MATHS

PSI

Sylvain Gugger

DUNOD

Conception et création de couverture : Dominique Raboin

Avec la collaboration scientifique de Sabrina Bergez,
professeur en classes préparatoires au lycée Saint-Louis (Paris)

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-076221-7

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de deuxième année de classe préparatoire PSI. Il s'agit d'un complément à leur cours de mathématiques mettant l'accent sur les notions essentielles à connaître et les méthodes à maîtriser, et permettant de les mettre en œuvre par le biais d'exercices.
Le livre est divisé en quatre parties, seize chapitres et une section de sujets d'annales.

Chaque chapitre commence par une partie nommée *L'essentiel du cours*. On y présente tous les points les plus importants du cours (définitions, propositions, théorèmes, remarques) à la manière d'une fiche. Les preuves ne sont volontairement pas incluses pour se concentrer sur les résultats à connaître, mais peuvent être trouvées dans votre cours au besoin. La première chose à faire pour apprendre un chapitre donné est de retenir cette partie.
On trouve ensuite une partie nommée *Les méthodes à maîtriser*. Elle présente les méthodes en rapport avec le chapitre en cours qu'il faut absolument savoir mettre en pratique. Chaque méthode est illustrée par un exemple corrigé en détail, et comporte un renvoi vers les exercices qui l'utilise. Il est très utile de refaire par soi-même les exemples de chaque méthode sur une feuille blanche lors des révisions du chapitre.

Si la méthode présentée est facilement programmable sur ordinateur, on trouvera ensuite un programme associé en langage Python.

Pour tester la connaissance du cours et des méthodes, chaque chapitre comporte ensuite une *Interro de cours*. Elle comporte généralement des questions de cours (énoncé d'une définition ou d'un théorème), des vrais/faux et des exemples d'application directe des méthodes. Cette partie permettra d'identifier rapidement les éventuelles lacunes sur le chapitre en cours.
La suite du chapitre est consacrée aux *Exercices*. On les a séparé en deux parties : dans la rubrique *S'entraîner*, on trouve un ensemble d'exercices couvrant tous les points du chapitre. Ce sont les plus faciles, en général, mais certaines méthodes étant plus difficiles à mettre en œuvre que d'autres, ils ne sont pas nécessairement de difficulté égale. La rubrique *Approfondir* contient d'autres exercices pour continuer de s'exercer, a priori un peu plus difficiles. Lorsque cela était possible, on a choisi des exercices proposés récemment à l'oral de concours d'entrée aux grandes écoles.
Enfin, la partie *Correction* comporte les corrigés détaillés de l'interrogation de cours et des exercices.

La dernière partie de l'ouvrage est consacrée à des sujets d'annales d'écrits récemment posés aux concours d'entrée aux grandes écoles. On a cherché à rassemblé une collection de sujets de difficulté moyenne couvrant l'ensemble du programme et illustrant les méthodes présentées dans cet ouvrage. Certaines parties ont été réécrites pour parfaitement correspondre au programme de la filière PSI (lorsqu'il s'agit de sujets d'autres filières ou antérieurs à la réforme des programmes) et les erreurs d'énoncé ont été corrigées ou sont signalées par une note de bas de page.
Chaque sujet est corrigé de manière détaillée, avec des remarques signalant les questions les plus classiques ou les pièges à éviter.

Durant tout l'ouvrage, on a utilisé un certain nombre de pictogrammes :

pour attirer l'attention du lecteur sur un ou plusieurs points spécifiques.

pour signaler un piège ou une erreur à éviter.

pour mettre l'accent sur une bonne manière de rédiger.

Un grand merci à Sabrina Bergez pour avoir relu en détail l'intégralité de l'ouvrage et pour ses nombreux conseils.

Table des matières

Partie 1 Algèbre

Partie 2 Topologie

Partie 3 Analyse réelle

Partie 4 Probabilités

Partie 1

Algèbre

CHAPITRE

Compléments d'algèbre linéaire

1

L'essentiel du cours

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ce chapitre complète le programme d'algèbre linéaire de première année, mais ne reprend pas tous les résultats de base. Pour des rappels plus approfondis, il convient de se reporter à l'ouvrage de première année.
Les résultats du programme de MPSI (pour les étudiants qui ont suivi cette classe) qui ne sont pas au programme de la classe de PSI sont mentionnés avec un panneau attention.

