TD

JEAN-PIERRE LECOUTRE

NAÏLA HAHEK

PHILIPPE PILIBOSSIAN

ANALYSE

- QCM et exercices corrigés
- 10 sujets d'examen corrigés
- Rappels de cours

6e ÉDITION

DUNOD

Tout le catalogue sur
www.dunod.com

ÉDITEUR DE SAVOIRS

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-075924-8

Sommaire

Avant-propos

Pour se familiariser avec l'usage de l'outil mathématique, indispensable à toute formalisation en économie, nous proposons une série d'exercices, regroupés en deux volumes : *Analyse* et *Algèbre*. Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de licence d'économie-gestion ou d'AES.

Les huit premiers chapitres présentent la même structure. Au début, les principales notions de cours et les résultats importants sont rappelés de façon succincte dans « L'essentiel » du cours. Un bref texte introductif indique les points essentiels qui vont être abordés et présentés dans le chapitre. Il ne s'agit pas d'un résumé de cours, mais seulement d'un avant-propos où on essaie d'expliquer, dans un langage peu formalisé, le fondement et l'utilité des notions définies ensuite de façon plus formelle.

Un certain nombre d'affirmations constituent le paragraphe « Q.C.M ». La réponse en vrai-faux permet à l'étudiant de vérifier s'il a bien compris les principaux points de cours. Il doit exercer sa vigilance face à des affirmations, parfois simples, mais qui peuvent contenir un piège.

Les questions de « Réflexion » qui sont proposées ensuite ont essentiellement pour but de mettre l'accent sur certaines notions un peu délicates du cours. Il faut être attentif aux commentaires qui figurent dans la solution de l'exercice, en fin de chapitre.

Les exercices d'« Entraînement » permettent enfin à l'étudiant de tester sa capacité à passer de la théorie à la pratique. Ils suivent l'ordre de progression du cours et sont précédés d'un titre indiquant la principale notion à laquelle ils se rapportent. Une rubrique « Analyse de l'énoncé et conseils » précise la démarche à suivre et les résultats de cours à utiliser pour résoudre l'exercice proposé.

Les solutions très détaillées sont regroupées en fin de chapitre, très souvent assorties de commentaires. Certaines solutions se concluent par un énoncé d'exercice identique (« Vous avez compris ? ») et la seule réponse figure aussitôt après.

En fin d'ouvrage, les textes récents des examens de 1re année de la licence d'économie et gestion de l'université Paris II Panthéon-Assas permettent de retrouver les principaux points abordés dans les chapitres précédents. L'étudiant peut ainsi évaluer le niveau de difficulté de ce qui peut être demandé à une épreuve d'examen. Les corrigés sont regroupés après les énoncés.

TD 1 Fonction numérique d'une variable réelle

COURS

L'ESSENTIEL

On trouvera dans ce chapitre la définition et les principales caractérisations d'une **fonction numérique d'une variable réelle**. L'étude d'une fonction commence par la détermination de son **ensemble de définition**, formé par un ou plusieurs **intervalles**. On cherche ensuite à réduire l'ensemble d'étude en examinant si la fonction est **périodique**, **paire** ou **impaire**. On introduit alors la notion très importante de **continuité**. La recherche de points de discontinuité éventuels consiste à examiner la limite de la fonction en certains points particuliers. Dans de très nombreux cas, c'est l'utilisation des **équivalents** qui permet de calculer simplement cette limite. On complète l'étude par la mise en évidence des intervalles où cette fonction est **monotone, croissante** ou **décroissante** et par la recherche des limites aux bornes des intervalles qui constituent l'ensemble de définition ou de monotonie. Parmi les résultats importants de ce chapitre, on doit noter que l'image d'un intervalle fermé, par une fonction continue, est un intervalle fermé. De plus, toutes les valeurs de cet intervalle image sont atteintes par cette fonction. Dans le cas où elle est strictement monotone sur cet intervalle, elle admet alors une **fonction réciproque**. Notons que seules les bijections admettent des applications réciproques.

1 Définitions et qualifications d'une fonction numérique

Définition. On appelle *fonction numérique d'une variable réelle* toute application f d'une partie E de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La notation usuelle est : $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$

et, pour tout réel x de E, on écrit : $f : x \longmapsto f(x)$

Fonction paire ou impaire. Une fonction f définie sur E est dite :

- *paire* si, pour tout $x \in E$, on a $-x \in E$ et $f(-x) = f(x)$;
- *impaire* si, pour tout $x \in E$, on a $-x \in E$ et $f(-x) = -f(x)$.

Fonction périodique. Une fonction f définie sur E est dite *périodique* s'il existe un nombre réel non nul T tel que, pour tout $x \in E$:

$$x + T \in E \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Ce nombre T est la *période* de f s'il est le plus petit réel positif qui satisfait cette condition.

Fonction bornée. Une fonction f définie sur E est dite *bornée* s'il existe un nombre positif M tel que, pour tout $x \in E$, on ait $|f(x)| \leq M$.

