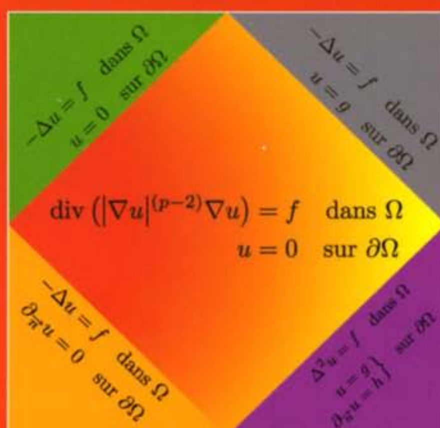
SAVOIRS ACTUELS

MATHÉMATIQUES

ESPACES FONCTIONNELS

UTILISATION DANS LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES



FRANÇOISE et GILBERT DEMENGEL

EDP SCIENCES

CNRS ÉDITIONS

Françoise Demengel et Gilbert Demengel

Espaces fonctionnels

Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles

SAVOIRS ACTUELS

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

F. Demengel
Département de Mathématiques,
Université de Cergy-Pontoise/Saint-Martin, 2 avenue Adolphe Chauvin,
95302 Cergy-Pontoise Cedex.
E-mail : Francoise.Demengel@math.u-cergy.fr

G. Demengel
74 rue Dunois, 75646 Paris Cedex 13.
E-mail : gilbert.demengel@orange.fr

ISBN EDP Sciences 978-2-86883-996-1

ISBN CNRS Éditions 978-2-271-06581-0

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage a pour objectif de présenter un outil de travail pour les étudiants orientés vers l'étude des équations aux dérivées partielles, aussi bien ceux de mastère en mathématiques pures ou appliquées que ceux qui abordent une thèse dans ce domaine. Il rassemble des résultats d'analyse fonctionnelle qui permettent de comprendre la nature et les propriétés des fonctions intervenant dans ces équations, ainsi que les contraintes auxquelles on les soumet pour que ces fonctions soient qualifiées de solutions. Le livre présente des méthodes modernes de résolution pour une classe de ces problèmes et interprète les solutions obtenues en étudiant leur régularité.

Rappelons que le domaine dans lequel on envisage une équation aux dérivées partielles est un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$. Cette équation est une relation que doit vérifier sur Ω la fonction inconnue u et ses dérivées partielles (*cf.* le préambule qui suit). En outre, on impose à cette fonction u et éventuellement à certaines de ses dérivées (voir dans le préambule les problèmes de Dirichlet et de Neumann), d'être égales à des fonctions données sur la frontière $\partial\Omega$ de l'ouvert considéré : ces relations sont appelées *conditions au bord.*

La recherche d'une telle fonction fait l'objet de ce qui est appelé *un problème aux limites* dont la Physique fournit de nombreuses illustrations.

Si on considère les dérivations au sens habituel à l'intérieur de l'ouvert, l'analyse classique s'avère insuffisante pour la résolution de tels problèmes et cette lacune est confirmée par les résultats expérimentaux. En effet, ceux-ci présentent parfois pour *solutions* des fonctions dont les *irrégularités* excluent leur appartenance à des espaces de fonctions dérivables au sens classique. En outre la Physique fournit des exemples où le second membre f de l'équation donnée admet des discontinuités.

Considérons l'exemple simple, dans $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = f,$$

où f est discontinue au point $t = 0$. Alors, une solution éventuelle ne peut être de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On peut cependant chercher une solution de classe C^1 ayant une dérivée y'' presque partout, ou encore une dérivée y'' qui est une dérivée de la fonction y' au sens des distributions. En supposant que f soit encore moins régulière, mais qu'elle puisse cependant être considérée comme une distribution notée $[f]$, on est ainsi amené à chercher des solutions qui sont des distributions $[u]$, ce qui veut dire qu'alors, pour toute fonction φ indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}$ à support compact, on a $\langle [u], \varphi'' - \varphi' + \varphi \rangle = \langle [f], \varphi \rangle$. Ces solutions, que l'on peut envisager, même lorsque f est régulière, sont dites aussi des solutions faibles de l'équation.

