des systèmes dits galiléens.

Présupposer l'existence de référentiels d'inertie est une chose ; avoir la certitude que nous effectuons nos mesures par rapport à un de ceux-ci en est une autre, autrement plus difficile à vérifier. On effectue toujours des mesures avec une certaine précision ; si le référentiel utilisé n'est pas tout à fait galiléen, mais que les corrections apportées de ce fait sont inférieures à la précision de nos mesures, ce n'est pas très gênant, et on peut dire qu'avec une bonne approximation on travaille dans un référentiel galiléen.

Pour la plupart des expériences de la vie courante, un système référentiel lié à la Terre peut être considéré comme galiléen. Mais la Terre tourne sur elle-même et autour du Soleil et, pour des expériences concernant les mouvements célestes, on choisit plutôt le système de Copernic centré sur le Soleil et dont les axes pointent vers des « étoiles fixes ». Mais ces étoiles sont emportées dans un tourbillon autour du centre de la Galaxie et la Galaxie elle-même se déplace par rapport aux galaxies environnantes. La quête d'un vrai référentiel d'inertie n'est donc pas une sinécure ! Dans la section suivante, nous donnons une piste pour sa détermination.

Heureusement, pour mettre au point la théorie, il n'est pas nécessaire de se préoccuper trop de ces « détails pratiques ». On se borne à dire qu'il existe des référentiels d'inertie et qu'on travaille dans leur cadre. C'est ainsi que fonctionne la théorie de la relativité restreinte. Le but de la relativité générale est de se démarquer de cette contrainte et d'établir les lois de la physique dans des référentiels quelconques.

1.1.4 * Le référentiel universel

L'Univers est baigné par un rayonnement de corps noir, le rayonnement cosmique de fond, dont la température absolue est d'environ 2,7 K. Cette radiation électromagnétique, reliquat du big-bang, provient de toutes les directions du ciel. On détecte toutefois une anisotropie qui peut s'interpréter comme un effet Doppler (voir sections 3.7.2 et 9.5.2) dû au déplacement de la Terre dans l'espace [2]. Il semble donc exister un référentiel d'inertie privilégié (plus précisément une classe privilégiée de référentiels) que l'on peut considérer, dans un certain sens, comme au repos par rapport aux grandes structures de l'univers (amas de galaxies) car le rayonnement cosmique de fond y est parfaitement isotrope ; appelons-le « référentiel universel ».

Si on fait l'hypothèse qu'il existe bien un référentiel d'inertie privilégié – le référentiel universel est un bon candidat –, il est possible de développer une théorie « test » différente de la relativité restreinte. Des observations expérimentales sont alors en mesure de trancher en faveur d'une des deux théories. Jusqu'à présent, aucune déviation notable par rapport à la théorie d'Einstein n'a pu être mise en évidence [3].

2. Voir, par exemple, l'ouvrage de Bernard Schutz, *Gravity from the ground up*, Cambridge University Press, 2003, p. 355. L'anisotropie mesurée correspond à une vitesse de déplacement de la Terre d'environ 350 km/s par rapport au référentiel universel.

3. Pour plus d'information, on peut consulter les références suivantes : H. P. Robertson, « Postulate *versus* Observation in the Special Theory of Relativity », *Reviews of Modern Physics*, vol. 21, n° 3, July 1949, p. 378-382 ; Reza Mansouri et Roman U. Sexl, « A Test Theory of Special Relativity: I. Simultaneity and Clock Synchronization », *General Relativity and Gravitation*, vol. 8, n° 7, 1977, p. 497-513 ; *Id.*, « A Test Theory of Special Relativity: II. First Order Tests », *General Relativity and Gravitation*, vol. 8, n° 7, 1977, p. 515-524 ; *Id.*, « A Test Theory of Special Relativity: III. Second-Order Tests », *General Relativity and Gravitation*, vol. 8, n° 10, 1977, p. 809-814 ; G. Saathoff *et al.*, « Improved Test of Time Dilatation in Special Relativity », *Physical Review Letters*, vol. 91, n° 19, 7 November 2003, p. 190403/1-4.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

1.2 Les transformations de Galilée

Comme nous l'avons vu, la mécanique fait jouer un rôle particulier aux systèmes de référence appelés référentiels d'inertie. La figure 1.2 montre les parties spatiales de deux tels référentiels dans une configuration particulière où leurs axes sont parallèles deux à deux et leur mouvement relatif est parallèle à un des axes. Une telle configuration sera fréquemment utilisée par la suite.

Au départ de toute théorie, il y a des postulats. La mécanique classique est basée, entre autres, sur un postulat fondamental appelé postulat de la *relativité galiléenne* :

Les lois de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels d'inertie.

Bien entendu, pour pouvoir effectuer des calculs sur un même phénomène physique dans deux référentiels distincts, il faut se donner des règles qui permettent de passer de l'un à l'autre. En particulier, il faut connaître les règles qui permettent de passer d'un jeu de coordonnées dans un référentiel à celui d'un autre référentiel. Ces règles s'appellent les *équations de transformation*. Celles qui respectent le postulat de la relativité galiléenne s'appellent les *transformations de Galilée*.

