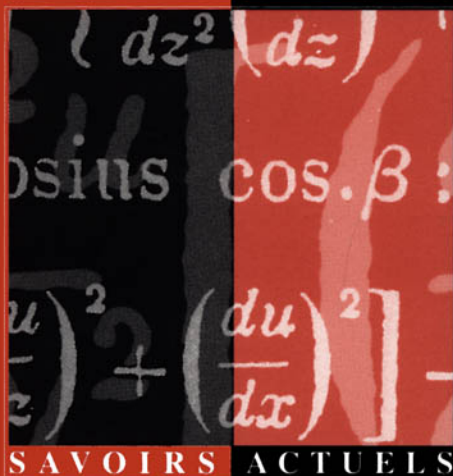


MATHÉMATIQUES

Daniel PERRIN

Géométrie algébrique

Une introduction



 CNRS EDITIONS


EDP
SCIENCES

Géométrie algébrique

Une introduction

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.

Daniel Perrin

*IUFM de Versailles
Université Paris-Sud, Orsay*

Géométrie algébrique

Une introduction

S A V O I R S A C T U E L S

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

© 2001, **EDP Sciences**, 7 avenue du Hoggar, BP 112, PA de Courtabœuf,
91944 Les Ulis Cedex A.
CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

1^{re} édition :

© 1995 **InterÉditions – CNRS ÉDITIONS**

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle).

Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tel. (1) 43.26.95.35.

ISBN 2-86883-374-8

ISBN 2-271-05271-8

Table des matières

Avant-propos	ix
Notations	xi
Introduction	1
0 La géométrie algébrique	1
1 Quelques objets	1
2 Quelques problèmes	4
I Ensembles algébriques affines	9
1 Ensembles algébriques affines, topologie de Zariski . . .	9
2 Idéal d'un ensemble algébrique affine	12
3 Irréductibilité	14
4 Le Nullstellensatz (ou théorème des zéros de Hilbert) . .	16
5 Un premier pas vers Bézout	21
6 Les morphismes : une première approche	22
Exercices	27
II Ensembles algébriques projectifs	29
0 Motivation	29
1 L'espace projectif	29
2 Homographies	31
3 Lien affine projectif	31
4 Ensembles algébriques projectifs	34
5 Idéal d'un ensemble algébrique projectif	36
6 Un anneau gradué associé à un ensemble algébrique projectif	37

7	Appendice : anneaux gradués	38
	Exercices	40
III	Faisceaux et variétés	43
0	Motivations	43
1	La notion de faisceau	44
2	Le faisceau structural d'un ensemble algébrique affine . .	47
3	Les variétés affines	50
4	Les variétés algébriques	52
5	Anneaux locaux	55
6	Faisceaux de modules	56
7	Faisceaux de modules sur une variété algébrique affine .	59
8	Les variétés projectives	61
9	Faisceaux de modules sur les variétés algébriques projectives	66
10	Deux suites exactes importantes	70
11	Exemples de morphismes	71
	Exercices A	74
	Exercices B	78
IV	Dimension	82
0	Introduction	82
1	Définition topologique, lien avec l'algèbre	82
2	Dimension et nombre d'équations	86
3	Morphismes et dimension	91
4	Annexe : morphismes finis	98
	Exercices	99
V	Espaces tangents, points singuliers	103
0	Introduction	103
1	Espaces tangents	104
2	Points singuliers	108
3	Anneaux locaux réguliers	111
4	Le cas des courbes	112
	Exercices	115
VI	Le théorème de Bézout	119
0	Introduction	119
1	Multiplicités d'intersection	119
2	Le théorème de Bézout	124
	Exercices	130

VII Cohomologie des faisceaux	134
0 Introduction	134
1 Un peu d'algèbre homologique	136
2 La cohomologie de Čech	138
3 Théorèmes d'annulation	144
4 La cohomologie des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$	145
Exercices	151
VIII Genre arithmétique des courbes, théorème de Riemann-Roch, forme faible	154
0 Introduction : la caractéristique d'Euler-Poincaré	154
1 Degré et genre d'une courbe projective, Riemann-Roch 1	155
2 Diviseurs sur une courbe, Riemann-Roch 2	163
Exercices	173
IX Applications rationnelles, genre géométrique, courbes unicursales	176
0 Introduction	176
1 Applications rationnelles	176
2 Le cas des courbes	179
3 Normalisation : la voie algébrique	183
4 Éclatements affines	187
5 Éclatements globaux	194
6 Appendice : retour sur les démonstrations précédentes	202
X Liaison des courbes gauches	204
0 Introduction	204
1 Idéaux et résolutions	205
2 Courbes ACM	212
3 Liaison des courbes gauches	221
Exercices	230
Mémento d'algèbre	232
1 Anneaux	232
2 Produits tensoriels	238
3 Bases de transcendance	241
4 Quelques exercices d'algèbre	242
Appendice. Les schémas	244
0 Introduction	244
1 Schémas affines	245

