

# ENDOMMAGEMENTS ET RUPTURE DE MATÉRIAUX

Dominique François

  
EDP  
SCIENCES

métallurgie | matériaux

ENDOMMAGEMENTS  
ET RUPTURE  
DE MATÉRIAUX



*ENDOMMAGEMENTS  
ET RUPTURE  
DE MATÉRIAUX*

Dominique François  
École Centrale de Paris



17, avenue du Hoggar  
Parc d'activités de Courtabœuf, BP 112  
91944 Les Ulis Cedex A, France

ISBN : 2-86883- 714-X

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© EDP Sciences 2004



# Table des matières

<b>Avant-propos</b> .....	IX
<b>Notations</b> .....	XIII

---

## **1 • Les endommagements des matériaux**

<b>1. Les matériaux, matière ouvrée</b> .....	1
<b>2. Endommagement : création de nouvelles surfaces</b> .....	2
<b>3. Clivages et glissements</b> .....	4
3.1. <i>Plans de clivage et plans de glissement</i> .....	4
3.2. <i>Fragilité ou ductilité ?</i> .....	9
<b>4. Endommagement par clivage</b> .....	12
<b>5. Endommagement ductile par cavitation</b> .....	13
<b>6. Endommagement par fatigue</b> .....	20
6.1. <i>Fatigue des monocristaux</i> .....	20
6.2. <i>Fatigue des polycristaux</i> .....	22
6.3. <i>Fatigue thermique</i> .....	26
6.4. <i>Fatigue de roulement</i> .....	26
<b>7. Endommagement de corrosion sous contrainte</b> .....	30
<b>8. Endommagement de fluage</b> .....	31
<b>9. Combinaisons d'endommagements</b> .....	32

<b>10. Conclusion</b> .....	34
<b>A.1. Annexe : Modèle de Rice et Thomson</b> .....	35

## 2 • Les endommagements, le désordre et les hétérogénéités

<b>1. Ordre parfait, désordre parfait, ordres et désordres locaux</b> .	37
<b>2. Contrainte théorique de rupture</b> .....	37
<b>3. Glissement localisé et dislocations</b> .....	40
3.1. Mécanisme de Zener .....	40
3.2. Les cellules de dislocations en fatigue .....	41
<b>4. Le désordre des lacunes</b> .....	43
<b>5. Les inclusions</b> .....	43
5.1. Les inclusions sources de clivages ou de cavités .....	43
5.2. Naissance de fissures sur les inclusions .....	45
<b>6. Grains et joints de grains</b> .....	49
6.1. Rôle de la taille de grain dans l'endommagement par clivage.....	49
6.2. Quelques éléments de mécanique de la rupture.....	49
6.3. Propagation d'un embryon de fissure de clivage.....	51
6.4. Blocage des clivages sur les joints de grains .....	51
6.5. Cas des martensites et des bainites.....	52
6.6. Loi de Weibull.....	53
6.7. Rôle des grains dans la propagation des fissures de fatigue	54
<b>7. Croissance et coalescence des cavités</b> .....	56
<b>8. Les fibres</b> .....	56
8.1. Fibres plus fragiles que la matrice .....	57
8.2. Matrice plus fragile que les fibres .....	57
<b>9. Conclusion</b> .....	59
<b>A. Annexes</b> .....	60
A.1. Contrainte théorique de rupture .....	60
A.2. Loi de Weibull.....	60
A.3. Développements supplémentaires sur la mécanique des inclusions .....	62

A.4. <i>Modèles de croissance de cavités</i> .....	66
A.5. <i>Composites à fibres</i> .....	68

---

### 3 • Endommagement et matériaux poreux

<b>1. Notions de mécanique de l'endommagement</b> .....	71
1.1. <i>Traitement élémentaire</i> .....	71
1.2. <i>Relation entre les processus microscopiques d'endommagement et la mécanique de l'endommagement</i> .	74
1.3. <i>Malheureusement des incompatibilités !</i> .....	77
1.4. <i>Mécanique de l'endommagement dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles</i> .....	78
<b>2. Mécanique des matériaux plastiques poreux</b> .....	79
<b>3. Conclusion</b> .....	84
<b>A. Annexes</b> .....	85
A.1. <i>Module d'élasticité d'un matériau élastique linéaire isotrope contenant une fissure en forme de piécette</i> .....	85
A.2. <i>Taux de croissance des cavités</i> .....	85