■ 1 Produit et somme d'espaces vectoriels

Définition

Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, on munit le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ d'une loi $+$ et d'une loi . en posant

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \qquad \text{et} \qquad \lambda.x = (\lambda.x_1, \ldots, \lambda.x_n)$$

pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Espace vectoriel produit

Muni des lois $+$ et . définies plus haut, $E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si de plus $E_1, \ldots, E_n$ sont de dimension finie, $E_1 \times \cdots \times E_n$ est dimension finie et on a

$$\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n).$$

Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on a donc muni E^n d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

(1) On appelle **somme** de $F_1, \ldots, F_p$ et on note $F_1 + \cdots + F_p$ l'ensemble des $x_1 + \cdots + x_p$, avec $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$.

(2) On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est **directe** et on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ si l'écriture d'un élément de $F_1 + \cdots + F_p$ sous la forme $x_1 + \cdots + x_p$ (avec $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$) est unique.

- Ces deux définitions généralisent la définition de somme de deux espaces vectoriels vue en première année.
- On rappelle que deux espaces vectoriels F et G vérifiant $F \oplus G = E$ sont dits **supplémentaires** dans E.

Caractérisation d'une somme directe de n espaces

La somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0.$$

Le fait que les intersections de deux des F_i soient réduites à $\{0\}$ n'implique pas que la somme soit directe (contrairement au cas de deux espaces vectoriels).

Base adaptée

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que
$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p.$$
Si pour $i \in [\![1, p]\!]$, e_i est une base de F_i, la famille e obtenue en concaténant $e_1, \ldots, e_p$ est une base de E.

- Une telle base de E est dite **adaptée** à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.
- En particulier, si F et G sont supplémentaires dans E, on obtient une base de E (dite adaptée à $F \oplus G = E$) en concaténant une base de F avec une base de G.

Proposition

Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $1 = k_0 \leqslant k_1 < \cdots < k_p = n + 1$, et si pour $i \in [\![1, p]\!]$, $F_i = \mathrm{Vect}(e_{k_{i-1}}, \ldots, e_{k_i - 1})$, on a $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces de E. Alors
$$\dim(F_1 + \cdots + F_n) \leqslant \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_n)$$
avec égalité si et seulement si la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$.
Si pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u_{|E_i} = u_i$.

En particulier, si deux applications linéaires coïncident sur chacun des E_i, elles sont égales.

2 Matrices et endomorphismes

Définition

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et si F est un sous-espace de E, on dit que F est **stable** par u si $u(F) \subset F$. On appelle alors **endomorphisme induit** par u sur F l'application $\tilde{u} : F \to F$, $x \mapsto u(x)$.

$\tilde{u}$ est encore linéaire, donc définit un endomorphisme de F (d'où l'appellation endomorphisme induit).

Proposition

Si $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ vérifie $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont stables par u.

Définition

Si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, on peut définir une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dite **matrice par blocs** en posant

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Si B et C sont nulles, on dit que M est diagonale par blocs. Si B ou C est nulle, on dit que B est triangulaire (supérieure si C nulle, inférieure si B nulle) par blocs.

Caractérisation matricielle de la stabilité

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace de E, G un supplémentaire de F dans E et e une base adaptée à $F \oplus G = E$. On écrit par blocs la matrice de u en base e : $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ (avec $p = \dim(F)$).
Alors F est stable par u si et seulement si $C = 0$.

Produit par blocs

Pour tous couples $(A_1, A_2) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})^2$, $(B_1, B_2) \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})^2$, $(C_1, C_2) \in \mathscr{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})^2$ et $(D_1, D_2) \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})^2$, on a

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{pmatrix}.$$

Définition

On dit que deux matrices A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

• La relation « être semblable à » est une relation d'équivalence dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
• Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de E (de dimension n), mais dans des bases différentes (par la formule du changement de base).

Pour les anciens étudiants de MPSI, la notion de matrices équivalentes est hors-programme en PSI.

Définition

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ (ou $\mathrm{Tr}(A)$) la somme des coefficient diagonaux de A : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Opérations sur la trace

- tr est linéaire.
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$.
- Si $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- Deux matrices semblables ont même trace.

Deux matrices de même trace ne sont pas forcément semblables.