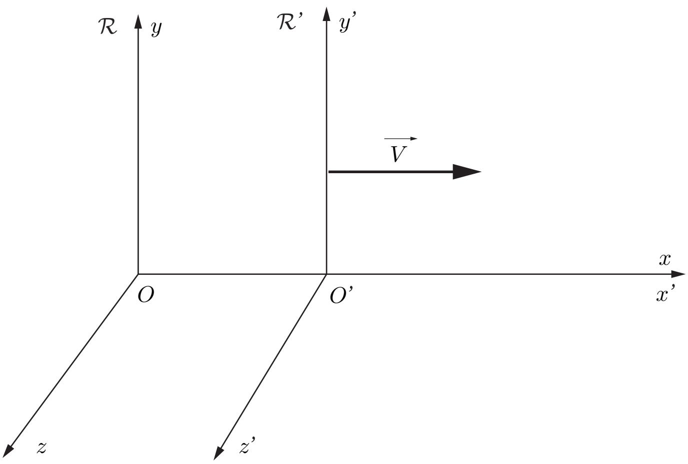

Figure 1.2 – $\vec{V}$ étant une vitesse constante, si $\mathcal{R}$ est un référentiel d'inertie, $\mathcal{R}'$ l'est également.

Deux référentiels d'inertie peuvent être reliés par un décalage dans l'espace et le temps, ou par une rotation spatiale. Nous en reparlerons dans le chapitre 7. Nous allons nous concentrer sur le cas de deux référentiels en mouvement relatif. Considérons un référentiel d'inertie $\mathcal{R}'$ se déplaçant avec une vitesse constante $\vec{V}$ dans un référentiel d'inertie $\mathcal{R}$, de telle manière que les deux systèmes d'axes soient confondus quand les horloges des deux référentiels marquent l'instant 0. Un événement quelconque se produisant à la position $\vec{r}$ et à l'instant t dans $\mathcal{R}$ se produit à la position $\vec{r}'$ et à l'instant t' dans $\mathcal{R}'$. Les équations de transformation entre ces deux référentiels s'écrivent alors

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}\, t', \tag{1.2}$$

$$t = t'. \tag{1.3}$$

Ces relations s'inversent simplement en remplaçant $\vec{V}$ par $-\vec{V}$. Remarquons que, pour ces transformations, le temps est considéré comme absolu : il s'écoule de la même manière pour tous les observateurs, quel que soit leur état de mouvement. Deux événements étant séparés par un intervalle de temps Δt et un intervalle d'espace $\Delta\vec{r}$, les transformations ci-dessus impliquent que $\Delta\vec{r}$ est un invariant si ces deux événements sont simultanés ($\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,'$ si $\Delta t = \Delta t' = 0$).

En dérivant la relation (1.2) par rapport à t, et en tenant compte que $dt = dt'$ en vertu de l'égalité (1.3), on obtient la loi d'addition des vitesses

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}, \tag{1.4}$$

où $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ ($\vec{v}\,' = d\vec{r}\,'/dt'$) est la vitesse d'un objet quelconque dans le référentiel $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}'$). Cela implique qu'une vitesse relative entre deux objets différents est invariante lors d'un changement de référentiel d'inertie ($\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}\,'$).

En dérivant la relation (1.4) par rapport au temps, on trouve immédiatement

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}\,', \tag{1.5}$$

où $\vec{\varphi} = d\vec{v}/dt$ ($\vec{\varphi}\,' = d\vec{v}\,'/dt'$) est l'accélération de l'objet dans le référentiel $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}'$). L'accélération est donc invariante lors d'un changement de référentiel d'inertie.

Vérifions que ces transformations respectent bien le postulat de relativité galiléenne. La relation fondamentale de la dynamique pour une particule de masse m s'écrit

$$\vec{F} = m\,\vec{\varphi}, \tag{1.6}$$

où $\vec{F}$ est le vecteur force qui s'exerce sur cette particule. En mécanique classique, la masse m, appelée plus précisément *masse d'inertie*, est considérée comme un attribut de la particule et ne peut dépendre de son état de mouvement. De plus, on suppose que la force est **indépendante** du référentiel par rapport auquel elle est mesurée. En effet, elle ne peut dépendre que des positions relatives à un instant donné et éventuellement des vitesses relatives des corps avec lesquels interagit la particule considérée. Ces grandeurs relatives sont des quantités invariantes, comme nous venons de le voir. Les considérations ci-dessus font donc que $\vec{F} = \vec{F}\,'$. Avec la relation (1.5), cela donne dans un autre référentiel

$$\vec{F}\,' = m\,\vec{\varphi}\,'. \tag{1.7}$$

Autrement dit, la loi est la même dans les deux référentiels. En fait, une autre manière d'énoncer le postulat de la relativité galiléenne est :

Les expériences de mécanique faites à l'intérieur de référentiels d'inertie ne permettent pas de déceler la vitesse relative de ces référentiels.