---

### 4 • Environnement et endommagement

<b>1. La fragilisation par l'hydrogène</b> .....	87
1.1. <i>Pénétration de l'hydrogène dans les métaux</i> .....	88
1.2. <i>Diffusion de l'hydrogène</i> .....	93
1.3. <i>Mécanismes de fragilisation par l'hydrogène</i> .....	94
1.4. <i>Influence de divers paramètres sur la fragilisation par l'hydrogène</i> .....	99
1.5. <i>Aspects fractographiques</i> .....	100
<b>2. La corrosion sous contrainte</b> .....	102
2.1. <i>Phénoménologie</i> .....	102
2.2. <i>Amorçage des fissures de corrosion sous contrainte</i> .....	105
2.3. <i>Propagation des fissures en corrosion sous contrainte</i> .....	106
<b>3. Fatigue-corrosion</b> .....	111



<b>4. Conclusion</b> .....	112
<b>A. Annexe : Propagation d'une fissure par accumulation de gaz en fragilisation par l'hydrogène</b> .....	113

---

## 5 • Endommagement et besoins industriels

<b>1. Développement des recherches sur la fatigue</b> .....	115
<b>2. Développements de la maîtrise de la rupture fragile</b> .....	117
2.1. <i>L'essai Charpy</i> .....	117
2.2. <i>Les avions et Griffith</i> .....	118
2.3. <i>L'Atlantique Nord et la température de transition fragile-ductile</i> .....	119
2.4. <i>La conquête de l'espace et la maîtrise du nucléaire et la mécanique de la rupture</i> .....	130
2.5. <i>L'électro-nucléaire, le gaz et le pétrole et la mécanique de la rupture en élasto-plasticité</i> .....	132
<b>3. Conclusion</b> .....	136
<b>A. Annexes</b> .....	137
A.1. <i>Calcul des champs de contraintes et de déformations dans la section d'une éprouvette cylindrique entaillée, d'après Bridgman</i> .....	137
A.2. <i>Influence de la vitesse de déformation sur l'énergie de clivage</i> .....	138

---

## 6 • Prévoir les évolutions des endommagements

<b>1. Les stades et conditions d'endommagement</b> .....	141
<b>2. La fatigue</b> .....	143
2.1. <i>Approche globale</i> .....	143
2.2. <i>Propagation des fissures longues en fatigue</i> .....	148
2.3. <i>Comportement des fissures courtes</i> .....	152
2.4. <i>Prévision de l'amorçage des fissures de fatigue</i> .....	153

<b>3. La corrosion sous contrainte et la fatigue-corrosion</b> .....	155
3.1. <i>Prévoir l'absence de corrosion sous contrainte           ou de fatigue-corrosion</i> .....	155
3.2. <i>Propagation des fissures de corrosion sous contrainte           et de fatigue-corrosion</i> .....	156
<b>4. L'endommagement par fluage</b> .....	156
4.1. <i>Les facteurs de prévision</i> .....	156
4.2. <i>Naissance des cavités</i> .....	158
4.3. <i>Croissance des cavités</i> .....	160
4.4. <i>Vitesse de propagation des fissures en fluage</i> .....	165
<b>5. Interactions fatigue-fluage</b> .....	166
<b>6. Conclusion</b> .....	168
<b>A. Annexes</b> .....	168
A.1. <i>Prévision de la durée d'amorçage d'une fissure de fatigue           au voisinage d'un trou</i> .....	168
A.2. <i>Naissance des cavités de fluage</i> .....	169

---

## 7 • Endommagements et maintenance

<b>1. Équilibre entre coût de maintenance et coût des défaillances</b> .....	171
<b>2. Contrôles non destructifs</b> .....	173
2.1. <i>Ce qu'il importe de contrôler</i> .....	173
2.2. <i>Examens visuels</i> .....	174
2.3. <i>Ressuage</i> .....	174
2.4. <i>Magnétoscopie</i> .....	175
2.5. <i>Radiographie et gammagraphie</i> .....	175
2.6. <i>Ultrasons</i> .....	176
2.7. <i>Courants de Foucault</i> .....	178
2.8. <i>Émission acoustique</i> .....	179
<b>3. Un exemple de maintenance, celle des ouvrages d'art</b> .....	180
3.1. <i>Un traitement déterministe</i> .....	180
3.2. <i>Traitement fiabiliste</i> .....	181