Tout cela suggère, en substituant à la dérivabilité habituelle la dérivabilité au sens des distributions, le concept de solution faible pour les EDP générales et conduit à l'étude de certains espaces de fonctions dont les dérivées au sens des distributions s'identifient à des fonctions de puissance p-ièmes sommables. Apparaissent ainsi les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ qui ont la propriété d'être des espaces normés complets, auxquels s'appliquent donc les théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle.

Dans le cas où des conditions au bord sont à satisfaire, les fonctions de ces espaces n'étant définies que dans l'ouvert, il apparaît également la nécessité de les prolonger à la frontière de Ω. L'existence de tels prolongements dépendant a priori de la régularité de cette frontière, on étudie plus particulièrement l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ quand l'ouvert Ω admet pour frontière une variété différentiable ou différentiable par morceaux. Cela permet, pour les fonctions de ces espaces, d'interpréter, en accord avec la Physique, les conditions au bord dans les équations proposées.

Ainsi, dans de nombreuses situations, la grande souplesse de la dérivation au sens des distributions amène à énoncer les problèmes aux limites sous des formes équivalentes, plus favorables à l'établissement de théorèmes d'existence et d'unicité.

Bien entendu, tous les résultats obtenus réclament des préliminaires. Ils concernent les espaces fonctionnels utilisables, tout particulièrement les espaces normés, la complétude, les densités, la généralisation de la notion de fonction et l'intégration. C'est l'objet du chapitre 1.

Analyse du contenu du livre

• Le chapitre 1 s'intitule *Rappels de topologie et d'analyse fonctionnelle.* On y rappelle d'abord la définition des espaces vectoriels topologiques, parmi eux l'exemple important des espaces normés, surtout des espaces de Banach, et les théorèmes de Baire, de l'image ouverte, de Banach-Steinhaus, de Hahn-Banach sont énoncés. La notion d'application linéaire continue y précède l'introduction du dual topologique d'un espace normé. Pour faire apparaître les différents sens usuels des convergences concernant les suites de fonctions, sens moins strict que celui par exemple de la convergence uniforme, on définit les topologies faibles sur un espace et sur son dual. On définit aussi les espaces réflexifs, en particulier les espaces de Hilbert et les espaces uniformément convexes dont de nombreux exemples au cours du livre exploitent les propriétés. Une étude de l'espace des fonctions continues sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ précède le rappel des définitions des espaces de distributions, de leur topologie, des opérations que l'on y définit, ainsi que les propriétés de convergence des suites. Le chapitre se termine par l'étude des espaces $L^p(\Omega)$, de leur complétude, de leur réflexivité, de la densité des fonctions régulières.

Cette dernière partie du chapitre constitue ainsi une introduction aux espaces de Sobolev qui font l'objet des chapitres suivants.

• Le chapitre 2 concerne les *espaces de Sobolev*, lesquels fournissent un cadre fonctionnel convenable pour la plupart des problèmes aux limites elliptiques (*cf.* préambule) de la Physique. Une partie importante de ce chapitre est réservée aux théorèmes d'injection de Sobolev. On y présente d'abord la notion de dérivation des fonctions au sens faible (ou généralisé) qui est, en fait, la dérivation au sens des distributions. À l'aide de l'intervention des espaces L^p, cela permet de définir les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. Les conséquences des propriétés de $L^p(\Omega)$ fournissent des résultats de densité des fonctions régulières dans les espaces $W^{m,p}(\Omega)$. Le théorème le plus important de ce chapitre est le théorème d'injection de Sobolev qui précise l'appartenance des éléments de $W^{m,p}(\Omega)$ à des espaces $L^q(\Omega)$, avec $q > p$, voire à des espaces de fonctions continues lipschitziennes ou höldériennes. Certaines de ces injections sont compactes. Ces résultats de compacité — valables pour des ouverts bornés — constituent un argument clef pour montrer l'existence de solutions pour des problèmes de minimisation coercifs (*cf.* chapitre 5). La deuxième partie du chapitre étudie la possibilité de prolonger les fonctions de $W^{m,p}(\Omega)$ en des éléments de $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, ce qui suppose une régularité sur la frontière $\partial\Omega$. À cette occasion, on définit les ouverts lipschitziens et les ouverts de classe $\mathcal{C}^m$. Ce chapitre se termine par un théorème de trace qui permet sur de tels ouverts de prolonger $u \in W^{1,p}(\Omega)$ sur la frontière en une fonction de $L^p(\partial\Omega)$, ce qui généralise la notion de restriction à $\partial\Omega$ pour des fonctions qui ne sont définies en principe que dans l'ouvert Ω. Ce théorème apparaît donc très utile dans la formulation des conditions au bord d'un problème aux limites.