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **trace** de u et on note $\mathrm{tr}(u)$ (ou $\mathrm{Tr}(u)$) le scalaire $\mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_e(u))$, où e est une base de E.

Le scalaire $\mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_e(u))$ ne dépend pas de la base choisie puisque deux matrices semblables ont même trace.

Opérations sur la trace

- tr est linéaire.
- Si $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, qu'on écrit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$ avec $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$
- Pour $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E définit par $a_0 \mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_d u^d$.
- Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A)$ la matrice définie par $a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d$.

$P(u)$ (ou $P(A)$) est obtenu en remplaçant partout X par u (ou A) en souvenant que $u^0 = \mathrm{id}_E$ et $A^0 = I_n$.

La notation u^p désigne $u \circ \cdots \circ u$ (avec p fois u).

Définition

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$). On appelle **polynôme annulateur** de u (ou A) tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$ (resp. $P(A) = 0$).

Le tableau suivant récapitule les liens entre une matrice M, une application linéaire u qu'elle représente, et une famille de vecteurs e' qu'elle représente.

Matrice M	**Application linéaire u**	**Famille e'**
Produit	Composition	
M inversible	u bijectif	e' base de E
M^{-1}	u^{-1}	$P_{e'}^{e}$
$\mathrm{rg}(M)$	$\mathrm{rg}(u)$	$\mathrm{rg}(e')$
$\mathrm{Ker}(A)$	$\mathrm{Ker}(u)$	
$\mathrm{Im}(A)$	$\mathrm{Im}(u)$	
$\mathrm{tr}(A)$	$\mathrm{tr}(u)$	
$\det(A)$	$\det(u)$	$\det_e(e')$

3 Exemples de déterminants

Pour les anciens étudiants de MPSI, la formule explicite du déterminant et la notion de comatrice sont hors-programmes.

Proposition

Soit A une matrice triangulaire par blocs, avec p blocs diagonaux $A_1, \ldots, A_p$. Alors

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{p} \det(A_k).$$

Déterminant de Vandermonde

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

- Ce déterminant est appelée déterminant de Vandermonde.
- La matrice (dite de Vandermonde) associée est donc inversible si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

4 Formes linéaires et hyperplans

Dans cette partie, E est de dimension finie.

Définition

- On appelle **forme linéaire** de E (un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
- On dit que H est un **hyperplan** de E si H est de la forme $\mathrm{Ker}(\varphi)$, avec φ forme linéaire non nulle de E.

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, l'application (généralement notée e_i^*) qui à x associe sa i-ème coordonnées en base $(e_1, \ldots, e_n)$ est une forme linéaire.

Proposition

Si H est un hyperplan de E, pour tout $a \in E \backslash H$,

$$H \oplus \mathbb{K}a = E.$$

Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite vectorielle dans E est un hyperplan de E.

Caractérisation par la dimension

Un sous-espace H de E est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

- En dimension 2, les hyperplans sont donc les droites passant par l'origine.
- En dimension 3, les hyperplans sont donc les plans passant par l'origine.

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Deux formes linéaires non nulles φ et ψ de E définissent le même hyperplan ($\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$) si et seulement si on a $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

• Si $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan, on dit que $\varphi(x) = 0$ est une **équation** de l'hyperplan H. Deux équations définissent donc le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.
• Ceci généralise le fait que deux équations définissent la même droite (en dimension 2) ou le même plan (en dimension 3) si et seulement si elles sont proportionnelles.

Les méthodes à maîtriser

Méthode 1.1 : Savoir montrer qu'une somme d'espaces est directe

1. Lorsqu'on a une somme de deux espaces F et G, il suffit de montrer que $F \cap G = \{0\}$.
2. Lorsqu'on a une somme de n espaces $E_1, \ldots, E_n$, il faut prendre un n-uplet

$$(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \text{ tel que } x_1 + \cdots + x_n = 0$$

et montrer que les x_i sont tous nuls.

Exemple d'application

Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère F l'ensemble des fonctions constantes, G l'ensemble des fonctions impaires et H l'ensemble des fonctions h telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) = 0$. Montrer que la somme $F + G + H$ est directe.

Le fait que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E est laissé en exercice.
Soit $(f, g, h) \in F \times G \times H$ tel que $f + g + h = 0$. Comme g est impaire, $g(0) = 0$. Ainsi, en prenant la valeur en 0, on a $f(0) = 0$. Comme f est constante, f est constante nulle.
Par suite, $g + h = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $h(x) = 0$, donc $g(x) = 0$. Comme g est impaire, g est donc constante nulle, et on en déduit que $h = 0$.
Ainsi la somme $F + G + H$ est directe.