---

## 8 • Guérison des endommagements

<b>1. La ménagère et le bricoleur recousent et collent .....</b>	189
<b>2. Guérison des tissus vivants.....</b>	189
<b>3. Des matériaux autocicatrisants ?.....</b>	190
3.1. <i>Le cas du verre.....</i>	190
3.2. <i>Cicatrisation des polymères.....</i>	191
3.3. <i>Autocicatrisation de composites céramiques.....</i>	193
3.4. <i>Autocicatrisation des bétons.....</i>	194

---

## 9 • Conclusion

<b>1. Conditions pour pouvoir parler d'une science des endommagements ? .....</b>	197
<b>2. Lois universelles .....</b>	198
<b>3. L'expérience est imprégnée de théorie.....</b>	200
<b>4. Méthode scientifique .....</b>	200
<b>5. But de la science des endommagements .....</b>	203

---

## A • Annexe. Éléments de mécanique de la rupture en élasticité linéaire

<b>A.1. Facteur d'intensité de contrainte .....</b>	205
A.1.1. <i>Champs de déplacement, de déformation et de contrainte à l'extrémité d'une fissure .....</i>	205
A.1.2. <i>Calcul des facteurs d'intensité de contrainte.....</i>	208
<b>A.2. Taux de libération d'énergie .....</b>	211
A.2.1. <i>Détermination du taux de libération d'énergie G.....</i>	211
A.2.2. <i>Relation entre le taux de libération d'énergie G et le facteur d'intensité de contrainte K.....</i>	213
A.2.3. <i>Détermination de l'écartement des lèvres de la fissure ....</i>	214

---

<b>A.3. Intégrale de Rice-Cherepanov <math>J</math></b> .....	215
A.3.1. Définition de $J$ .....	215
A.3.2. Détermination expérimentale de $J$ .....	216
<b>A.4. Zones plastifiées confinées en tête de fissure</b> .....	216
A.4.1. Zone plastifiée en contrainte plane .....	216
A.4.2. Zone plastifiée en déformation plane .....	221
<b>Quelques livres recommandés et utiles</b> .....	225
<b>Index</b> .....	227





# Avant-propos

Il existe un certain nombre d'ouvrages qui traitent des endommagements des matériaux. J'en ai moi-même écrit un avec mes amis André Pineau et André Zaoui (*Comportement mécanique des matériaux*, Hermès, 1991 et sa traduction en anglais *Mechanical Behaviour of Materials*, Kluwer, 1998). Comment faire pour apporter un peu de neuf ? C'est surtout dans l'organisation des chapitres que j'ai cherché à innover. J'ai essayé de regrouper les questions selon des problématiques générales touchant à des domaines conjoints : par exemple l'ordre et le désordre ; la façon dont les besoins industriels ont poussé au développement du domaine ; l'incidence des connaissances concernant les endommagements sur la maintenance. J'espère ainsi susciter de l'intérêt au détriment peut-être d'un exposé de construction plus linéaire. Il faudra parfois aller d'un chapitre à un autre pour faire le tour de certaines questions, ce que l'index facilite.

J'ai voulu écrire quelque chose qui ne rebute pas trop les lecteurs qui auraient des préventions par rapport aux formules mathématiques. Elles sont parfois difficilement évitables. Certains calculs sont rassemblés à la fin des chapitres, pour permettre une compréhension plus approfondie. De même, ai-je inclus une annexe finale rassemblant des éléments de mécanique de la rupture en élasticité linéaire, qui intervient à de nombreuses reprises dans le traitement des endommagements. Pour autant, la possession de quelques connaissances en mécanique du solide et en science des matériaux est indispensable. Je ne suis pas revenu sur la définition du tenseur des contraintes, sur des notions élémentaires de chimie et de thermodynamique, sur les diagrammes de phase et les traitements thermiques, sur la diffusion, etc. Les étudiants d'un niveau de maîtrise, voire de licence, devraient ne pas éprouver trop de difficultés. J'espère que ces derniers, comme leurs professeurs, les chercheurs et les ingénieurs, trouveront cet ouvrage utile.