Fonction monotone. Une fonction f définie sur E est dite :

- *croissante* sur E si, pour tous x, $x' \in E$ tels que $x < x'$, on a $f(x) \leq f\left(x'\right)$;
- *décroissante* sur E si, pour tous $x, x' \in E$ tels que $x < x'$, on a $f(x) \geq f\left(x'\right)$;
- *monotone* sur E si elle est croissante ou décroissante sur E.

2 Composition d'applications

Si f est une fonction définie sur E et g une fonction définie sur F, avec $F \supset f(E)$, on peut définir la *fonction composée* de f par g, notée $g \circ f$, et qui associe à tout $x \in E$ le nombre réel $g\left[f(x)\right]$.

Il faut souligner que la composition des applications n'est pas une opération commutative, c'est-à-dire qu'en général $g \circ f$ est différente de $f \circ g$.

3 Continuité

Définition. Une fonction numérique f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est *continue* en un point x_0 de I si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad \text{existe avec} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que f est *continue à droite* (resp. *à gauche*) si :

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\text{resp. } f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0)\right)$$

Une fonction est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ si elle est continue en tout point de l'ouvert $]a,b[$ et si elle est continue à gauche en a et à droite en b.

Théorème. Si une fonction f est continue sur un intervalle I, alors l'ensemble image $f(I)$ est lui aussi un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle fermé $[a,b]$ par une fonction continue f est un intervalle fermé $[\alpha,\beta]$ avec :

$$\alpha = \min_{a \le x \le b} f(x) \quad \text{et} \quad \beta = \max_{a \le x \le b} f(x)$$

La fonction f est bornée et elle atteint ses bornes, ainsi que toutes les valeurs intermédiaires comprises entre ses bornes.

Théorème. Si f est une fonction continue en un point a et g une fonction continue en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en a.

COURS

4 ● Application réciproque

Définition. Une application f de E dans F admet une *application réciproque*, notée f^{-1}, si, et seulement si, f est une bijection de E dans F. Pour tout y fixé dans F, l'équation $f(x) = y$ admet alors une solution unique x dans E, notée $x = f^{-1}(y)$.

Théorème. Une fonction continue sur un intervalle I admet une application réciproque sur I si, et seulement si, elle est strictement monotone sur I.

5 ● Formes indéterminées algébriques

Il existe quatre *formes indéterminées algébriques*, c'est-à-dire d'expressions dont la limite ne peut pas être déterminée immédiatement :

- forme $\frac{0}{0}$: toute expression $\frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x) \to 0$ et $g(x) \to 0$;
- forme $\frac{\infty}{\infty}$: toute expression $\frac{f(x)}{g(x)}$ avec $|f(x)| \to +\infty$ et $|g(x)| \to +\infty$;
- forme $0 \times \infty$: toute expression $f(x)g(x)$ avec $f(x) \to 0$ et $|g(x)| \to +\infty$;
- forme $\infty - \infty$: toute expression $f(x) - g(x)$ avec $f(x) \to +\infty$ et $g(x) \to +\infty$.

6 Fonctions équivalentes

Deux fonctions numériques f et g définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sont dites *équivalentes* quand x tend vers a, avec $a \in I$, s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage $V(a)$ de a telle que :

$$f(x) = g(x)\left[1 + \varepsilon(x)\right] \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} \varepsilon\left(x\right) = 0$$

Si $g(x) \neq 0$, pour tout $x \in V(a) \cap I$, on écrit plus simplement :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

C'est une relation d'équivalence, notée $f \sim g$. Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$, mais on n'a pas en général $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

Dans le cas d'un polynôme, il est équivalent à son monôme de plus bas degré au voisinage de zéro et à son monôme de plus haut degré au voisinage de l'infini.

Une fraction rationnelle est équivalente au voisinage de zéro au rapport des monômes de plus bas degré et, au voisinage de l'infini, au rapport des monômes de plus haut degré.

Q.C.M

	Vrai	Faux
1. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.	○	○
2. Le produit de deux fonctions monotones sur un même ensemble E est une fonction monotone sur E.	○	○
3. La composée $g \circ f$ de deux fonctions f et g décroissantes sur leur ensemble de définition est croissante.	○	○
4. Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle, les fonctions $f+g$ et fg sont continues sur le même intervalle.	○	○
5. La réciproque d'une application continue et strictement croissante sur un intervalle est aussi continue et strictement croissante.	○	○
6. Si la fonction f admet une limite finie l, non nulle, quand x tend vers a, alors $f(x) \sim l$.	○	○
7. Si on a les équivalences $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors on a aussi l'équivalence $f_1 \circ f_2 \sim g_1 \circ g_2$.	○	○
8. Si f et g sont deux fonctions équivalentes quand la variable x tend vers $+\infty$, alors $f(x)-g(x)$ tend vers 0.	○	○

RÉFLEXION

9. On considère les applications $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^2$. Déterminer les applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$. Les applications f et g sont-elles réciproques l'une de l'autre ?

10. Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{mx} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{mx^3 + (m-1)x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1} + x + \frac{2}{x}$$

EXERCICES

où m est un paramètre réel. Indiquer pour quelle(s) valeur(s) de m l'expression $h(x) = g(x) - f(x)$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

11. À partir de l'expression $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$, définir une fonction f qui soit continue sur tout $\mathbb{R}$.

12. La fonction f est définie à partir de :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ a - \dfrac{b}{x} & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

Déterminer les paramètres réels a et b pour que f soit continue partout.

ENTRAÎNEMENT

Intervalles de $\mathbb{R}$

13. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ définis par les conditions suivantes sur x :

$$5x + 2 \geq -3 \quad x^2 + 1 \leq 1 \quad |x - 1| \leq 4 \quad 2\sqrt{2x - x^2} < 1 \quad \big|x + |x|\big| \geq 2$$

Analyse de l'énoncé et conseils. On remplace la condition imposée par une condition équivalente qui ne fait plus intervenir de valeur absolue ou de radical.

14. En utilisant des valeurs absolues, exprimer sous forme de conditions sur x les relations d'appartenance suivantes :

$$x \in [-1, 5] \quad x \in]1, 3[\quad x \in]-4, -2[$$

Analyse de l'énoncé et conseils. Pour que x appartienne à un intervalle, il faut que la distance de ce point au milieu de l'intervalle soit inférieure à sa demi-longueur.

15. À partir des intervalles $A =]-\infty, -1]$, $B = [-1, 3]$, $C =]-1, 5[$ et $D = [-2, +\infty[$, déterminer les ensembles A^c, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $A \cup D$, $B \cup C$, $(B \cap C) \cup (B \cap D)$, $A^c \cup C^c$ et $A^c \cap D^c$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit d'être attentif à la forme des intervalles où les extrémités sont comprises ou non.

16. Pour $n > 0$, on définit les intervalles :

$$A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right], \quad B_n = \left[0, \frac{1}{n}\right[\quad \text{et} \quad C_n = \left]-\frac{1}{n}, 0\right[.$$

Déterminer les ensembles :

$$E_p = \bigcap_{k=1}^{p} A_k, \quad F_p = \bigcup_{k=1}^{p} A_k, \quad G_p = \bigcap_{k=1}^{p} B_k \quad \text{et} \quad H_p = \bigcap_{k=1}^{p} C_k.$$

Étudier les limites de ces ensembles quand p tend vers l'infini.

Analyse de l'énoncé et conseils. Il faut examiner l'inclusion de deux ensembles d'indices successifs k et $k+1$ et en tirer une conclusion quant à leur union ou leur intersection.

Ensemble de définition

17. Les expressions $f(x)$ ci-après définissent une fonction f sur un ensemble D que l'on demande de déterminer à chaque fois :

a) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$; b) $\sqrt{x^3-1}$;

c) $\sqrt[3]{1-x^2}$; d) $\sqrt{x^2+x-2}$;

e) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; f) $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$;

g) $\sqrt{-x}+(2+x)^{-1/2}$; h) $\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$;

i) $\ln\dfrac{2+x}{2-x}$; j) $\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$.

Analyse de l'énoncé et conseils. L'ensemble de définition est obtenu à partir de celui des fonctions usuelles : dénominateur non nul pour une fraction, argument positif pour une racine carrée ou un logarithme...

Parité, périodicité, graphe

18. Les expressions $f(x)$ ci-après définissent une fonction f sur un ensemble D où l'on demande d'examiner si elles sont paires ou impaires :

a) $\sqrt{1-|x|}$; b) $\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

c) $\left|x^2-x\right|$; d) $|x+1|-|x-1|$;

e) $\dfrac{x-1/x}{x+1/x}$; f) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

EXERCICES

Analyse de l'énoncé et conseils. Il suffit de remplacer x par $-x$ dans l'expression de $f(x)$ et de vérifier si on retrouve comme nouvelle expression $f(x)$ ou $-f(x)$.

19. Les expressions $f(x)$ ci-après définissent une fonction f sur un ensemble D où l'on demande d'examiner si elles sont périodiques, paires ou impaires, puis de les représenter graphiquement :

a) $E(x)$ qui représente la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x ;

b) $2x - E(x),\ x \in [-2,2]$.

Analyse de l'énoncé et conseils. L'expression de $E(x+1)$ à l'aide de $E(x)$ peut permettre de déceler une périodicité éventuelle des fonctions précédentes et de simplifier la représentation graphique.

Composition d'applications

20. Déterminer l'application composée $f \circ g$, avec :

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

Analyse de l'énoncé et conseils. L'application $f \circ g$ est définie par $(f \circ g)\ (x) = f[g(x)]$, donc il faut que x appartienne au domaine de définition de g et que $g(x)$ appartienne à celui de f. Ayant ainsi déterminé les valeurs de x pour lesquelles $f \circ g$ existe, on remplace x par $g(x)$ dans l'expression de $f(x)$ pour obtenir celle de $(f \circ g)\ (x)$.