➔ Voir exercices **1.1** et **1.8**.

Méthode 1.2 : Savoir montrer que deux matrices sont semblables

Le théorème de changement de base permet de montrer que deux matrices sont semblables : il suffit de trouver un endomorphisme que ces deux matrices représentent, mais dans des bases différentes.

Exemple d'application

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A^2 = A$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Posons $E = \mathbb{K}^n$ et e la base canonique de E. On a $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_e(u)$. La relation $A^2 = A$ donne $\mathrm{Mat}_e(u \circ u) = \mathrm{Mat}_e(u)$, donc $u \circ u = u$. Ainsi u est un projecteur de E.
On a donc $F = \mathrm{Im}(u)$ et $G = \mathrm{Ker}(u)$ supplémentaires dans E. Pour $y \in F$, $u(y) = y$, et pour $z \in G$, $u(z) = 0$. Ainsi, si e' est une base de E adaptée à $F \oplus G = E$, en notant $p = \dim(F)$, on a $\mathrm{Mat}_{e'}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi $A = \mathrm{Mat}_e(u)$ est semblable à $\mathrm{Mat}_{e'}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

➔ Voir exercices **1.9** et **1.10**.

Méthode 1.3 : Exploiter un polynôme annulateur pour le calcul de puissance/d'inverse

Lorsqu'on connait un polynôme annulateur P d'une matrice A, la relation $P(A) = 0$ permet souvent de déterminer l'inverse de A (il suffit de la manipuler pour obtenir une relation $AB = I_n$).
De plus, si $p \in \mathbb{N}$ et si on écrit $X^p = PQ_p + R_p$ la division euclidienne de X^p par P, on a $A^p = R_p(A)$, ce qui permet de calculer les puissances successives de A (pour peu que l'on arrive à calculer facilement R_p).

Exemple d'application

Calculer l'inverse et les puissances successives de $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$. On pourra constater que $\boldsymbol{A^2 - 5A + 6I_2 = 0}$.

Notons tout d'abord que $A^2 = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$.

Par suite, $A^2 - 5A = 6I_2$ et en posant $B = \dfrac{1}{6}A - \dfrac{5}{6}I_2$, on trouve $AB = I_2$. A est donc inversible, d'inverse $B = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.
Notons $P = X^2 - 5X + 6$ et pour $p \in \mathbb{N}$, $X^p = Q_pP + R_p$ la division euclidienne de X^p par P. Notons que les racines de P sont 2 et 3, donc $R_p(2) = 2^p$ et $R_p(3) = 3^p$. Comme $\deg(R_p) < \deg(P) = 2$, R_p est de la forme $a_pX + b_p$, avec $(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$. Les deux équations précédentes donne alors le système $\begin{cases} 2a_p + b_p = 2^p \\ 3a_p + b_p = 3^p \end{cases}$. La combinaison $L_2 - L_1$ donne $a_p = 3^p - 2^p$.
Par suite $b_p = 2^p - 2a_p = 3 \times 2^p - 2 \times 3^p$. Ainsi

$$A^p = R_p(A) = a_pA + b_pI_2 = \begin{pmatrix} 2 \times 3^p - 2^p & -3^p + 2^p \\ 2 \times 3^p - 2^{p+1} & -3^p + 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Comme vu ici, on exploite souvent les racines de P pour déterminer les coefficients de R_p.

Voir exercices **1.4** et **1.5**.

Méthode 1.4 : Savoir calculer un déterminant

Que la taille soit petite ou que ce soit un déterminant de taille n, la méthode est à peu près la même. Il faut commencer par effectuer des opérations élémentaires pour faire apparaitre le maximum de zéros sur une ligne ou une colonne puis développer par rapport à cette ligne/colonne.
S'il s'agit d'un déterminant explicite de petite taille, on est alors ramené à un calcul d'un déterminant encore plus petit et on recommence jusqu'à arriver à des déterminants de taille 2, qui se calculent avec le produit en croix.
S'il s'agit d'un déterminant de taille n, on tente de trouver une équation de récurrence.