Les matériaux constituent un domaine vaste. Je n'ai pas introduit beaucoup de notions sur les matériaux non métalliques. Ce sont les métaux que je connais le mieux. Par ailleurs, la métallurgie a été à la

base des progrès scientifiques sur les matériaux. Les approches qu'on a développées sur les alliages métalliques ont été, et sont encore dans bien des cas, transposées aux autres matériaux. C'est l'excuse que j'avance pour les polyméristes et les céramistes frustrés. Tout particulièrement, les composites auraient mérité d'être mieux traités. À ma décharge, ils sont si divers qu'il est difficile de tirer des lois générales à leur sujet. La plupart des exemples que j'utilise sont fournis par les aciers. Cela ne devrait pas restreindre outre mesure le champ des applications, dans la mesure où leurs propriétés se transposent aux autres alliages métalliques cubiques centrés ou cubiques à faces centrées.

Le premier chapitre donne un panorama général sur les endommagements des matériaux. Il se fonde sur la différence essentielle qui existe entre les clivages et les glissements. Il traite d'abord des endommagements instantanés, conduisant à la rupture brutale. Puis il examine les endommagements qui se développent plus ou moins lentement et qui aboutissent aux ruptures différées.

Le deuxième chapitre aborde la question essentielle des désordres et des hétérogénéités qui jouent un rôle fondamental en ce qui concerne les endommagements. Il est structuré par les divers types d'hétérogénéités rencontrées : dislocations, lacunes, inclusions, joints de grains, cavités, fibres.

Le troisième chapitre traite des matériaux poreux dans la mesure où ils peuvent être considérés comme des matériaux endommagés. L'occasion est donnée d'aborder la mécanique de l'endommagement qui a connu, en France notamment, de nombreux développements récents, mais qui suscite quelques réserves. Le comportement des matériaux plastiques poreux a lui aussi fait l'objet de nombreux travaux dans les dernières années. Ils ont beaucoup contribué à une modélisation efficace du développement des endommagements par cavitation.

Le quatrième chapitre est consacré aux interactions de l'endommagement avec l'environnement. C'est un domaine qui fait appel tant à la chimie qu'à la mécanique. Cette pluridisciplinarité nécessaire, mais malaisée à réaliser, a certainement freiné pendant longtemps la compréhension des phénomènes. Depuis quelques années, des progrès certains ont été accomplis. Je me suis efforcé d'en tenir compte. En tout cas, l'influence des environnements sur les endommagements est un sujet de grande importance pratique et parfois trop négligé. Ce chapitre commence par le problème de la fragilisation par l'hydrogène, que l'on retrouve ensuite dans certains cas de corrosions sous contrainte. La fatigue corrosion apporte de plus des aspects de synergie complexes.

Le cinquième chapitre cherche à montrer comment les besoins industriels qui ont évolué au cours du xx<sup>e</sup> siècle ont nécessité des développements dans le domaine des endommagements. L'exemple de la

transition fragile ductile des aciers est celui traité. On aurait pu en choisir d'autres, mais celui-là est particulièrement parlant.

La prévision des évolutions des endommagements est de la plus haute importance pour estimer la durée de vie des pièces et des structures et pour éviter des défaillances prématurées. Elle fait l'objet du sixième chapitre. Ce sont les endommagements par fatigue qui sont les plus redoutés, car en fait les plus fréquents. Mais les endommagements par fluage sont aussi à craindre. J'ai essayé de montrer comment la connaissance des mécanismes aboutit à des modélisations bien fondées.

Le septième chapitre aborde un domaine nouveau, encore peu développé : celui de la maintenance conditionnelle. Le problème est de connaître la stratégie à adopter pour une maintenance aussi efficace que possible en termes de coûts. Je n'y parle évidemment que des aspects liés aux matériaux, laissant de côté tous les développements mathématiques auxquels ce sujet donne lieu.

Le chapitre huit, malheureusement très court faute d'exemples, est consacré à la guérison des endommagements, ce que sait si bien faire le vivant. Les matériaux morts sont beaucoup plus rétifs, bien que, quelques exemples très particuliers peuvent être donnés pour des verres, des polymères et des céramiques. Il faudra de l'imagination pour fabriquer des matériaux qui guérissent spontanément.