2	Schémas	245
3	Ce que cela change de travailler avec des schémas	246
4	Ce que cela apporte de travailler avec des schémas	247
5	Un Bertini schématique	248
Recueil de problèmes		250
	Problème I	250
	Problème II	252
	Problème III	254
	Problème IV	256
	Problème V	258
	Problème VI	259
	Problème VII	262
	Problème VIII	266
	Problème IX	269
	Partiel, décembre 1991	272
	Examen, janvier 1992	274
	Examen, juin 1992	278
	Examen, janvier 1993	280
	Examen, juin 1993	284
	Examen, février 1994	287
Références bibliographiques		293
Index terminologique		295
Index des notations		300

Avant-propos

Cet ouvrage a pour base un cours fondamental de troisième cycle donné en 1991-92, 1992-93 et 1993-94 à l'Université Paris Sud (Orsay). Le cours comportait une cinquantaine d'heures à raison de $3/4$ de cours et de $1/4$ d'exercices. Il s'adressait à des étudiants n'ayant jamais abordé la géométrie algébrique. Vu le temps imparti, il ne peut s'agir, évidemment, que d'une introduction à une partie de ce domaine. Le choix opéré ici est celui de la géométrie projective sur un corps algébriquement clos, traitée par des voies exclusivement algébriques.

Les principes didactiques de ce cours ont été les suivants :

1) Partir de problèmes dont la formulation est simple, mais dont la solution est non triviale (théorème de Bézout sur l'intersection des courbes planes, courbes unicursales). En 1993-1994 le chapitre sur les courbes unicursales a été remplacé par celui sur la liaison des courbes gauches.

2) Introduire à cette occasion les outils fondamentaux de la géométrie algébrique : dimension, singularités, faisceaux, variétés, cohomologie. En ce qui concerne les schémas, on a choisi de ne pas en développer le formalisme sauf dans le cas fini (pour parler de multiplicités d'intersection). Un petit résumé est donné en appendice. On en retient surtout l'usage des éléments nilpotents.

3) Limiter au maximum la part de l'algèbre commutative en admettant un certain nombre de résultats (ou en se contentant de les montrer dans des cas particuliers) lorsque leur démonstration n'est pas essentielle pour leur utilisation. Les résultats fondamentaux utilisés sont rassemblés dans un mémento avec des références. Certains sont proposés en exercices ou en problèmes.

4) Ne pas craindre d'admettre certains résultats du corpus lui-même, lorsque leur sens n'est pas altéré par l'absence de démonstration. C'est le cas par exemple pour l'unicité de la cohomologie ou pour certains points techniques du chapitre IX. Plus généralement, on a essayé de mettre l'accent sur la compréhension des phénomènes plus que sur la technique.

5) Pour chaque sujet abordé, fournir un certain nombre d'exercices et de problèmes. Les textes donnés aux différents examens ont été annexés à l'ensemble.

Il est clair que sur un tel sujet on peut difficilement prétendre à l'originalité. Ce travail s'est donc largement inspiré des ouvrages existants et notamment des livres d'Hartshorne [H], Fulton [F], Mumford [M] et Shafarevitch [Sh].

Je remercie Mireille Martin-Deschamps pour sa lecture attentive et ses remarques. Je remercie aussi les auditeurs de ce cours qui m'ont signalé quelques erreurs et proposé des améliorations, et notamment Abdelkader Belkilani, Nicusor Dan, Leopoldo Kulesz, Vincent Lafforgue et Thomas Péteul.

Enfin, je suis heureux de remercier Claude Sabbah d'avoir accueilli cet ouvrage dans la collection *Savoirs Actuels* et de m'avoir prêté son concours pour la mise au point du texte définitif.

Notations

On désigne par \mathbf{N} (resp. \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{C}) l'ensemble des entiers ≥ 0 (resp. des entiers relatifs, des nombres rationnels, des nombres réels, des nombres complexes). On note \mathbf{F}_q le corps fini à q éléments.