La lumière est une onde électromagnétique dont le comportement est régi par les équations de Maxwell. Si la lumière est affectée de la même manière que les particules par la loi de transformation (1.4) (voir section 11.6), alors la vitesse d'un rayon lumineux dépend du mouvement relatif de la source et de l'observateur. Nous allons voir que cela n'est en fait pas observé expérimentalement, en ce qui concerne le module de cette vitesse.

1.3 Michelson, la Terre et l'éther

Avant d'aller plus loin, il convient de parler d'une notion introduite au XIX^e siècle pour expliquer un certain nombre de phénomènes physiques. L'expérience a montré que les ondes mécaniques, comme les ondes sonores par exemple, nécessitent un milieu matériel pour se propager. Les ondes électromagnétiques se propagent également dans certains milieux matériels, mais elles possèdent en outre la propriété très remarquable de se propager dans le vide. Les physiciens du XIX^e siècle, et en particulier Fresnel, n'admettaient pas l'idée d'une propagation sans support matériel. Ils imaginèrent donc un milieu hypothétique baignant tout l'univers, qu'ils baptisèrent *éther*, et dont les vibrations assuraient la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide [4]. La lumière ne devait alors se propager avec une vitesse bien définie c, prédite par la théorie électromagnétique, que dans les milieux au repos par rapport à l'éther [5]. Remarquons que l'éther devait posséder des propriétés contradictoires : il ne devait offrir aucune résistance aux déplacements planétaires, mais pour transmettre des ondes transversales comme la lumière, il devait être pratiquement incompressible.

Vers 1880, les physiciens, pour qui l'éther restait le substrat indispensable à la propagation des rayons lumineux, vont imaginer un certain nombre d'expériences pour mettre en évidence son existence. Telle est l'origine de l'expérience, restée célèbre, de Michelson en 1881, renouvelée en 1887 par Michelson et Morley, et ultérieurement de nombreuses fois avec une précision sans cesse accrue.

Partant du principe que la Terre est en mouvement dans l'éther et que la vitesse de la lumière est constante par rapport à l'éther, Michelson suppose que la mesure de la vitesse de la lumière doit donner des résultats différents suivant l'orientation de la vitesse de la Terre par rapport à l'éther. L'idée est alors d'essayer de mettre en évidence ces variations en faisant intervenir des phénomènes d'interférence lumineuse dont on connaît l'intérêt en métrologie lorsqu'on veut réaliser des mesures fines.

---

4. L'idée qu'un « fluide » pouvait baigner tout l'univers fut introduite dès l'Antiquité. Aux « quatre éléments » (eau, air, terre et feu) supposés former le monde sublunaire ou monde terrestre, introduits par Empédocle et commentés par Platon, Aristote proposa d'ajouter un cinquième élément, l'éther, constituant inaltérable du monde céleste.

5. Autrement dit, les équations de propagation de la lumière ne devaient prendre exactement la forme (11.14) que dans ces milieux (voir section 11.2).

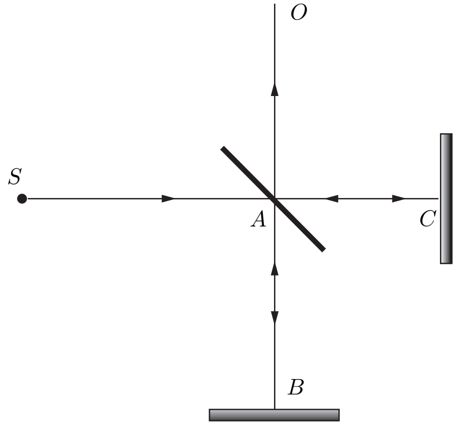

Figure 1.3 – Schéma de principe de l'expérience de Michelson et Morley.

La figure 1.3 montre le schéma de principe de l'expérience [6]. Un faisceau lumineux issu d'une source S est divisé en deux par une lame semi-transparente faisant un angle de 45° par rapport à ce faisceau. Un des rayons décrit la trajectoire aller retour AC entre la lame en A et un miroir en C, avant d'être réfléchi par la lame vers l'observateur placé en O. L'autre rayon parcourt le bras AB entre la lame et un miroir en B, et revient vers l'observateur en traversant la lame. Un tel dispositif est appelé un interféromètre. Pour l'expérimentateur, l'éclairement au point d'observation O dépend de la différence des temps de propagation Δt des deux rayons lumineux issus de S et se recombinant en O. Plus précisément, l'aspect interférentiel dépend de la différence de phase $2\pi\nu\Delta t$, où ν est la fréquence du rayonnement. Les trajets SA et AO étant communs pour les deux rayons, Δt ne dépend que des temps de parcours $t(AB)$ et $t(AC)$ des rayons dans les bras AB et AC. Nous allons maintenant calculer la quantité $t(AB) - t(AC)$ pour deux configurations différentes de l'interféromètre.