Dans la conclusion, je me suis aventuré dans le domaine de l'épistémologie élémentaire. Prévenir les endommagements demande une approche scientifique. Pour la pratiquer, avoir quelques notions méthodologiques me semble utile. Je livre donc aux lecteurs quelques réflexions plus ou moins popperéniennes appliquées aux endommagements. On en tirera, j'espère, l'idée que des progrès valent encore la peine d'être réalisés. Mon souhait est que le présent ouvrage puisse modestement y contribuer.

La retraite a l'avantage de permettre une certaine réflexion sur les connaissances que l'on a pu acquérir et l'envie pointée d'en faire profiter des plus jeunes que soi. Aussi, lorsque Jean Philibert a insisté pour que je me lance dans la rédaction d'un ouvrage sur l'endommagement des matériaux, n'ai-je pas trop longtemps hésité. Voici le fruit du travail dont je suis venu à bout. Je remercie Jean Philibert de m'avoir ainsi sollicité et de m'avoir fait de bien utiles suggestions. S'il est une tâche fastidieuse, c'est bien celle consistant à rassembler les illustrations. Nombre d'entre elles m'ont été procurées par des collègues que je remercie vivement, ainsi que Daniel Kervern qui m'a souvent tiré d'affaire face aux scanners et aux ordinateurs.





# Notations

- $a$  : distance entre plans denses  
 $a$  : longueur d'une fissure  
 $a$  : rayon d'une fissure  
 $a$  : rayon minimal d'une éprouvette cylindrique entaillée  
 $A$  : surface d'une fissure  
 $a_0$  : distance entre plans denses à l'équilibre  
 $a_0$  : longueur initiale d'une fissure  
 $a_d$  : limite de détection d'une fissure par contrôle non destructif  
 $A_j$  : surface des joints de grain recouverts de cavités de fluage  
 $b$  : distance interatomique  
 $b$  : longueur du ligament d'une éprouvette  
 $b$  : vecteur de Burgers d'une dislocation  
 $B$  : épaisseur d'une éprouvette ou d'une pièce  
 $c$  : dimension d'une inclusion  
 $C$  : coefficient de la loi de Paris  
 $C$  : complaisance  
 $C^*$  : paramètre de Riedel et Rice pour la propagation des fissures en fluage  
 $c_i$  : coût unitaire d'une inspection  
 $C_i$  : coût total des inspections  
 $C_{ijkl}$  : constantes d'élasticité  
 $C_{ijkl}^I$  : constantes d'élasticité d'une inclusion  
 $c_r$  : coût unitaire d'une réparation  
 $C_r$  : coût total des réparations  
 $C_t$  : paramètre de Riedel et Rice en fluage primaire  
 $d$  : taille de grain  
 $d$  : dimension d'un élément de volume d'un matériau  
 $d$  : longueur d'un glissement  
 $D$  : paramètre d'endommagement  
 $D_j$  : coefficient de diffusion dans les joints de grain  
 $D_s$  : coefficient de diffusion superficielle  
 $D_\alpha$  : coefficient de diffusion dans le fer alpha  
 $D_\gamma$  : coefficient de diffusion dans le fer gamma