Exemple d'application

Calculer les déterminants

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad V(a_1,\ldots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(1) Pour calculer D, on commence par effectuer les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ (pour faire apparaitre des 0 en première colonne). On a alors

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -6 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \times 6 = -30$$

en développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la seconde ligne.

(2) Pour k allant de n à 2 (dans cet ordre), on effectue $L_k \leftarrow L_k - a_1 L_{k-1}$. Ceci ne change pas le déterminant et on trouve

$$V(a_1,\ldots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ 0 & (a_2-a_1)a_2 & \ldots & (a_n-a_1)a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (a_2-a_1)a_2^{n-2} & \ldots & (a_n-a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on trouve alors

$$V(a_1,\ldots,a_n) = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ (a_2-a_1)a_2 & \ldots & (a_n-a_1)a_n \\ \vdots & & \vdots \\ (a_2-a_1)a_2^{n-2} & \ldots & (a_n-a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1)\right) V(a_2,\ldots,a_n).$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} V(a_1,\ldots,a_n) &= \prod_{i=2}^{n}(a_i-a_1)V(a_2,\ldots,a_n) = \left(\prod_{i=2}^{n}(a_i-a_1)\right)\prod_{i=3}^{n}(a_i-a_2)V(a_3,\ldots,a_n) \\ &= \cdots = \prod_{j=1}^{n-2}\prod_{i=j+1}^{n}(a_i-a_j)V(a_{n-1},a_n) = \prod_{j=1}^{n-2}\prod_{i=j+1}^{n}(a_i-a_j)(a_n-a_{n-1}) \\ &= \prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=j+1}^{n}(a_i-a_j) = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j). \end{aligned}$$

Voir exercices **1.6**, **1.12** et **1.13**.

Lorsqu'on applique l'algorithme du pivot de Gauss à une matrice A, ou bien elle n'est pas inversible (et son déterminant vaut 0), ou bien on arrive à une forme triangulaire supérieure (et le déterminant est le produit des coefficients diagonaux). Le programme Python suivant calcule le déterminant d'une matrice A (en utilisant une fonction `echange` qui échange deux lignes, et `combine` qui réalise $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$).

```
import numpy as np
def determinant(A):
    i=0
    n = np.shape(A)[0]
    det=1
    for i in range(0,n):
        k=i
        for l in range(i+1,n):
            if abs(A[l,i]) > abs(A[k,i]):
                k=l
        if A[k,i]==0:
            return 0
        else:
            A = echange(A,i,k)
            if i!=k:
                det=-det
            det*=A[i,i]
            for l in range(i+1,n):
                A = combine(A,l,i,-A[l,i]/A[i,i])
    return det
```

À chaque étape, parmi les pivots disponibles, on choisit le plus grand en valeur absolue. Ceci est pour améliorer la stabilité numérique de l'algorithme (voir le cours d'informatique).

Méthode 1.5 : Exploiter les propriétés des hyperplans

Pour montrer qu'une partie H de E est un hyperplan de E, il suffit de trouver une forme linéaire non nulle dont c'est le noyau. On tente donc d'exprimer les éléments de H comme étant les solution d'une équation de la forme $\varphi(x) = 0$, et on montre ensuite que l'application φ est une forme linéaire non nulle.
Lorsqu'on a un hyperplan H, tout élément a qui n'est pas dans H vérifie $H \oplus \mathbb{K}.a = E$.
Une autre manière de montrer que H est un hyperplan de E est de vérifier que $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Exemple d'application

Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]\,;\, 3P(2) = 2P(1)\}$ est un hyperplan de $E = \mathbb{R}_n[X]$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

Les éléments de F sont les polynômes P vérifiant $3P(2) = 2P(1)$, i.e. $3P(2) - 2P(1) = 0$. On pose donc $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto 3P(2) - 2P(1)$.
Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda.P + \mu.Q) &= 3(\lambda P(2) + \mu Q(2)) - 2(\lambda P(1) + \mu Q(1))\\ &= \lambda(3P(2) - 2P(1)) + \mu(3Q(2) - 2Q(1)) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).\end{aligned}$$

φ est donc une forme linéaire. De plus $\varphi \neq 0$ puisque $\varphi(X) = 4$. Comme $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$, F est un hyperplan de E. On en déduit que $\dim(F) = n$.

Voir exercices **1.7**, **1.11** et **1.14**.