Application réciproque

21. Déterminer la réciproque des fonctions f définies par les expressions $f(x)$ ci-après :

a) $2x+1$; b) $\sqrt[3]{1-x^3}$;

c) $\ln \dfrac{x-1}{x+1}$; d) $f(x) = x$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = x^2$ pour $x > 0$.

Analyse de l'énoncé et conseils. La résolution de l'équation $y = f(x)$, où x est l'inconnue, conduit à une solution unique $x = g(y)$ si la fonction f est inversible, et la fonction g obtenue est alors la réciproque f^{-1}.

Calcul de limites

22. Déterminer les limites des expressions $f(x)$ suivantes, sans utiliser de fonctions équivalentes :

a) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3-2}$, $x \to +\infty$;

b) $\dfrac{x^3+3x^2-3x-1}{x^2+x-2}$, $x \to 1$;

c) $x+1+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x \to 0$;

d) $\dfrac{x\sqrt{x}+x}{x^2+4x+1}$, $x \to +\infty$;

e) $x-\sqrt{x^2-x}$, $x \to +\infty$;

f) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$, $x \to +\infty$;

g) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}$, $x \to 1$;

h) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$, $x \to 0$;

i) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$, $x \to a$, avec $a>0$;

j) $\sqrt{x(x+a)}-x, x \to +\infty$, avec a réel quelconque ;

Analyse de l'énoncé et conseils. Dans cet exercice, on demande de ne pas utiliser les fonctions équivalentes pour déterminer les limites, bien que cette méthode soit en général plus rapide. Dans le cas d'une fraction rationnelle, si le numérateur et le dénominateur s'annulent simultanément, c'est qu'il y a une simplification possible après factorisation. Quand l'expression est un rapport de fonctions puissances, la limite pour x tendant vers l'infini s'obtient en divisant numérateur et dénominateur par le terme d'exposant le plus élevé. La présence de radicaux conduit presque toujours à utiliser les identités remarquables permettant de faire disparaître la forme indéterminée initiale.

Fonctions équivalentes

23. Pour chacune des expressions $f(x)$ suivantes, déterminer une fonction équivalente, puis la limite.

a) $\dfrac{\left(x^2+3x^3\right)(2x+1)}{2x+x^4}$, $x \to +\infty$;

b) $\dfrac{\left(2x^2+x^4\right)(2+x)}{x+2x^3}$, $x \to 0$;

c) $\sqrt{x^3+x+2}-x\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}, x \to +\infty$;

d) $\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x-2}}$, $x \to 2$

EXERCICES

Analyse de l'énoncé et conseils. Avant d'étudier la limite en un point, il faut vérifier si la fonction est définie au voisinage de ce point. Dans le cas contraire, on n'étudie que la limite à gauche ou à droite. Toute fonction polynôme est équivalente à son terme de plus haut degré au voisinage de l'infini et à son terme de plus bas degré au voisinage de zéro. Cependant, les équivalents peuvent disparaître par différence ; dans le cas d'expressions avec radicaux, on peut multiplier par la quantité conjuguée afin d'éviter cet inconvénient. Enfin, si x tend vers un réel non nul a, l'équivalent de f s'exprimera à l'aide d'une puissance de $u = x - a$.

Continuité

24. Les expressions $f(x)$ ci-après définissent une fonction f dont on demande de déterminer l'ensemble de continuité et la nature des points de discontinuité éventuels.

a) $\dfrac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x+1}}$; b) $\dfrac{2x^3 + 2x^2 - x - 1}{|x+1|}$;

c) $\dfrac{x^2 + x}{2\sqrt{x^2}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$;

d) $\dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = 1$.

Analyse de l'énoncé et conseils. Après avoir déterminé l'ensemble de définition de la fonction f, on étudie sa continuité aux bornes finies des intervalles qui composent cet ensemble. Si une fonction n'est pas définie en un point a, mais avec des limites à gauche et à droite de ce point égales à ℓ, on peut prolonger cette fonction par continuité en définissant $f(a) = \ell$.

SOLUTIONS

1. Vrai. Si f et g sont deux fonctions impaires définies sur un même ensemble E, pour tout x de E, leur produit vérifie :

$$(fg)(-x) = f(-x)\,g(-x) = \left[-f(x)\right]\left[-g(x)\right] = f(x)\,g(x) = (fg)(x)$$

2. Faux. Soit par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = x-1$; les fonctions f et g sont monotones sur $\left[0,1\right]$ mais leur produit fg défini par $(fg)(x) = x^2 - x$ est décroissant sur $\left[0,1/2\right]$, puis croissant sur $\left[1/2,1\right]$, donc non monotone sur $\left[0,1\right]$.

3. Vrai. Soit deux réels x et x' tels que $x < x'$; la fonction f étant décroissante, on a $f(x) \geq f\left(x'\right)$. Comme g est décroissante, on en déduit $g\left[f(x)\right] \leq g\left[f\left(x'\right)\right]$, soit $(g \circ f)(x) \leq (g \circ f)\left(x'\right)$.