On note $|E|$ le cardinal d'un ensemble E . On note $[x]$ la partie entière d'un nombre réel. La notation $\binom{n}{p}$ désigne le coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

On convient que ce coefficient est nul pour $n < p$.

Si $f : G \rightarrow H$ est un homomorphisme de groupes abéliens (ou de modules, ou d'espaces vectoriels) on note $\text{Ker } f$ (resp. $\text{Im } f$, resp. $\text{Coker } f$) son noyau (resp. son image, resp. son conoyau). On rappelle que l'on a, par définition, $\text{Coker } f = H/\text{Im } f$.

Une suite exacte de groupes abéliens (ou de modules, ou d'espaces vectoriels) :

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow 0$$

consiste en la donnée de deux homomorphismes u, v vérifiant :

- a) u injectif
- b) v surjectif
- c) $\text{Im } u = \text{Ker } v$.

On se reportera au memento d'algèbre pour des définitions et notations complémentaires.

Dans les exercices et les problèmes, le signe ¶ indique une question difficile.

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.

Introduction

0. La géométrie algébrique

La géométrie algébrique est l'étude des variétés algébriques : toutes celles qui sont définies comme ensembles des zéros d'un ou plusieurs polynômes. On peut en faire remonter l'origine à Descartes et de nombreux mathématiciens s'y sont illustrés : Abel, Riemann, Poincaré, M. Noether, l'école italienne avec Severi, plus récemment Weil, Zariski et Chevalley. Elle a subi dans les années 1950-1960 un bouleversement gigantesque sous l'impulsion de J.-P. Serre et surtout d'A. Grothendieck et son développement a été considérable. C'est maintenant une discipline fondamentale, non seulement pour elle-même, mais aussi dans de nombreuses parties des mathématiques.

1. Quelques objets

Il y a deux catégories essentielles de variétés algébriques : les variétés affines et les variétés projectives. Ces dernières sont les plus intéressantes, mais nécessitent quelques définitions qu'il est prématuré de donner ici ; nous les verrons au chapitre II.

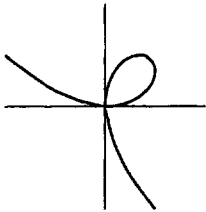
Pour définir une variété affine, on considère une famille de polynômes $P_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ à coefficients dans un corps k . Alors, le sous-ensemble V de l'espace affine k^n défini par les équations $P_1 = \dots = P_r = 0$ est une variété algébrique affine. Voyons rapidement quelques exemples :

a) Si les P_i sont de degré 1 on retrouve les sous-variétés linéaires affines de k^n : droites, plans, etc.

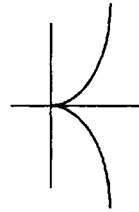
b) Prenons $n = 2$, $r = 1$ et $k = \mathbf{R}$, de sorte que k^2 est un plan réel et

V , définie par l'équation $P(X, Y) = 0$, une "courbe" plane. Par exemple si P est de degré 2 on retrouve les coniques (ellipse $X^2 + Y^2 - 1 = 0$, hyperbole $XY - 1 = 0$, parabole $Y - X^2 = 0$).

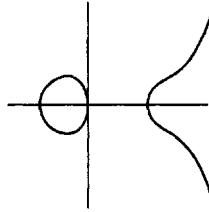
Si P est de degré 3 on dit que la courbe est une cubique, par exemple $Y^2 - X^3 = 0$ (cubique cuspidale, i.e. avec un rebroussement, en anglais cusp), $X^3 + Y^3 - XY = 0$ (cubique nodale, i.e. à point double ordinaire ou nœud), $Y^2 - X(X - 1)(X + 1) = 0$ (cubique non singulière appelée aussi courbe elliptique, cf. plus loin).



$$X^3 + Y^3 - XY = 0$$

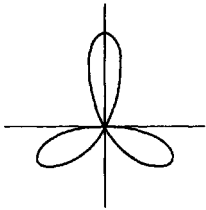


$$Y^2 - X^3 = 0$$

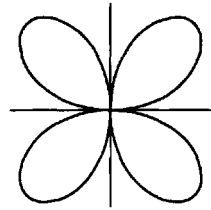


$$Y^2 - X(X - 1)(X + 1) = 0$$

Il y a bien entendu des courbes de tout degré. Signalons seulement les deux courbes suivantes : $(X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3 = 0$ (trifolium) et $(X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2 = 0$ (quadrifolium).