- $E$  : module d'Young  
 $E_e$  : énergie élastique emmagasinée  
 $E_{eff}$  : module d'Young effectif  
 $E_{eq}$  : déformation plastique appliquée équivalente  
 $E^f$  : module d'Young d'une fibre  
 $E^I$  : module d'Young d'une inclusion  
 $e_{ij}$  : déviateur des déformations  
 $E_{ij}$  : champ de déformation lointain  
 $E^m$  : module d'Young d'une matrice  
 $E_p$  : module d'écroutissage  
 $E_p$  : énergie d'adsorption  
 $f$  : fraction volumique de fibres  
 $f$  : fraction volumique de cavités ; porosité  
 $F$  : force appliquée  
 $f_c$  : valeur critique de la porosité à partir de laquelle son augmentation s'accélère  
 $f_f$  : porosité qui fait perdre au matériau toute résistance  
 $f^I$  : fraction volumique d'inclusions  
 $F_j$  : coefficient de surface de joint d'une cavité intergranulaire  
 $F_s$  : coefficient de surface totale d'une cavité intergranulaire  
 $F_v$  : coefficient de volume d'une cavité intergranulaire  
 $g$  : exposant de la loi de Monkman-Grant  
 $G$  : enthalpie libre  
 $G$  : taux de libération d'énergie  
 $G_c$  : ténacité du matériau exprimé en termes d'énergie de rupture  
 $H$  : demi-distance moyenne entre fibres  
 $J$  : intégrale de Rice-Cherepanov ; taux de libération d'énergie en plasticité  
 $k$  : facteur de forme d'une inclusion  
 $k$  et  $\sigma_1$  : paramètres du modèle de Rousselier  
 $k$  : constante de Boltzman  
 $k$  : limite d'élasticité en cisaillement  
 $k$  : module d'incompressibilité  
 $K$  : facteur d'intensité de contrainte  
 $K_c$  : ténacité du matériau exprimé en terme de facteur d'intensité de contrainte  
 $k^I$  : module d'incompressibilité d'une inclusion  
 $K_I, K_{II}, K_{III}$  : facteurs d'intensité de contrainte en mode I, II et III respectivement  
 $K_{ICSC}$  : seuil de non fissuration en corrosion sous contrainte  
 $k^m$  : module d'incompressibilité d'une matrice  
 $K_{max}$  : valeur maximale du facteur d'intensité de contrainte au cours d'un cycle  
 $K_T$  : facteur de concentration de contrainte  
 $l$  : dimension d'un volume de matériau  
 $L$  : demi-longueur d'une fibre  
 $L$  : distance entre cavités

- $m$  : rapport du module d'Young d'une inclusion à celui de la matrice  
 $m$  : exposant de la loi de Norton  
 $m$  : exposant de la loi de Paris  
 $m$  : exposant de Weibull  
 $M(x)$  : fonction de poids  
 $n$  : exposant d'écroutissage  
 $N$  : nombre d'éléments de volume  
 $N$  : exposant d'écroutissage  
 $N$  : nombre de cycles  
 $N_d$  : nombre de cycles nécessaires pour atteindre la limite de détection par contrôle non destructif  
 $N_i$  : nombre de cycles séparant deux inspections  
 $N_u$  : nombre de cycles d'utilisation d'un appareil  
 $p$  : pression  
 $P$  : charge  
 $P_0(\sigma)$  : probabilité de rupture d'un élément de volume  
 $P_R(\sigma)$  : probabilité de rupture  
 $Q$  : contrainte en tête de fissure provenant du second terme du développement en série  
 $q_1, q_2$  : paramètre du modèle de Gurson, Tveergard, Needleman  
 $r$  : distance à l'axe d'une fibre  
 $r$  : distance à l'extrémité d'une fissure  
 $R$  : charge de rupture d'un composite  
 $R$  : constante des gaz parfaits  
 $R$  : dimension de la sone plastifiée en tête de fissure  
 $R$  : rapport de la charge minimale à la charge maximale au cours d'un cycle  
 $R$  : rayon d'une cavité  
 $R$  : rayon de courbure d'une cavité intergranulaire  
 $R$  : rayon de courbure d'une entaille  
 $R$  : rayon d'une fibre  
 $R^*$  : rayon critique de création d'une cavité  
 $R_0$  : paramètre du modèle de Rice et Thomson proportionnel au rayon du cœur d'une dislocation rapporté au vecteur de Burgers  
 $R_c$  : rayon critique de création d'une cavité  
 $R_{CI}$  : rapport de l'énergie dépensée par fissuration d'un joint de grain à l'énergie de surface  
 $R_e$  : limite d'élasticité  
 $R^f$  : charge de rupture d'une fibre  
 $R^m$  : charge de rupture de la matrice  
 $R_p$  : contrainte d'écoulement  
 $r_Y$  : correction d'Irwin  
 $R_v$  : facteur de triaxialité en mécanique de l'endommagement  
 $s$  : rapport de la dimension axiale à la dimension radiale d'une inclusion axisymétrique

que la valeur de cette dernière. Ces calculs sont utiles pour prévoir la direction de la propagation de la fissure, surtout en mode II et *a fortiori* en mode mixte.