• Le chapitre 3 se consacre à l'étude de l'image de cette application trace définie sur $W^{1,p}(\Omega)$ lorsque l'ouvert est régulier. Dans le livre, c'est un premier exemple d'un espace de Sobolev fractionnaire $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$.

Le chapitre contient également la mise en place de formules de Green et de théorèmes d'injection. Notons d'ailleurs que ceux-ci peuvent se déduire des résultats d'injection sur les espaces de Sobolev d'exposants entiers dont ils proviennent.

• Le chapitre 4 traîte des espaces fractionnaires plus généraux $W^{s,p}(\Omega)$ (s réel non entier). On y montre des résultats d'injection et d'injection compacte.

• Au chapitre 5, on utilise tous les ingrédients théoriques déjà présentés pour montrer l'existence de solutions à des EDP elliptiques. Deux exceptions cependant, le problème des surfaces minimales et le problème de l'élasticité linéaire dans le cas des petites déformations. Pour le premier, les justifications théoriques, dans le cadre des fonctions de mesures, sont présentées dans le chapitre suivant. Le second exige la connaissance des inégalités de Korn, lesquelles font l'objet du thème étudié dans le chapitre 7. Dans beaucoup de situations, les théorèmes d'existence concernant ces EDP elliptiques s'obtiennent en formulant les problèmes aux limites sous une forme variationnelle. Les solutions apparaissent alors comme assurant la minimisation d'une fonctionnelle convexe et coercive. On étudie ensuite la régularité des solutions de certains parmi ces problèmes, en utilisant par exemple des méthodes d'approximation de la dérivée par des différences finies, ou des méthodes d'estimation a priori. On termine le chapitre par des propriétés qualitatives de ces EDP, à savoir le principe du maximum, dans sa forme faible puis un principe du maximum fort.

• Dans le chapitre 6, on étudie des espaces apparentés à ceux de Sobolev et notamment l'espace des distributions, dont le tenseur des dérivées, lequel est symétrique, encore appelé *tenseur des déformations*, est, pour $p \in [1, \infty[$, dans $L^p(\Omega)$. Le cas $p = 1$ ainsi que celui des espaces dont la déformation est une mesure bornée sont aussi étudiés. On donne notamment des théorèmes d'injection analogues à ceux des espaces de Sobolev classiques, ainsi que des résultats d'existence d'une trace sur le bord lorsque l'ouvert est assez régulier. Enfin, une section est réservée à l'étude des fonctions de mesure.

• Le chapitre 7 propose au lecteur, en se plaçant dans le cadre de l'analyse harmonique, un itinéraire aboutissant à une preuve des inégalités de Korn dans $W^{1,p}$.

• L'ouvrage se termine par un appendice concernant la régularité des solutions des problèmes de p-laplacien. On y établit, en complément du chapitre 5, des résultats plus techniques, auxquels on parvient par des méthodes d'estimation a priori.