$$(X^2 + Y^2)^2 + 3X^2Y - Y^3 = 0$$



$$(X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2 = 0$$

c) Dans l'espace k^3 une équation $F(X, Y, Z) = 0$ définit cette fois une surface. Par exemple, si F est de degré 2 on obtient une quadrique :

$X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$ (sphère), $X^2 + Y^2 - Z^2 - 1 = 0$ (hyperboloïde à une nappe), etc.

d) Deux équations dans k^3 définissent en général une courbe gauche, par exemple, $Y - X^2 = 0$ et $Z - X^3 = 0$ donnent une cubique gauche (ensemble des points (u, u^2, u^3) pour $u \in k$).

e) Il est clair que l'étude des variétés algébriques dépend essentiellement du corps de base. Ainsi, sur le corps des réels on peut avoir quelques surprises (regarder les "courbes" planes d'équations $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ ou $X^2 + Y^2 = 0$). Le cas le plus agréable est celui où k est algébriquement clos (par exemple $k = \mathbf{C}$). C'est le cadre dans lequel nous travaillerons. Ce choix, qui revient, en fait, à s'intéresser davantage aux équations des variétés qu'à leurs points, est partiellement justifié par le fait que l'on peut plonger n'importe quel corps dans un corps algébriquement clos.¹

Bien entendu le point de vue inverse est tout aussi intéressant. Il conduit par exemple à la géométrie algébrique réelle (cas $k = \mathbf{R}$) ou à l'arithmétique (cas $k = \mathbf{Q}$, voire \mathbf{Z} , ou k fini). Ainsi les points sur \mathbf{Z} de $X^n + Y^n - Z^n = 0$ sont l'objet de la célèbre conjecture (théorème?) de Fermat. De même la recherche des points rationnels de la courbe $Y^2 - X(X-1)(X-\lambda) = 0$ est un domaine très ouvert (arithmétique des courbes elliptiques). Deux grandes conjectures concernant ces questions ont récemment été résolues : conjecture de Weil (Deligne, 1974) et de Mordell (Faltings, 1982). Mais ceci est une autre histoire.

f) Par ailleurs les variétés algébriques se rencontrent dans de nombreux domaines des mathématiques. Un exemple simple est celui des matrices et des groupes classiques. Ainsi le groupe

$$SL_n(k) = \{A \in M_n(k) \mid \det(A) = 1\}$$

est une variété algébrique dans l'espace affine des matrices (car le déterminant est un polynôme). De même le groupe orthogonal :

$$O_n(k) = \{A \in M_n(k) \mid {}^tAA = I\},$$

ou encore l'ensemble des matrices de rang $\leq r$ sont des variétés algébriques affines. Les notions de géométrie algébrique que nous allons introduire (par exemple la dimension au chapitre IV, les espaces tangents au chapitre V) donnent des outils fondamentaux pour étudier ces variétés.

¹Dans le cas où le corps de base est \mathbf{R} ou \mathbf{C} les objets que nous étudions apparaissent aussi dans d'autres branches des mathématiques (topologie, géométrie différentielle,...). En fait, la différence entre ces disciplines se situe plus au niveau des fonctions que l'on y reconnaît pour bonnes qu'à celui des objets (cf. Ch. III).

g) Enfin, signalons un exemple de niveau de complexité supérieur : les familles de variétés algébriques (par exemple l'ensemble des droites de k^3 , ou l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension d d'un espace de dimension n) peuvent souvent être elles-mêmes munies de structures de variétés algébriques (un peu comme l'ensemble des parties d'un ensemble est aussi un ensemble) et on peut alors leur appliquer les techniques de la géométrie algébrique.