4. Vrai. Ces propriétés sont des conséquences immédiates des opérations sur les limites.

5. Vrai. Soit f continue et strictement croissante sur l'intervalle I et y et y' deux réels de $f(I)$ tels que $y < y'$. Nous allons établir que la réciproque f^{-1} est strictement croissante. Les nombres réels $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}\left(y'\right)$ sont tels que $y = f(x)$ et $y' = f\left(x'\right)$ et on a donc $f(x) < f\left(x'\right)$. Comme f est strictement croissante, cela implique que $x = f^{-1}(y) < x' = f^{-1}\left(y'\right)$, donc que f^{-1} est aussi strictement croissante.

6. Vrai. Propriété évidente puisque par hypothèse $\dfrac{f(x)}{l} \to 1$ quand $x \to a$.

7. Faux. Soit par exemple $f_1(x) = x^3 + x$, $g_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g_2(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$ avec $x \to +\infty$. On a bien $f_1(x) \sim g_1(x)$, $f_2(x) \sim g_2(x)$, mais $\left(f_1 \circ f_2\right)(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x} \sim \dfrac{1}{x}$ et $\left(g_1 \circ g_2\right)(x) = \left(\dfrac{x^2}{x^3+1}\right)^3 \sim \dfrac{1}{x^3}$.

8. Faux. Soit, par exemple, $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 - x$; ces deux polynômes sont équivalents, quand $x \to +\infty$, à leur terme de plus haut degré qui est x^2. Cependant, $f(x) - g(x) = x$ tend vers plus l'infini avec x.

9. Les applications f et g paraissent réciproques l'une de l'autre, puisqu'elles associent le carré ou la racine carrée d'un nombre. On a d'ailleurs $(g \circ f)\,(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, mais $g \circ f$ n'est pas l'application identique sur $\mathbb{R}$, car f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, pour tout x réel, $(f \circ g)\,(x) = \sqrt{x^2} = |\,x\,|$.

SOLUTIONS

Ces deux applications ne sont donc pas réciproques l'une de l'autre ; elles le seraient si elles étaient restreintes à $\mathbb{R}_+$.

10. Pour $m > 0$, le théorème des croissances comparées permet d'affirmer que $f(x)$ est un infiniment grand par rapport à $g(x)$. Pour $m = 0$, on a $f(x) = 1$ et $g(x) \sim x$, donc $h(x) \to +\infty$. Il reste à étudier le cas $m < 0$ où $f(x)$ est un infiniment petit, $h(x)$ ayant donc même limite que $g(x)$, qui est équivalent à $(m+1)x$ pour $m \neq -1$. Dans ce dernier cas, $h(x)$ est un infiniment grand. Enfin, pour $m = -1$ on obtient :

$$h(x) = \frac{-x^2 - 2x + 2}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{x} - e^{-x} \quad \to -1$$

C'est donc uniquement pour $m = -1$ que $h(x)$ admet une limite finie.

11. L'expression $f(x)$ n'est pas définie pour $x = 0$. Pour $x \to 0$, le dénominateur est équivalent à x donc $f(x)$ tend vers 1. Il suffit de poser alors $f(0) = 1$ et de conserver l'expression de $f(x)$ pour $x \neq 0$, afin d'obtenir une fonction f qui soit définie et continue partout. C'est ce qu'on appelle un *prolongement par continuité,* où on a défini la valeur $f(0)$ à partir de la limite de l'expression de $f(x)$ qui n'était pas définie pour $x = 0$.

12. C'est aux points $x = 2$ et $x = 4$ où l'expression de $f(x)$ change, que se pose le problème de la continuité de f. On calcule la limite à droite $f(2+0) = a - b/2$ qui doit être égale à $f(2) = 0$. De même, $f(4+0) = 1$ doit être égale à $f(4) = a - b/4$. Ces deux conditions de continuité permettent d'obtenir $b = 4$ et $a = 2$, soit $f(x) = 2 - 4/x$ pour $2 < x \leq 4$.

13. On remplace la condition initiale par une condition équivalente portant sur x :

$$5x + 2 \geq -3 \Leftrightarrow 5x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -1$$

ce qui correspond à l'intervalle $[-1, +\infty[$. La condition $x^2 + 1 \leq 1$ n'est réalisée que pour $x = 0$, soit l'intervalle $[0, 0]$. On obtient les équivalences :

$$|x - 1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5$$

soit l'intervalle $[-3, 5]$. Le terme sous radical doit être positif, d'où les équivalences :

$$2\sqrt{2x - x^2} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x - x^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 \leq x\,(2 - x) \quad \text{et} \quad 0 < x^2 - 2x + \frac{1}{4}$$

la première condition est vérifiée pour $0 \leq x \leq 2$ et la seconde s'écrit $(x-1)^2 - \dfrac{3}{4} > 0$, soit $|x - 1| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ces conditions réunies définissent les intervalles $\left[0, 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right[$ et $\left]1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 2\right]$.

Le nombre $x+|x|$ est positif, donc la condition imposée s'écrit $x+|x|\geq 2$. Pour $x\leq 0$, on obtient $x+|x|=0$ et cette condition n'est donc pas vérifiée. Pour $x>0$, elle est équivalente à $2x\geq 2$, d'où l'intervalle $[1,+\infty[$.