Organisation du livre

Chacun des chapitres est suivi d'une série d'exercices. Des indications sont données, dans la majorité des cas, pour leur solution. Le niveau de ces exercices est variable. Pour certains d'entre eux, affectés du symbole [$*$], il s'agit de précisions apportées à un résultat donné au cours du chapitre, d'une illustration de ce résultat par une application où des calculs explicites peuvent être proposés, ou encore d'une autre démonstration d'un tel résultat. Pour d'autres, affectés du symbole [$**$], il s'agit, dans le cadre de l'ouvrage, d'apporter des compléments sur un thème donné. Dans certains cas, ces thèmes d'étude sont présentés en dimension $N = 1$ ou $N = 2$, cas dans lesquels on peut mieux mettre en évidence la nature des problèmes posés et la spécificité des méthodes envisagées. Dans ces petites dimensions, ces méthodes peuvent aussi conduire à des calculs explicites, pouvant se révéler favorables à une meilleure compréhension des notions étudiées.

PRÉAMBULE SUR L'ELLIPTICITÉ

Définitions générales

Les définitions peuvent être données pour des fonctions à valeurs complexes, mais, dans ce qui suit, elles concernent seulement les fonctions à valeurs réelles.

Définition 0.1. Un opérateur différentiel à N variables et de degré m est une application $\mathcal{A}$ qui associe à toute fonction f définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ et dérivable jusqu'au rang m, une autre fonction $\mathcal{A}f$, définie sur Ω, au moyen d'une fonction F selon la formule :

$$\mathcal{A}f(x) = F\Big(f(x), \partial_i f(x), \dots, \partial^m_{x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}} f(x), x\Big).$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est dit *linéaire* si la fonction F est un polynôme du premier degré par rapport à chacune des dérivées D^α où α, ordre de la dérivation est un N-uplet d'entiers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ de somme $|\alpha| = \sum_1^N \alpha_i \leqslant m$; autrement dit si :

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha(x)(D^\alpha f)(x) + c_0'(x),$$

où les fonctions c_α et c_0' sont appelés les coefficients de l'opérateur $\mathcal{A}$.

Une équation aux dérivées partielles est une identité $\mathcal{A}f = 0$. Elle est dite *linéaire* si l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire, linéaire homogène si, en outre, $c_0' = 0$. Une équation est dite *quasi-linéaire* si

$$\mathcal{A}f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha(x, u, \dots, D^\beta u) D^\alpha u + c_0'(x, u),$$

où les N-uplets β satisfont à $|\beta| \leqslant |\alpha| - 1$.

Définition 0.2. Une solution de l'équation dans un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ est une fonction f suffisamment dérivable dans Ω' telle que : $\forall x \in \Omega'$, $\mathcal{A}f(x) = 0$.

On s'intéresse surtout dans l'ouvrage aux équations aux dérivées partielles linéaires de degré 2. L'équation s'écrit alors, la fonction $g = -c'_0$ étant appelée le second membre de l'équation :

$$\text{(E)} \qquad \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant N} c_{j,k}(x)\partial^2_{j,k} f(x) + \sum_1^N c_i(x)\partial_i f(x) = g(x).$$

Une équation aux dérivées partielles linéaire et de degré 2 est dite à coefficients constants si les fonctions $c_{j,k}$ et c_i se réduisent à des constantes.

À l'équation linéaire (E), on associe, pour tout $x \in \Omega$, le polynôme, noté $P(E)_x$, du second degré en N indéterminées $\{X_i\}$ dont les coefficients sont ces fonctions, à savoir :

$$P(E)_x(X_1, X_2, \ldots, X_N) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant N} c_{j,k}(x) X_j X_k + \sum_1^N c_i(x) X_i.$$

Soit $P(E)_x^{(2)}$ la partie homogène du second degré de ce polynôme, c'est-à-dire :

$$P(E)_x^{(2)}(X) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant N} c_{j,k}(x) X_j X_k.$$

Définition 0.3. Soit une équation linéaire de degré 2. On considère la matrice carrée $C(x)$ de dimension (N, N) réelle, symétrique, dont les coefficients sont les $c_{j,k}(x)$. La partie homogène précédente s'écrit alors, à l'aide de la matrice colonne $[X]$ des N indéterminées X_j, sous la forme : $P(E)_x^{(2)}(X) = {}^t[X]C(x)[X]$.