Supposons maintenant que l'ensemble soit en mouvement par rapport à l'éther dans lequel la lumière se propage, selon l'hypothèse de l'époque, avec la vitesse c. Considérons, par exemple, qu'au moment de l'expérience, la vitesse d'entraînement du système, $\vec{V}$, qui est en gros la vitesse de la Terre par rapport à l'éther, soit parallèle [7] à la direction du bras AB. Posons $l_1 = AB$ et $l_2 = AC$. Calculons le temps que met un rayon lumineux pour parcourir le bras AB pour un trajet aller retour. Pour évaluer ce temps, t_1, plaçons-nous dans un référentiel lié à la Terre. Les vitesses s'ajoutant algébriquement, on aurait

6. Les difficultés expérimentales inhérentes à sa réalisation sont présentées dans un article de R. S. Shankland, « The Michelson-Morley experiment », *Scientific American*, vol. 211, 1964, p. 107-114.

7. Si ce n'est pas le cas, il faut introduire des variables angulaires, ce qui complique les calculs sans changer la conclusion.

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

$$t(AB) = t_1 = \frac{l_1}{c - V} + \frac{l_1}{c + V}. \tag{1.8}$$

Dans le bras AC, le temps t_2 pour un trajet aller retour se calcule plus aisément dans un référentiel lié à l'éther (voir figure 1.4). Le rayon lumineux parcourt dans ce cas les deux bras d'un triangle isocèle (de base $2h$) avec la vitesse c. On obtient

$$t(AC) = t_2 = \frac{1}{c} 2\sqrt{l_2^2 + h^2} \quad \text{avec} \quad V\,t_2 = 2h, \tag{1.9}$$

puisque la distance $2h$ est parcourue en une durée t_2 à la vitesse V. En éliminant h, on tire aisément

$$t(AC) = t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - V^2}}. \tag{1.10}$$

Les franges d'interférence observées pour cette configuration dépendent donc de la différence des temps de propagation $t(AB) - t(AC) = t_1 - t_2$.

On peut maintenant échanger le rôle des deux bras de l'interféromètre en faisant pivoter l'ensemble de l'appareil d'un quart de tour. On obtient alors

$$t(AB) = t_3 = \frac{2l_1}{\sqrt{c^2 - V^2}} \quad \text{et} \quad t(AC) = t_4 = \frac{l_2}{c + V} + \frac{l_2}{c - V}. \tag{1.11}$$

La différence des temps de propagation $t(AB) - t(AC) = t_3 - t_4$ contrôle maintenant l'aspect des franges d'interférence.

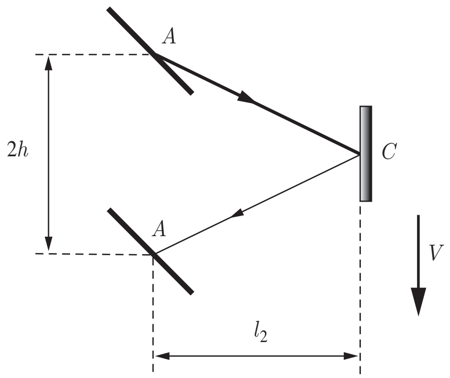

Figure 1.4 – Trajet du rayon lumineux dans le bras AC de l'interféromètre de Michelson et Morley pour le référentiel lié à l'éther. La flèche notée V montre le sens de déplacement de l'interféromètre par rapport à l'éther.

La différence ΔT des différences de temps de propagation des rayons lumineux dans les deux configurations de l'interféromètre est donnée par

$$\Delta T = (t_1 - t_2) - (t_3 - t_4) \approx (l_1 + l_2)\frac{V^2}{c^3}, \tag{1.12}$$

où on utilise le fait que $V \ll c$ pour faire un calcul approché. En effet, la vitesse d'entraînement du référentiel dans l'éther étant supposée proche de la vitesse de la Terre autour du Soleil, c'est-à-dire 30 km/s, on a $V/c \approx 10^{-4}$. Après rotation du dispositif expérimental, on s'attend donc à observer une variation de la différence de phase égale à

$$\Delta\phi = 2\pi\nu\Delta T \approx \frac{2\pi}{\lambda}(l_1 + l_2)\frac{V^2}{c^2}, \tag{1.13}$$

où $\lambda = c/\nu$ est la longueur d'onde la lumière utilisée. Cela se traduit par un défilement de $n = \Delta\phi/(2\pi)$ franges d'interférence, puisqu'un déplacement d'une frange correspond à un retard de phase égal à 2π. L'expérience, répétée plusieurs fois (en particulier à des époques différentes de l'année : l'orientation de la vitesse de la Terre change tout au long de l'année dans un référentiel d'inertie lié au Soleil), a toujours donné le même résultat : $\Delta T = 0$! Aucun effet attribuable au mouvement orbital de la Terre, ni au mouvement du système solaire par rapport au rayonnement cosmique de fond (voir section 1.1.4), n'a jamais pu être observé [8]. Nous verrons dans la section suivante comment interpréter correctement ces résultats.

1.4 Les postulats d'Einstein

Le désaccord est flagrant entre observation et calcul théorique dans l'expérience de Michelson et Morley. Comment l'expliquer ? L'expression des différences des temps de propagation de la lumière dans cette expérience s'obtient en supposant que la loi galiléenne d'addition des vitesses est valable pour les rayons lumineux. Cette hypothèse de travail est une conséquence directe de la manière dont se transforment les équations de Maxwell, qui régissent le comportement de la lumière, sous l'action des transformations de Galilée. Or, il apparaît que les équations de Maxwell, contrairement aux équations de la mécanique classique, ne sont pas invariantes pour les transformations de Galilée (voir section 11.6).