2. Quelques problèmes

L'un des principes de ce cours est de prendre comme point de départ des problèmes simples dans leur énoncé mais dont la solution nécessite la mise en œuvre de techniques de géométrie algébrique assez élaborées (les faisceaux, cf. Ch. III, la cohomologie, cf. Ch. VII). En voici deux exemples : le problème de Bézout et le problème des courbes unicursales. On abordera aussi au chapitre X le problème, moins élémentaire, de la liaison des courbes gauches.

a. Intersections : le théorème de Bézout

Si on étudie les intersections d'une conique (penser à une ellipse) et d'une droite du plan on voit qu'on a au plus deux points d'intersection. Avec une droite et une cubique on a au plus trois points, avec deux coniques, au plus quatre points. La question naturelle est alors de se demander si deux courbes planes C et C' , de degrés d et d' , ont toujours au plus dd' points d'intersection et dans quel cadre se placer pour obtenir le théorème idéal : deux telles courbes ont exactement dd' points d'intersection. Il y a manifestement quatre obstructions à la validité de cette dernière assertion :

a) Les deux courbes peuvent avoir une composante commune, ainsi les courbes d'équations $XY = 0$ et $X(Y - X) = 0$ ont en commun l'axe des y (i.e. la courbe $X = 0$) et l'intersection est alors infinie. On devra donc supposer les courbes C et C' sans composante commune et avoir auparavant précisé cette notion de composante (cf. Ch. I).

b) Si k est le corps des réels on sait bien que l'assertion n'est pas toujours vraie. Par exemple le cercle $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ et la droite $X = 2$ ne se coupent pas dans \mathbf{R}^2 . En revanche, dans \mathbf{C}^2 ils ont bien deux points d'intersection : $(2, \mp i\sqrt{3})$. On supposera donc, pour avoir le théorème idéal, que le corps de base est algébriquement clos (cf. aussi 1.e).

c) Un autre contre-exemple essentiel au théorème idéal est celui de deux droites parallèles, ou d'une hyperbole et de son asymptote qui n'ont pas de point d'intersection. Là encore on voit bien ce qu'il faut faire pour surmonter cette difficulté : introduire des points à l'infini. Pour nous, cela signifiera qu'il faut travailler dans l'espace projectif et non dans l'espace affine (cf. Ch. II).

d) Enfin, si l'on reprend le cas d'un cercle et d'une droite il est encore un cas où le nombre de points d'intersection n'est pas égal à deux, c'est le cas où la droite est tangente au cercle : les courbes $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ et $X = 1$ se coupent en l'unique point $(1, 0)$. Cependant si on résout le système formé par ces deux équations on tombe sur la relation $y^2 = 0$, de sorte que la solution $y = 0$ est racine double : le point d'intersection est multiple et il doit compter pour deux. De même, si on coupe la cubique $Y^2 - X^3 = 0$ par la droite $Y = tX$ on trouve deux points seulement : (t^2, t^3) et $(0, 0)$, mais ce dernier est double (ceci est dû à la singularité de la cubique au point considéré, cf. Ch. V). Bref, il va falloir définir soigneusement la multiplicité d'intersection de deux courbes en un point (le lecteur se penchera sur le cas du trifolium et du quadrifolium en $(0, 0)$ pour se convaincre que ce n'est pas entièrement évident, cf. Ch. VI).

Avec toutes ces précautions on aura alors le résultat idéal (cf. Ch. VI) :

Théorème (de Bézout). *Soient C, C' deux courbes projectives planes de degrés d, d' , définies sur un corps algébriquement clos, sans composante commune. Alors, le nombre de points d'intersection de C et C' , comptés avec leurs multiplicités, est égal à dd' .*

Ainsi le trifolium et le quadrifolium ont en commun, outre le point $(0, 0)$ de multiplicité 14, quatre points réels (simples) à distance finie et deux points imaginaires à l'infini, chacun de multiplicité 3, ce qui donne bien 24 en tout.

b. Paramétrages, courbes unicursales, genre

Soit C une courbe plane d'équation $f(X, Y) = 0$. Un paramétrage rationnel de C est donné par deux fractions rationnelles $\alpha(T)$ et $\beta(T)$ telles que l'on ait identiquement $f(\alpha(T), \beta(T)) = 0$. Le calcul de l'intersection de la cubique cuspidale $Y^2 - X^3 = 0$ avec une droite passant par l'origine effectué ci-dessus fournit un exemple de paramétrage rationnel :

$x = t^2, y = t^3$ et la question fondamentale est de déterminer les courbes qui admettent un tel paramétrage (ces courbes sont dites rationnelles ou unicursales). Voici deux raisons (outre la possibilité de construction effective dans le cas réel) qui justifient l'intérêt porté à ces courbes :

1) *Les équations diophantiennes.* Il s'agit d'équations polynomiales dont on cherche des solutions entières. Lorsqu'on a des paramétrages c'est facile. Par exemple, cherchons à résoudre l'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ dans \mathbf{Z} , ou encore, ce qui revient au même, $(x/z)^2 + (y/z)^2 - 1 = 0$ dans \mathbf{Q} . On cherche donc les points rationnels du cercle $X^2 + Y^2 - 1 = 0$. Pour cela on paramètre ce cercle par $\cos u, \sin u$, ou mieux, avec $t = \operatorname{tg}(u/2)$, par

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

et on a ainsi en prenant $t \in \mathbf{Q}$ tous les points rationnels du cercle (car, réciproquement, t est donné par $t = y/(1 + x)$). On en déduit aussitôt les points entiers de $X^2 + Y^2 = Z^2$: $x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2$ avec $a, b \in \mathbf{Z}$.