On dit que l'EDP est *elliptique au point* $x \in \Omega$ si les valeurs propres de la matrice $C(x)$ (qui sont ici réelles) sont ou bien toutes strictement négatives, ou bien toutes strictement positives.

En changeant le signe des deux membres de l'équation, on se ramène alors à une matrice $C(x)$ qui est définie-positive.

Si on suppose que $x \mapsto C(x)$ est continue sur Ω supposé connexe et si, quel que soit $x \in \Omega$, le noyau de $C(x)$ est réduit à 0, on dit que l'EDP est *elliptique* dans Ω. Cela revient à dire, en changeant éventuellement les signes des membres de l'équation, que cette matrice $C(x)$ est toujours définie-positive.

Soient alors $\lambda_m(x)$ et $\lambda_M(x)$, les valeurs propres minimale et maximale de $C(x)$, avec $\lambda_m(x) > 0$. On dit que l'EDP est *strictement elliptique* s'il existe une constante $\lambda_0 > 0$ telle que : $\forall\, x \in \Omega$, $\lambda_m(x) \geqslant \lambda_0$.

Enfin, elle est dite *uniformément elliptique* dans Ω si, de plus, la fonction $x \mapsto \lambda_M(x)/\lambda_m(x)$ est bornée dans Ω.

Dans le cas où les coefficients $c_{j,k}$ sont des constantes, la stricte ellipticité est équivalente à l'uniforme ellipticité.

Notons que ces définitions ne concernent que la partie homogène de degré 2 de (E). Pour limiter l'importance de la partie homogène de degré 1, on fait quelquefois des hypothèses sur les coefficients $c_i(x)$, par exemple en imposant aux fonctions : $x \mapsto |c_i(x)|/\lambda_m(x)$ d'être bornées dans Ω.

Exemple 0.4. L'équation de degré 2 en une variable $y''+a(x)y'+b(x)y = g(x)$ est une équation elliptique.

Dans le cas de deux variables, une équation du type :

$$a\partial_{xx}^2 f(x,y) + 2b\partial_{xy}^2 f(x,y) + c\partial_{yy}^2 f(x,y) + (\alpha\partial_x f + \beta\partial_y f)(x,y) = g(x,y),$$

où l'on suppose $a > 0$, est elliptique si et seulement si $b^2 - ac < 0$. C'est le cas pour l'opérateur laplacien où $a = c = 1$ et $b = 0$.

Il est évident que, plus généralement, l'opérateur laplacien en N variables, qui s'écrit $\Delta f = \sum_1^N \partial_{x_j^2}^2 f$, est elliptique.

Par contre, les équations qui interviennent en théorie des ondes, à savoir, en dimension 2, l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f,$$

ne sont pas elliptiques.

Pour l'équation à coefficients variables

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y),$$

la condition d'ellipticité n'est vérifiée que dans les ouverts ne rencontrant aucun des deux axes de coordonnées.

Problèmes aux limites

Citons, parmi les problèmes qui sont régis par des EDP, ceux qui sont les plus connus.

Problèmes de Dirichlet. Ces problèmes sont associés à l'opérateur différentiel elliptique constitué par le laplacien. Dans le cas $N = 2$, le problème, classiquement dit *de Dirichlet*, associé à un ouvert borné Ω et à une fonction f continue sur la frontière $\partial\Omega$, consiste à déterminer une fonction harmonique dans Ω qui se prolonge sur la frontière $\partial\Omega$ en la fonction f.

Par extension, ce problème en dimension N s'énonce ainsi :

Trouver une fonction u deux fois dérivable dans l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de frontière Γ telles que, f étant donnée sur Ω et g étant donnée sur Γ, on ait :

$$\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad u|_\Gamma = g.$$

Tout en conservant l'opérateur Δ, la modification des conditions au bord, en faisant intervenir notamment la dérivée normale sur la frontière $\partial\Omega$, conduit à d'autres problèmes.