Vous avez compris ?

Déterminer les intervalles définis par les conditions $\sqrt{x+1}<1$, *puis* $\big|x-|x|\big|<2$.

Réponses : $[-1,0[$ *et* $]-1,+\infty[$.

14. Le milieu de l'intervalle $[a,b]$ est $\frac{1}{2}(a+b)$, donc l'appartenance de x à cet intervalle se traduit par la condition :

$$\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\leq\frac{b-a}{2}$$

On a en effet les équivalences suivantes :

$$a\leq x\leq b \iff a-\frac{a+b}{2}\leq x-\frac{a+b}{2}\leq b-\frac{a+b}{2}$$
$$\iff -\frac{b-a}{2}\leq x-\frac{a+b}{2}\leq\frac{b-a}{2}$$

Donc $x\in[-1,5]$ est équivalent à $|x-2|\leq 3$. Lorsque l'intervalle est ouvert, on remplace l'inégalité large par une inégalité stricte. Ainsi, $x\in\,]1,3[$ est équivalent à $|x-2|<1$ et $x\in\,]-4,-2[$ équivalent à $|x+3|<1$.

15. On obtient les intervalles suivants :

$$A^c=\,]-1,+\infty[,\ A\cap B=\{-1\},\ A\cap C=\varnothing,\ A\cap D=[-2,-1],$$
$$B\cap C=\,]-1,3],\ A\cup D=\mathbb{R},\ B\cup C=[-1,5[,\ (B\cap C)\cup(B\cap D)=B,$$
$$A^c\cup C^c=(A\cap C)^c=\mathbb{R},\ A^c\cap D^c=(A\cup D)^c=\varnothing$$

16. Pour tout entier positif k on a la relation d'inclusion :

$$A_{k+1}=\left[0,\frac{1}{k+1}\right]\subset\left[0,\frac{1}{k}\right]=A_k$$

L'intersection de ces deux ensembles se réduit donc au plus petit et l'union au plus gros, soit :

$$E_p=A_p=\left[0,\frac{1}{p}\right]\quad\text{et}\quad F_p=A_1=[0,1]$$

Comme 0 appartient à A_p pour tout entier p, cela reste vrai à la limite, donc :

$$E=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=\{0\}\quad\text{et}\quad F=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=A_1=[0,1]$$

SOLUTIONS

On a également l'inclusion $B_{k+1} \subset B_k$, donc $G_p = B_p = \left[0, \frac{1}{p}\right[$. On a encore 0 qui appartient à B_p pour tout entier p, donc même si $\frac{1}{p}$ tend vers zéro ce point est encore dans l'ensemble limite, soit :

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \{0\}$$

En raison de l'inclusion $C_{k+1} \subset C_k$, on a $H_p = C_p = \left[-\frac{1}{p}, 0\right[$. Cette fois par contre le point 0 est exclu de tous les intervalles H_p, donc il en est de même à la limite et :

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \varnothing$$

17. a) Le dénominateur se factorise en $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, donc $D = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$. Cependant, le numérateur se factorise aussi par $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, donc on peut simplifier la fraction par $x+1$ pour $x \neq -1$, soit $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, et prolonger cette fonction par continuité en posant $f(-1) = -\frac{1}{4}$.

b) Le terme sous le radical s'écrit $x^3 - 1 = (x-1)\ (x^2 + x + 1)$, donc est positif pour x supérieur à 1, soit $D = [1, +\infty[$.

c) S'agissant d'une racine cubique, elle est toujours définie, donc $D = \mathbb{R}$.

d) Le terme sous radical s'écrit $x^2 + x - 2 = (x-1)\ (x+2)$, qui est positif en dehors de l'intervalle des racines, soit $D =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

e) Le terme sous radical doit être positif, et il est du signe de $(x-1)(x+1)$. Par ailleurs, le dénominateur doit être non nul, d'où $D =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$.

f) Les termes sous radicaux doivent être tous deux positifs et le dénominateur non nul, soit $x + 1 \geq 0$ et $x - 1 > 0$, donc $D =]1, +\infty[$.

g) La fonction f est définie pour $-x \geq 0$ et $2 + x > 0$, soit $D =]-2, 0]$.

h) Chacun des termes sous radical doit être positif, soit $x \geq 0$ et $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x} + 2$. Les deux membres de l'inégalité étant positifs, on peut élever au carré et obtenir comme conditions équivalentes $x \geq 0$ et $x + 2 \geq x + 4 + 4\sqrt{x}$. La condition $2 + 4\sqrt{x} \leq 0$ étant impossible à réaliser, on a $D = \varnothing$.

i) L'argument du logarithme doit être positif, soit $(2+x)(2-x) > 0$ et $D =]-2, 2[$.

j) L'argument du logarithme est du signe de :

$$\left(x^2-3x+2\right)(x+1)=(x-1)(x-2)(x+1)$$

donc $D=\left]-1,1\right[\cup\left]2,+\infty\right[$.