Comment donc concilier la mécanique classique de Newton, la théorie électromagnétique de Maxwell, la relativité galiléenne et les résultats de l'expérience de Michelson et Morley ? Plusieurs solutions s'offraient aux scientifiques du XIX^{e} siècle :

---

8. Des expériences modernes ont été réalisées avec des masers (T. S. Jaseja, A. Javan, J. Murray et C. H. Townes, « Test of Special Relativity or of the Isotropy of Space by Use of Infrared Masers », *Physical Review*, vol. 133, n° 5A, 2 March 1964, p. A1221-A1225) et des lasers (A. Brillet et J. L. Hall, « Improved Laser Test of the Isotropy of Space », *Physical Review Letters*, vol. 42, n° 9, 26 February 1979, p. 549-552). Signalons qu'il est également possible de tester l'invariance de la vitesse de la lumière en utilisant le GPS (Rainer Müller, « The Ether Wind and the Global Positioning System », *The Physics Teacher*, vol. 38, April 2000, p. 243-246).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

– Admettre que la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell était fausse ;
– Rendre compatibles les postulats de la mécanique classique et de l'électromagnétisme ;
– Admettre que les postulats de la mécanique classique étaient faux.

La première solution est vite apparue inacceptable. Toute une série de belles expériences prouvaient nettement que toutes les prédictions de la théorie de Maxwell se vérifient très bien. La deuxième voie conduit à l'élaboration du concept d'éther, référentiel privilégié servant de support à la propagation des ondes électromagnétiques et seul référentiel où les équations de Maxwell seraient strictement valables. Cependant, toutes les expériences, du type de celle de Michelson et Morley, tentant de mettre en évidence l'existence de l'éther ont échoué.

Finalement c'est la troisième voie qui se révèle être la bonne : reconnaître que la mécanique classique se fonde sur des postulats qui doivent être abandonnés. La chose se fait graduellement, avec des scientifiques comme FitzGerald puis Lorentz et Poincaré, mais c'est Einstein en 1905 (alors âgé de 26 ans) qui fait le pas décisif en postulant le caractère non absolu du temps et de l'espace [9]. Il élabore une nouvelle mécanique qui permet d'expliquer l'ensemble des résultats théoriques et expérimentaux concernant les ondes électromagnétiques. Cette théorie, la *relativité restreinte*, est basée sur deux postulats extrêmement simples. Le premier de ces postulats est l'élargissement à toutes les lois de la physique du principe de relativité.

Premier postulat : tous les référentiels d'inertie sont équivalents ; autrement dit, la formulation mathématique des lois de la physique doit être la même dans tous ces référentiels.

Aucune expérience de physique réalisée dans un référentiel d'inertie ne permet de déceler le mouvement de ce référentiel : il n'existe pas d'état de mouvement absolu ni de vitesse absolue. **Le seul mouvement que l'on puisse observer est le mouvement relatif d'un objet par rapport à un autre**.

Le deuxième postulat érige en principe l'impossibilité de la mesure de la vitesse de la lumière par rapport à un hypothétique référentiel absolu [10].

Deuxième postulat : le module de la vitesse de la lumière dans le vide est indépendant de l'état de mouvement de la source.

9. On peut trouver quelques éléments sur l'histoire de la genèse de la théorie de la relativité restreinte, par exemple, dans le livre de M. Boratav et R. Kerner (biblio), et dans les ouvrages de vulgarisation de Kip S. Thorne (biblio) et de Jean-Paul Auffray, *L'espace-temps*, Flammarion, 1998.

10. Prenons garde au fait que si le module de la vitesse de la lumière est invariant pour un changement de référentiel, il n'en est pas de même de la couleur de la lumière (ou fréquence ou longueur d'onde) qui, elle, dépend du mouvement relatif de l'observateur et de la source. Nous étudierons en détail ce phénomène, connu sous le nom d'effet Doppler, plus loin dans le livre (voir sections 3.7.2 et 9.5.2).

En fait, l'intérêt du deuxième postulat est surtout historique, puisque son énoncé peut se déduire naturellement du premier postulat et de quelques propriétés naturelles de l'espace et du temps. En effet, nous verrons dans la section 6.2 comment il est possible de se passer de l'invariance de la vitesse de la lumière [11] pour construire la théorie d'Einstein. Cependant, dans la suite, nous établirons les équations de transformation de la relativité restreinte en nous basant sur le deuxième postulat. Cette démarche, conforme à l'histoire et basée sur des faits expérimentaux solidement établis, a le mérite d'être d'un abord plus simple que la théorie très générale développée dans la section 6.2.

Ces postulats impliquent que les lois de transformations de Galilée doivent être remplacées par de nouvelles lois de transformations qui, en particulier, laissent invariante l'équation de propagation des ondes électromagnétiques. L'élaboration de ces lois et l'examen de quelques-unes de leurs extraordinaires conséquences font l'objet des chapitres suivants.