Problèmes de Neumann. Énonçons-le dans le cas où N est quelconque :

Soit Γ un ouvert borné à bord régulier, par exemple continûment différentiable, sur lequel on est donc en mesure de définir une normale extérieure $\vec{n}$. Soient f une fonction donnée sur Ω et aussi une fonction g donnée sur Γ. Le problème consiste en la recherche d'une fonction u telle que :

$$\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{et, sur } \Gamma : \quad \partial_{\vec{n}} u = g.$$

Problèmes de Newton. On se donne un ouvert Ω, de frontière régulière Γ, une fonction f définie dans Ω, deux autres fonctions g et h définies sur Γ. Le problème consiste en la recherche d'une fonction u telle que :

$$\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{et, sur } \Gamma : \quad \partial_{\vec{n}} u + hu = g.$$

On peut généraliser ces problèmes, sans reprendre les définitions précédentes. Par exemple, en remplaçant l'opérateur Δ par son carré au sens des opérateurs $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, on peut envisager :

Problèmes du bi-laplacien Δ^2. La fonction f étant donnée sur Ω et les fonctions g_1 et g_2 étant données sur Γ, il s'agit de trouver u telle que :

$$\Delta^2 u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{et, sur } \Gamma : \quad u = g_1 \quad \text{et} \quad \partial_{\vec{n}} u = g_2.$$

On définit aussi des problèmes, où les conditions limites s'apparentent à celle du problème de Neumann, pour l'opérateur Δ^2 et des problèmes analogues où on remplace l'opérateur Δ^2 par l'opérateur $u \mapsto \Delta^2 u + u$.

On peut aussi généraliser ces problèmes par l'introduction d'équations *quasi-linéaires.* Donnons quelques exemples :

Problèmes du p-laplacien. C'est un exemple d'équation non linéaire, mais quasi-linéaire. Le réel p étant tel que $1 < p < +\infty$, le problème consiste en la recherche de u telle que :

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Cette équation est *du type divergence* et c'est cette écriture qui est favorable à l'application des méthodes de résolution, mais montrons que c'est bien une équation quasi-linéaire. En développant l'opérateur du premier membre comme la divergence du produit d'un scalaire par un vecteur, on obtient, d'abord formellement (par exemple, lorsque $p > 2$, en évitant les points où le gradient s'annule), l'expression :

$$|\nabla u|^{p-2}\Delta u + \nabla u \cdot \nabla(|\nabla u|^{p-2}).$$

À l'aide ensuite de la formule $\nabla(|\nabla u|^{p-2}) = (p-2)|\nabla u|^{p-4}\nabla u \nabla\nabla u$ et de la définition du gradient d'un vecteur, l'équation s'écrit en effet sous la forme quasi-linéaire :

$$|\nabla u|^{p-4}\Big(|\nabla u|^2\partial_{ii}u + (p-2)\partial_{ij}u\partial_i u\partial_j u\Big) = f.$$

Problème des surfaces minimales. C'est encore une équation quasi-linéaire, qui peut être vue comme une extension du précédent exemple lorsque $p \to 1$. Il s'agit de la recherche de u telle que :

$$\operatorname{div}\Big(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\Big) = f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad u|_{\partial\Omega} = g.$$

On l'explicite sous sa forme quasi-linéaire :

$$\Big((1+|\nabla u|^2)\partial_{ii}u - \partial_{ij}u\partial_i u\partial_j u\Big)(1+|\nabla u|^2)^{-3/2} = f.$$

***Exemple* (d'équation non linéaire et quasi-linéaire).** Un exemple qui pourra être traité par les résultats de cet ouvrage est le suivant, où $p > 1$ et $\lambda > 0$, réel :

$$\Delta u = \lambda|u|^{p-2}u \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Terminons ce préambule en précisant les limites qui sont assignées à cet ouvrage.