18. a) Comme $|-x|=|x|$ on trouve $f(-x)=f(x)$, donc *f* est paire.

b) On obtient :

$$f(-x)=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}=-f(x)$$

donc *f* est impaire.

c) Comme $f(-x)=\left|x^2+x\right|$ ne peut pas s'exprimer à l'aide de $f(x)$, on en conclut que *f* n'est ni paire ni impaire.

d) On a :

$$f(-x)=|-x+1|-|-x-1|=|x-1|-|x+1|=-f(x)$$

donc *f* est impaire.

e) Pour x non nul :

$$f(-x)=\frac{-x+1/x}{-x-1/x}=\frac{x-1/x}{x+1/x}=f(x)$$

donc *f* est paire.

f) Pour $-1<x<1$:

$$f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$$

donc *f* est impaire.

Vous avez compris ?

Déterminer si les expressions ci-après définissent une fonction paire ou impaire sur son domaine de définition :

$$\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2} \quad \textit{et} \quad \mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x}$$

Réponses : la première fonction est paire et la seconde impaire.

19. a) La fonction partie entière, notée E, est définie partout. Elle est constante sur tout intervalle de la forme $\left[k,k+1\right[$, de valeur $E(x)=k$ sur cet intervalle, avec un saut pour tout entier relatif k. Elle est croissante au sens large sur tout $\mathbb{R}$, donc elle ne peut pas être périodique. Pour tout entier positif k, on a $E(x)=k$ pour x dans l'intervalle $\left]k,k+1\right[$ et $E(-x)=-k-1$

SOLUTIONS

car $-x$ est dans l'intervalle $]-k-1,-k[$, donc E n'est ni paire ni impaire. La figure 1.1 ci-après représente le graphe de E sur l'intervalle $[-3,4[$.

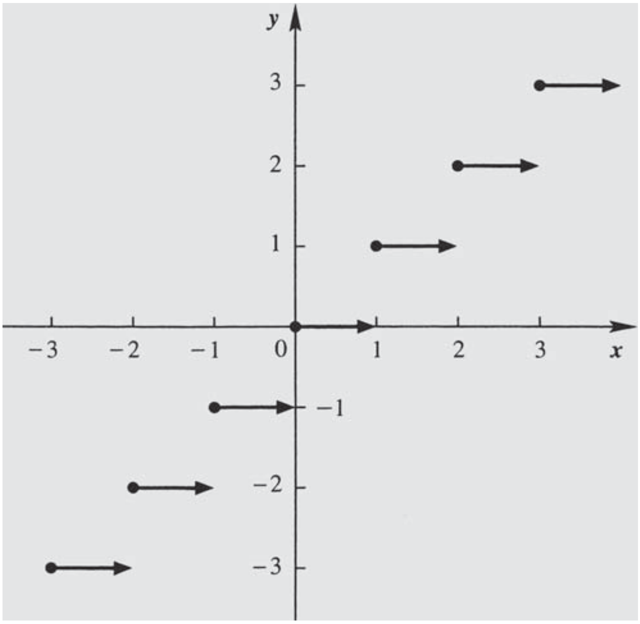

Figure 1.1

b) Compte tenu des propriétés de la fonction partie entière, cette fonction n'est ni paire, ni impaire, ni périodique. Cependant, on peut remarquer que sur tout intervalle $[k,k+1[$ où l'entier k peut prendre les valeurs $-2,-1$, 0 et 1, la fonction f a pour expression $f(x)=2x-E(x)=2x-k$, avec donc $f(k)=k$, et que $f(x+1)=2x+2-[E(x)+1]=f(x)+1$.

20. La fonction g est définie pour $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\geq 0$, soit sur $D_1=]-\infty,1]\cup[2,+\infty[$, et la fonction f pour $1-x^2\geq 0$. La fonction $f\circ g$ est donc définie pour tout x de D_1 tel que $1-g^2(x)\geq 0$, soit $x^2-3x+2\leq 1$ ou $x^2-3x+1\leq 0$, condition qui est équivalente à $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\leq 0$ ou $\left|x-\frac{3}{2}\right|\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$. Le domaine de définition de $f\circ g$ est donc l'intersection de D_1 et de $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$, soit $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2},1\right]\cup\left[2,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. Sur cet ensemble :

$$\left(f \circ g\right)(x) = f\left[g(x)\right] = \sqrt{1-\left[g(x)\right]^2} = \sqrt{-x^2+3x-1}$$

21. a) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et son image est $\mathbb{R}$. Pour tout réel y, on écrit l'équation $y = 2x+1$, qui admet la solution $x = \frac{1}{2}(y-1)$. La réciproque de f est donc définie pour tout réel x par $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1)$.

b) La fonction f est décroissante sur tout $\mathbb{R}$ et l'équation $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ admet pour solution $x = \sqrt[3]{1-y^3}$, donc $f^{-1} = f$. Ainsi, $f \circ f = f \circ f^{-1} = i$, application identique sur $\mathbb{R}$.