Les résultats de l'expérience de Michelson et Morley peuvent être très simplement expliqués par l'application du second postulat. Si la vitesse de la lumière est bien identique pour tous les référentiels d'inertie, les temps de propagation des rayons lumineux le long des deux bras de l'interféromètre sont

$$t_1 = t_3 = \frac{2l_1}{c} \quad \text{et} \quad t_2 = t_4 = \frac{2l_2}{c}, \tag{1.14}$$

ce qui conduit bien à $\Delta T = 0$, c'est-à-dire à aucun défilement de franges.

D'autres expériences, comme celle de Fizeau (dont nous reparlerons dans la section 5.2), qui avaient reçu une interprétation classique peu satisfaisante, n'ont pu être correctement interprétées que dans le cadre de la relativité d'Einstein [12]. Précisons immédiatement que cette théorie a fini par s'imposer à l'époque parce que c'était la seule théorie cohérente expliquant l'**ensemble** des observations et expériences faites jusque-là.

11. Quand on parle de « vitesse de la lumière », il faut toujours comprendre module de la vitesse de la lumière dans le vide, habituellement noté c, à moins que ce ne soit précisé autrement. La vitesse de la lumière dans un matériau transparent peut être inférieure à c et même inférieure à celle d'une particule de matière se déplaçant dans ce milieu.

12. Voir par exemple l'ouvrage de M. Boratav et R. Kerner, chap. 2 (biblio).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

1.5 La relativité du temps

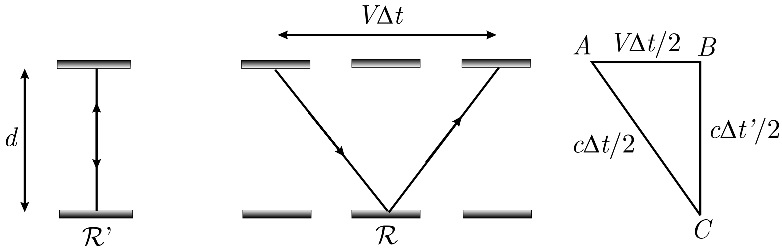

Figure 1.5 – Trajets aller retour du photon dans l'horloge à photons pour les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Une conséquence immédiate et *a priori* surprenante des postulats d'Einstein est qu'il n'existe pas de temps absolu, et que l'écoulement du temps dépend de l'état de mouvement de l'observateur par rapport à un système de référence donné. Il est possible d'illustrer simplement ce phénomène en construisant « mentalement » une horloge battant la mesure du temps au moyen de photons. Imaginons deux miroirs parallèles se faisant face – l'un positionné au-dessus de l'autre – séparés par une distance d. Un observateur du référentiel propre $\mathcal{R}'$ de ces deux miroirs observe un photon faisant des allers retours perpendiculaires à ces deux miroirs, l'aller définissant le « tic » et le retour le « tac » de l'horloge (voir figure 1.5). Ce système est appelé « horloge à photons » (ou horloge d'Einstein-Langevin, ou horloge de Feynman). Le temps aller retour d'un photon est évidemment

$$\Delta t' = 2\frac{d}{c}, \tag{1.15}$$

où c est la vitesse de la lumière.

Supposons maintenant que le référentiel $\mathcal{R}'$ soit animé d'une vitesse $\vec{V}$ parallèle aux miroirs par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$. Un observateur de $\mathcal{R}$ ne constatera pas que le photon fait des allers retours perpendiculaires aux miroirs. Il va observer un trajet oblique comme indiqué sur la figure 1.5.

Un aller retour dans le référentiel $\mathcal{R}$ prend évidemment plus de temps que dans le référentiel $\mathcal{R}'$ car le photon se déplace toujours à la même vitesse c mais doit parcourir une distance plus grande. Appelons Δt le temps d'un aller retour dans le référentiel $\mathcal{R}$. En examinant la figure 1.5 et en utilisant simplement le théorème de Pythagore ($|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$), on trouve par de simples manipulations algébriques

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}. \tag{1.16}$$

Notons que cette équation se réduit bien à $\Delta t = \Delta t'$ quand $V = 0$, c'est-à-dire quand les deux référentiels sont immobiles l'un par rapport à l'autre.

La relation (1.16) est la fameuse formule d'Einstein de *dilatation des temps* qui montre que $\Delta t \geqslant \Delta t'$ et que $\Delta t = \infty$ quand $V = c$. Tout se passe donc comme si l'horloge à photons en mouvement battait la mesure du temps plus lentement qu'une horloge équivalente dans un référentiel stationnaire. Nous verrons, dans les sections 3.2, 3.7 et 8.4, comment interpréter exactement ce phénomène. Lorsque $V > c$, l'équation (1.16) indique que l'intervalle de temps Δt devient imaginaire, ce qui est déjà une indication qu'il est impossible de dépasser la vitesse de la lumière.

Une modification similaire des longueurs (mesurées dans la direction du mouvement) apparaît quand $V \neq 0$. Tandis qu'un observateur au repos par rapport à un objet mesure la longueur de cet objet comme étant ℓ', un observateur en mouvement par rapport à cet objet observera une longueur contractée

$$\ell = \ell' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{1.17}$$

Cet effet est appelé la *contraction des longueurs* ou contraction de Lorentz, ou encore contraction de Lorentz-FitzGerald, puisque le mathématicien FitzGerald avait avancé la même idée quelques années avant Lorentz. L'utilisation de l'horloge à photons permet de démontrer facilement cette relation (voir aussi exercice 4.2).