Équations non traitées dans le cadre de ce cours

Équations non linéaires qui ne sont pas du type divergence. Dans cette catégorie, figure toute une classe d'équations aux dérivées partielles pour lesquelles le concept de solutions faibles, qui ne peut plus être utilisé, est remplacé par celui de *solutions de viscosité.* C'est le cas pour

$$|\nabla u|^{\alpha}\Delta u = f,$$

où α est un réel > -1. Nous n'abordons pas ce type d'équations dans le cadre de ce cours. Notons cependant que, dans le cas d'équations sous forme divergence, comme ci-dessus pour le p-laplacien, la notion de solutions de viscosité et celle de solutions faibles coïncident grâce à des résultats de régularité. Le lecteur pourra consulter à ce sujet les travaux de Ishii [**26**], Ishii-Lions [**27**], Berestycki Nirenberg Varhadan [**4**], Guy Barles [**3**] et, plus récemment, Busca Esteban Quaas [**8**], Birindelli-Demengel [**5**].

Équations hyperboliques. Elle ne sont pas traitées par les méthodes de ce cours. Notons que les équations hyperboliques ont en général le défaut de présenter « trop » de solutions. Citons l'une des plus connues, l'équation de Burgers : $u\partial_x u = f$. Seules sont considérées comme physiques — parce que stables sous certaines perturbations — les solutions dites *entropiques* au sens de Oleinik. Ce sont aussi les solutions qui sont obtenues comme limites de solutions d'une équation régularisée de manière elliptique. Nous ne traitons pas ces équations ici. Le lecteur pourra consulter les ouvrages de Oleinik, Serre, ... Enfin :

Équations paraboliques. C'est le cas de nombreuses équations d'évolution. Citons les plus connues, parmi celles qui sont linéaires. L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\partial_t u - \Delta u = f$$

avec, non seulement des conditions aux limites, mais aussi des conditions initiales, c'est-à-dire des conditions imposées à la solution u au temps $t = 0$.

Le problème de Korteweg-De Vries est régi par l'équation linéaire sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$:

$$\partial_t u - u_{3x} = f$$

et, en outre, une condition initiale. De telles équations se généralisent d'ailleurs en équations non linéaires, comme celle, par exemple de Korteweg-De Vries-Burgers :

$$u_t - u_{3x} + u\partial_x u = f.$$

CHAPITRE 1

RAPPELS DE TOPOLOGIE ET D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Ce chapitre est consacré à des rappels d'analyse fonctionnelle, principalement dans les espaces de Banach. La plupart des résultats sont seulement énoncés. Mais le lecteur trouvera leurs démonstrations, comme c'est le cas pour le théorème de Hahn-Banach, dans les ouvrages spécialisés d'analyse fonctionnelle.

Les techniques de résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques utilisant très fréquemment la notion de compacité dans les espaces L^p, ou plus généralement la notion d'espace réflexif, quelques pages sont consacrées à la réflexivité ; en particulier, à la compacité, pour la topologie faible, des bornés d'un espace réflexif, et à la relation entre les espaces L^p et $L^{p'}$ où p et p' satisfont aux propriétés : $p \in [1, +\infty]$, $p' \in [1, +\infty]$ et $1/p + 1/p' = 1$. D'autres rappels concernent les distributions.

1.1. Espaces vectoriels topologiques

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les parties de X convexes, ou équilibrées ou absorbantes jouent un rôle important dans la définition d'une topologie sur X compatible avec la structure algébrique de X.

Définition 1.1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $A \subset X$.

- La partie A est dite équilibrée si : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leqslant 1 \Rightarrow \lambda A \subset A$.
- Elle est dite absorbante si :

$$\forall x \in X,\ \exists r > 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad |\lambda| \leqslant r \Longrightarrow \lambda x \in A.$$

***Définition 1.2* (espaces vectoriels topologiques, ou e.v.t. pour simplifier).** Ce sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ est soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$), munis d'une topologie pour laquelle la multiplication externe et l'addition sont continues.