On trouve pour la contrainte principale maximale en mode I :

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{A.7})$$

Sa valeur maximale se trouve dans une direction  $\theta = \pi/3$  où elle vaut :  $3\sqrt{3}K_I/4\sqrt{2\pi r}$ . Par ailleurs :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{A.8})$$

dont la valeur maximale  $4\sqrt{2}K_I/3\sqrt{3}\sqrt{2\pi r}$  se trouve pour un angle  $\theta$  tel que  $\cos \theta = 1/3$ .

En mode II :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{3}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \quad (\text{A.9})$$

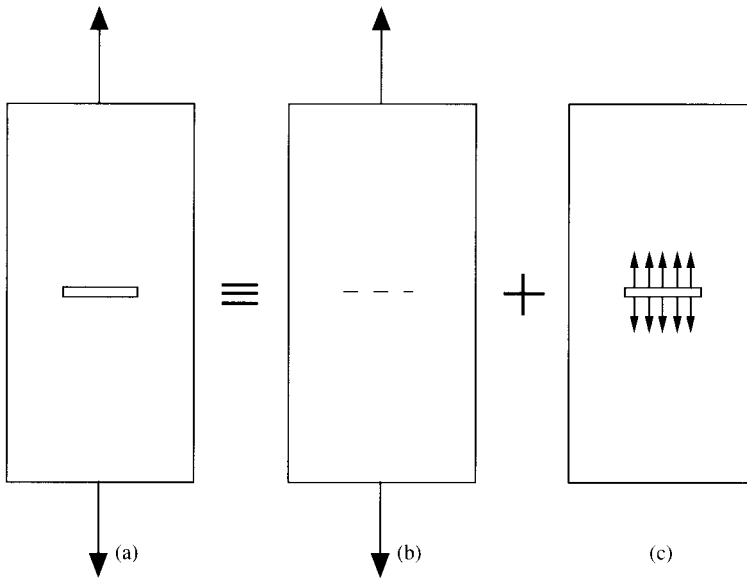
dont la valeur maximale vaut  $2\sqrt{3}K_{II}/3\sqrt{2\pi r}$  pour un angle  $\theta$  tel que  $\cos \theta = 1/3$ .

Pour un *matériau anisotrope* les facteurs d'intensité de contrainte peuvent être trouvés dans l'annexe D de *The Stress Analysis Handbook* de Hiroshi Tada, Paul C. Paris et George R. Irwin (Del Research Co., Hellertown, Penn., 1973).

### A.1.2. Calcul des facteurs d'intensité de contrainte

Le facteur d'intensité de contrainte est donc le paramètre qui intègre les différents facteurs que sont le chargement et la géométrie de la pièce et la dimension de la fissure. Il convient de savoir comment calculer les facteurs d'intensité de contrainte pour pouvoir connaître le niveau des contraintes et des déformations en tête de fissure.

Montrons tout d'abord que le facteur d'intensité de contrainte est le même que celui que produirait l'application sur les lèvres de la fissure des contraintes qui s'y exerceraient en son absence (en condition de charge imposée). En effet, le problème cherché (Fig. A.2) peut être considéré comme la superposition de la pièce non fissurée et soumise aux charges imposées et de la pièce chargée uniquement sur



**Fig. A.2.** Principe de superposition : une pièce fissurée chargée (a) peut être représentée par la superposition de la pièce chargée non fissurée (b) et de la pièce fissurée non chargée (c), mais pour laquelle des forces réparties égales aux contraintes qui existaient dans la pièce non fissurée sont appliquées sur les lèvres de la fissure. Le facteur d'intensité de contrainte est le même pour ce dernier cas et pour la pièce fissurée chargée.

l'emplacement de la fissure de forces réparties convenables pour annuler les contraintes qui existent avant que celle-ci ne soit présente. Seul ce deuxième problème comporte une singularité élastique ; c'est donc celle cherchée.

L'utilisation de cette méthode permet de calculer les facteurs d'intensité de contrainte par sommation de ceux qui sont produits par des charges élémentaires concentrées.

Par exemple, on montre que dans une plaque infinie contenant une fissure de longueur  $2a$ , chargée par deux forces ponctuelles égales et opposées  $\pm P$  par unité d'épaisseur à une distance  $b$  de l'axe (Fig. A.3), le facteur d'intensité de contrainte vaut :

$$K_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \left( \frac{a+b}{a-b} \right)^{1/2}. \quad (\text{A.10})$$

Un tel chargement peut être réalisé en enfonçant un coin dans la fissure.