Notons que pour faire nos calculs avec l'horloge à photons, nous avons supposé que la distance d entre les deux miroirs était la même pour les observateurs des référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Cette hypothèse est correcte car le trajet des photons est perpendiculaire à la direction de la vitesse relative entre les deux référentiels. Cette invariance des dimensions transversales sera discutée plus loin (voir sections 4.2 et 6.2). Le phénomène de dilatation du temps est présenté ici de façon intuitive, simple et pédagogique grâce à l'horloge à photons. Il sera démontré de façon plus rigoureuse dans le chapitre 3.

Le ralentissement du temps ne devient perceptible que pour des vitesses proches de celle de la lumière. Le tableau 1.1 illustre cet effet. Par exemple, une horloge voyageant dans l'espace à 99,99 % de la vitesse de la lumière par rapport à la Terre enregistrera le passage d'un an entre deux événéments tandis que presque 71 ans s'écouleront sur Terre entre ces événéments.

Une objection possible à cette analyse est qu'elle a été faite pour une horloge particulière. Comment savons-nous qu'une autre horloge (utilisant un pendule et des roues dentées par exemple) ne sera pas affectée différemment par le mouvement ? La réponse vient de la relativité elle-même qui nous dit qu'il n'est pas possible de déceler un mouvement absolu. Si deux horloges se comportaient différemment, alors cette différence pourrait être utilisée comme détecteur de mouvement. Cela étant impossible, toutes les horloges, quel que soit leur méca-

Tableau 1.1 – Facteur de dilatation des temps.

$\dfrac{V}{c}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$
0,1	1,005
0,2	1,021
0,5	1,155
0,7	1,400
0,9	2,294
0,99	7,089
0,999	22,366
0,999 9	70,712

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

nisme interne (incluant les horloges biologiques complexes de nos organismes), doivent répondre au mouvement précisément de la même manière. Insistons sur le fait qu'il n'y a rien de mystérieux dans le comportement des horloges. S'il y a quelque chose de mystérieux dans la relativité restreinte, c'est l'invariance de la vitesse de la lumière. Une fois ce phénomène établi, tout le reste suit naturellement. Notons que si on avait supposé valable la loi galiléenne d'addition des vitesses, alors le phénomène de dilatation des temps n'existerait pas (voir exercice 1.1).

1.6 La vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière dans le vide est la constante fondamentale de la théorie de la relativité restreinte, comme l'est la constante de Planck pour la mécanique quantique ou la constante de la gravitation universelle pour la relativité générale. La première tentative de mesure de cette vitesse dont nous ayons connaissance a été faite par Galilée au XVI^{e} siècle. Bien que son expérience n'ait pas conduit à un résultat concluant, une autre de ses découvertes, celle des satellites de Jupiter, fournit les bases pour la première mesure réelle de la vitesse de la lumière. En 1676, l'astronome danois Roemer déduisit, en observant les éclipses de Io (satellite galiléen le plus interne de Jupiter), que la lumière met environ 11 minutes pour franchir le rayon de l'orbite terrestre. Avec les données de l'époque, la vitesse de la lumière fut évaluée à environ 215 000 km/s, ce qui est le bon ordre de grandeur. En 1849, le physicien français Fizeau construisit un dispositif dont la partie principale consistait en une roue dentée tournant à grande vitesse et un miroir situé sur l'axe de cette roue qui renvoie un faisceau de lumière vers la roue. Grâce à cet appareil, Fizeau calcula une vitesse de 315 000 km/s, résultat comparable à celui de Roemer[13].

Longtemps mesurée avec une précision de plus en plus grande, la vitesse de la lumière dans le vide est désormais **fixée exactement** par convention[14] :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

Cela entraîne une nouvelle définition du mètre qui devient :

> Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde.

Précisons qu'en 1967 la définition suivante de la seconde a été adoptée :

> La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

---

13. Pour obtenir plus de détails sur ces expériences, on peut consulter, par exemple, le cours de Berkeley, chap. 10 (biblio). Voir également l'article de Albert Van Helden, « Roemer's speed of light », *Journal for the History of Astronomy*, vol. 14, 1983, p. 137-141.

14. Harry E. Bates, « Resource Letter RMSL-1: Recent measurements of the speed of light and the redefinition of the meter », *American Journal of Physics*, vol. 56, n° 8, August 1988, p. 682-687.

L'erreur relative faite en assimilant la vitesse de la lumière à 300 000 km/s est inférieure à 0,1 %.