2) *Calcul de primitives.* Ce problème, s'il a perdu de son importance aujourd'hui, a été à l'origine du développement de la géométrie algébrique au XIX^e siècle, avec notamment les travaux d'Abel et de Riemann.

Considérons une primitive de la forme

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx.$$

Elle met en jeu la conique $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ (i.e. $y^2 = ax^2 + bx + c$). Plus généralement soit $y = \varphi(x)$ une fonction algébrique (i.e. une fonction qui comporte, comme ci-dessus, des radicaux). On suppose que $y = \varphi(x)$ est la forme résolue d'une équation implicite $f(x, y) = 0$ avec f polynomiale. On cherche la primitive

$$\int g(x, \varphi(x)) \, dx$$

où g est une fraction rationnelle.

(Par exemple, le cas $\varphi(x) = \sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}$, que l'on rencontre lorsqu'on calcule la longueur d'un arc d'ellipse, a donné naissance à la théorie des intégrales et des fonctions elliptiques.)

Si la courbe $f(x, y) = 0$ admet une paramétrisation rationnelle $x = \alpha(t), y = \beta(t)$ l'intégrale devient alors :

$$\int g(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) \, dt$$

$\dim_x V$ 90
 $\varphi^{-1}(y)$ 91
 $M_n(k), M_{p,q}$ 100
 $O(n, k)$ 101
 $G_{n,p}$ 102

Chapitre V

$k[\epsilon]$ 104
 $\text{Spec } k[\epsilon], P_\epsilon$ 105
 $\text{Def}(V, x), \text{Def}(\Gamma(V), x)$... 105
 $\text{Der}_k(A, M)$ 105
 $\text{Def}(\varphi, x)$ 106
 $T_x(V), T_x(\varphi)$ 106
 $d_a(F_1, \dots, F_r)$ 107
 $\mu_x(C), \mu_P(F)$ 113

Chapitre VI

$\mathcal{O}_{Z,P}$ 120
 $\mu_P(Z)$ 120
 $\mu_P(F, G)$ 124

Chapitre VII

$H^i(X, \mathcal{F}), H^i(\mathcal{F})$ 135
 d^i 136
 U_{i_0, \dots, i_p} 138
 $C^p(U, \mathcal{F}), H^{\vee p}(U, \mathcal{F})$ 139
 $h^i \mathcal{F}$ 148

Chapitre VIII

$\chi(\mathcal{F})$ 154
 d, g, p_a 156, 157
 $H_{d,g}$ 159
 $K(X)$ 163
 $\text{deg } D$ 165
 $\text{Div}(C)$ 165
 $v_P(f)$ 165
 $\text{div}(f)$ 166
 $P(C), \text{Pic}C, \text{Pic}^0 C$ 167
 $\mathcal{O}_C(D), \mathcal{L}(D)$ 167

Chapitre X

$H_*^i \mathcal{F}$ 204
 $\text{sat}(I)$ 206
 $\text{dp}(M)$ 208
 s_0, e 213
 E^\vee 218
 $\text{Ext}^1, \text{Ext}^2$ 220
 $(I : J)$ 222

Mémento

$A \times B$ 238
 $I + J, IJ$ 233
 A^* 235
 $A_S, S^{-1}A, A_f$ 236
 $\text{Fr}(A)$ 236
 A_p 237
 $M \otimes_A N, x \otimes y$ 238
 $f \otimes_A B$ 239
 $N_{[A]}$ 239
 $\partial_K(L)$ 241
 $\mathcal{H}(C)$ 243

Appendice

$\text{Spm}(A)$ 245
 $\text{Proj}(S)$ 246
 X_{red} 246

Recueil de problèmes

$X \times Y$ 251
 Δ 252
 $G(f)$ 252
 $\text{Spec } A$ 254

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.