c) Cette fonction f est définie et monotone croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty,-1\right[$ et $\left]1,+\infty\right[$, qui ont comme intervalles images respectifs $\left]0,+\infty\right[$ et $\left]-\infty,0\right[$. Pour $y \neq 0$, l'équation $y = f(x)$ s'écrit :

$$y = \ln\frac{x-1}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad e^y = \frac{x-1}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1+e^y}{1-e^y}$$

La réciproque f^{-1} est donc définie pour x différent de zéro par :

$$f^{-1}(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$$

d) La fonction f est la fonction identité sur $\mathbb{R}_-$, donc il en est de même pour sa réciproque. Pour x positif, cette fonction est croissante et a pour image $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $y = x^2$ admettant la solution unique $x = \sqrt{y}$. La réciproque est donc :

$$f^{-1} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}_- \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

22. a) Comme il s'agit d'une fraction rationnelle avec la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, on divise numérateur et dénominateur par x^3 pour obtenir :

$$f(x) = \frac{x+1/x+1/x^3}{1-2/x^3} \to +\infty$$

résultat prévisible car le polynôme numérateur est de degré plus élevé que le polynôme dénominateur.

b) Nous obtenons la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire que 1 est racine du numérateur qui se factorise par $(x-1)\left(x^2+4x+1\right)$ et du dénominateur qui se factorise par $(x-1)(x+2)$. Pour x différent de 1, cette fraction se simplifie donc par :

SOLUTIONS

$$f(x)=\frac{x^2+4x+1}{x+2}\to\frac{6}{3}=2$$

c) Comme $\sqrt{x^2}=|x|$, il va falloir étudier deux cas selon le signe de x. Pour $x>0$:

$$f(x)=x+1+\frac{x}{x}\to 2$$

quand x tend vers zéro par valeurs positives.

Pour $x<0$:

$$f(x)=x+1-\frac{x}{x}\to 0$$

quand x tend vers zéro par valeurs négatives. Ces deux limites étant distinctes, on en conclut que $f(x)$ n'admet pas de limite quand x tend vers zéro.

d) On divise le numérateur et le dénominateur de cette forme indéterminée $\frac{0}{0}$ par x^2, soit :

$$f(x)=\frac{1/\sqrt{x}+1/x}{1+4/x+1/x^2}\to 0$$

e) On résout cette forme indéterminée $\infty-\infty$ en multipliant par la quantité conjuguée pour faire disparaître le radical :

$$f(x)=\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-x}\right)}{x+\sqrt{x^2-x}}=\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-1/x}}\to\frac{1}{2}$$

f) On divise numérateur et dénominateur par $\sqrt{x}$:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1/x+1/x\sqrt{x}}}}\to 1$$

g) On réduit au même dénominateur :

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{1-x^3}$$

Comme numérateur et dénominateur s'annulent pour $x=1$, on peut simplifier cette fraction par $x-1$, avec pour $x\neq 1$:

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=-\frac{x+2}{x^2+x+1}\to -1$$

h) On peut poser $1+x=u^6$, avec u qui tend vers 1 quand x tend vers zéro :

$$f(x)=\frac{u^3-1}{u^2-1}=\frac{(u-1)\left(u^2+u+1\right)}{(u-1)(u+1)}=\frac{u^2+u+1}{u+1}\to\frac{3}{2}$$

i) On factorise le dénominateur, puis on simplifie par $\sqrt{x}-\sqrt{a}$ pour $x\neq a$:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\to\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

j) On multiplie par la quantité conjuguée pour faire disparaître le radical :

$$f(x)=\frac{x(x+a)-x^2}{\sqrt{x(x+a)}+x}=\frac{ax}{x\left[1+\sqrt{1+a/x}\right]}\to\frac{a}{2}$$

Vous avez compris ?

Déterminer les limites des expressions suivantes pour $x\to+\infty$:

$$\frac{2x^2+3x-1}{3x^2+1},\quad\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^3+2x}}$$

Réponses : ces deux formes indéterminées $\dfrac{\infty}{\infty}$ tendent respectivement vers 2/3 et 1.

23. a) Au voisinage de l'infini, on remplace chaque polynôme par son terme de plus haut degré qui lui est équivalent :

$$f(x)\sim\frac{3x^3\times 2x}{x^4}=6$$

donc cette valeur 6 est la limite de $f(x)$.

b) Au voisinage de zéro, on remplace chaque polynôme par son terme de plus bas degré qui lui est équivalent :

$$f(x)\sim\frac{4x^2}{x}=4x$$

donc $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

c) Chacun des termes de la différence est équivalent à $x\sqrt{x}$, donc ces termes disparaissent. Nous allons multiplier par la quantité conjuguée :

$$f(x)=\frac{x^3+x+2-x^2(x+1/x)}{\sqrt{x^3+x+2}+x\sqrt{x+1/x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x^3+x+2}+x\sqrt{1+1/x}}\sim\frac{2}{2x\sqrt{x}}=x^{-3/2}$$

SOLUTIONS