1.7 Avant d'aller plus loin

La relativité restreinte admet l'équivalence de tous les référentiels d'inertie pour la formulation des lois physiques. Cela implique qu'il est impossible de mettre en évidence un mouvement rectiligne uniforme par des expériences internes, c'est-à-dire des expériences menées sans se rapporter à d'autres référentiels que son référentiel propre. Ce n'est manifestement pas le cas pour les mouvements non uniformes puisqu'une accélération peut être mesurée par une expérience interne. Alors que la vitesse est une grandeur relative pour un observateur, l'accélération est donc une grandeur absolue. Il ne faudrait pas croire pour autant qu'il est impossible, dans ce formalisme, de traiter le cas de référentiels en mouvement accéléré (voir section 8.8 et chapitre 13). En fait, des contradictions apparaissent lorsque l'on essaie de décrire le comportement d'objets soumis à un champ de gravitation dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte. Les effets de la gravitation, comme par exemple la variation du taux d'écoulement du temps avec l'altitude et l'universalité de son action, peuvent s'interpréter par une modification de la géométrie de l'espace-temps. On dit que ce dernier est *courbe*. Sa courbure (dans l'espace et le temps), qui dépend de la distribution des masses et de l'énergie, modifie le taux d'écoulement du temps et altère les trajectoires des objets. Or, cette structure courbe est incompatible avec l'espace-temps *plat* de la relativité restreinte dont les propriétés géométriques ne peuvent dépendre de l'endroit ou du moment[15] (voir chapitres 6 et 8). L'introduction des forces de gravité dans le formalisme d'Einstein ne peut se faire qu'au prix d'une refonte de la relativité restreinte en une autre théorie, la relativité générale. La relativité restreinte décrit en fait un univers idéalisé dépourvu de gravitation. C'est en ce sens qu'elle est restreinte.

Le principe de relativité restreinte peut être considéré comme un méta-principe en ce sens qu'il n'est pas lui-même une loi de la physique mais plutôt un schéma auquel doit obéir toute loi de la physique. Ce principe doit être la pierre angulaire de toute nouvelle théorie proposée. Si une nouvelle loi est bien identique dans tous les référentiels d'inertie, alors elle a une chance de décrire une partie du comportement de l'univers. Si elle ne respecte pas ce principe, alors elle doit être rejetée. Toute l'expérience accumulée depuis 1905 suggère que la relativité restreinte d'Einstein doit effectivement être érigée en « principe gouverneur » des lois de la physique.

Peu après la publication des travaux d'Einstein, la relativité restreinte rencontra une vive opposition de la part de nombreux physiciens. La controverse finit par s'éteindre dans les années 30, quand la technologie devint suffisamment avancée pour permettre les premières vérifications expérimentales des prédictions de la théorie. Aujourd'hui, il n'y a plus de place pour le doute : le comportement des par-

15. Voir, par exemple, l'ouvrage de C. W. Misner, K. S. Thorne et J. A. Wheeler (biblio).

© Dunod. Toute reproduction non autorisée est un délit.

ticules se déplaçant à des vitesses proches de celle de la lumière dans les accélérateurs est en parfait accord avec les lois de la relativité restreinte d'Einstein.

Le succès de la relativité restreinte ne signifie pas que nous devons abandonner la mécanique classique. Les lois de Newton sont parfaitement applicables dans la vie de tous les jours, dans la plupart des disciplines scientifiques et dans presque toute la technologie (voir section 5.3 pour une exeption). On ne doit pas se préoccuper du phénomène de dilatation des temps pour planifier un voyage en avion, ni prendre en compte le phénomène de contraction des longueurs dans la conception d'un véhicule. Les prédictions de la théorie d'Einstein et de la théorie de Newton sont presque identiques pour les phénomènes dont les vitesses caractéristiques sont petites par rapport à celle de la lumière. Elles ne commencent à diverger fortement que lorsque les vitesses mises en jeu sont proches de la vitesse de la lumière.

Exercices

Les réponses à ces exercices sont données à la page 284.

1.1 L'horloge à photons galiléenne

Montrer que si la loi galiléenne d'addition des vitesses est correcte, alors l'expérience de l'horloge à photons décrite dans la section 1.5 n'implique pas le phénomène de dilatation des temps.

1.2 Utilisation d'horloges atomiques dans les avions

Une vérification possible de la théorie de la relativité restreinte consiste à mesurer explicitement le phénomène de dilatation du temps. Pour ce faire, on embarque dans un avion de ligne volant à la vitesse constante de 800 km/h une horloge atomique de précision ; on laisse au sol une horloge atomique identique qui sert de témoin. Il suffit de comparer les temps (c'est plus facile à dire qu'à faire !) des deux horloges à l'issue d'un voyage commencé au temps $t = 0$ sur chacune des horloges.

(a) Quelle doit être la précision minimale des horloges pour mettre en évidence le phénomène de dilatation des temps ?

(b) Sur une telle horloge, quel serait l'écart maximum mesuré (par rapport à une horloge infiniment précise) sur une durée d'une année ?

1.3 Transformation générale de Galilée

Une transformation générale de Galilée entre deux référentiels d'inertie $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ est donnée par

$$t = t' + t_0, \qquad (\star)$$
$$\vec{r} = \vec{V}t' + T\vec{r}\,' + \vec{r}_0, \qquad (\star\star)$$

où $\vec{V}$ est une vitesse constante, T une matrice de rotation ($T^{-1} = \tilde{T}$) dont les élé-