Interro de cours

1. Donner la définition et une caractérisation de $E_1 + \cdots + E_n$ est directe.

2. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour $i \in [\![0, n]\!]$, $F_i = \{P \in E\,;\, \forall j \in [\![0, n]\!] \backslash \{i\},\ P(j) = 0\}$. Montrer que $F_0 + \cdots + F_n$ est directe et que cette somme vaut E.

3. Rappeler la définition de la trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

4. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

(a) Deux matrices semblables ont même rang.

(b) Deux matrices de même rang sont semblables.

(c) Deux matrices semblables ont même trace.

(d) Deux matrices de même trace sont semblables.

5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 = I_n$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$.

6. Donner un polynôme annulateur d'un projecteur, d'une symétrie.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible, l'inverse et les puissances successives de A.

8. Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

9. Rappeler la formule donnant la valeur du déterminant de Vandermonde.

10. Déterminer (et justifier) si les énoncés suivants sont vrais ou faux, E étant un espace de dimension finie égale à n.

(a) H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

(b) H est un hyperplan de E si et seulement si on a $a \in E$ tel que $H \oplus \mathbb{K}a = E$.

(c) Deux hyperplans égaux ont la même équation.

(d) Deux hyperplans ayant des équations proportionnelles sont égaux.

Exercices

S'entraîner

Exercice 1.1

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que pour tout $p \in [\![2, n]\!]$, $(F_1 + \cdots + F_{p-1}) \cap F_p = \{0\}$. Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

Exercice 1.2

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Montrer que M est inversible si et seulement si A et C sont inversibles.
Donner alors M^{-1} en fonction de A, B et C.

Exercice 1.3

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. Montrer qu'on a $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.
2. Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q = I_n$. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(A - I_n)) = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{tr}(A^k)$.
   On pourra appliquer la question précédente à $B = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} A^k$.

Exercice 1.4

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
2. Si A est inversible, en déduire l'expression de A^{-1}.

Exercice 1.5

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 - 6A + 8I_2 = 0$.
2. En déduire que A est inversible, et donner l'expression de A^{-1}.
3. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.6

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, calculer $\begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}$.

Exercice 1.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le but de cet exercice est de montrer que si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces stricts de E (c'est-à-dire différents de E), $F_1 \cup \dots \cup F_p \neq E$.

1. Montrer que tout sous-espace strict de E est inclus dans un hyperplan de E. En déduire qu'il suffit de montrer le résultat voulu lorsque $F_1, \dots, F_p$ sont des hyperplans (ce que l'on suppose dans la suite).

2. Soit e une base de E. Montrer que $x \in F_1 \cup \dots F_p$ si et seulement si ses coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ en base e vérifient

$$(a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n) \dots (a_{p,1}x_1 + \dots + a_{p,n}x_n) = 0$$

où pour $i \in [\![1,p]\!]$, $(a_{i,1}, \dots, a_{i,n}) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

3. En exploitant le fait que $P = (a_{1,1} + \dots + a_{1,n}X^{n-1}) \dots (a_{p,1} + \dots + a_{p,n}X^{n-1})$ est non nul, montrer que $F_1 \cup \dots \cup F_p \neq E$.

Approfondir

Exercice 1.8

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de u. On suppose que P est scindé à racines simples, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et pour $i \in [\![1,p]\!]$, on note E_i l'espace $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_E)$.

Le but de cet exercice est de montrer que la somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe et vaut E.

1. Montrer que si $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$, et si $x = x_1 + \dots + x_p$, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$,

$$Q(u)(x) = Q(\lambda_1)x_1 + \dots + Q(\lambda_p)x_p.$$

2. Montrer que la somme $E_1 + \dots + E_p$ est directe.

3. Montrer que que $E_1 \oplus \dots \oplus E_p = E$. Que peut-on dire de la matrice de u dans une base adaptée à cette décomposition ?

Exercice 1.9

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de trace nulle.

1. Montrer que si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie vérifiant $\forall x \in E$, $(x, u(x))$ liée, alors u est une homothétie.

2. En déduire que M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & N \end{pmatrix}$, avec $N \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

3. Montrer que M est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 1.10

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $A^2 = -I_n$, $E = \mathbb{R}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Justifier que n est pair.

2. Montrer si $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $(x, u(x))$ est libre. Si $y \notin \mathrm{Vect}(x, u(x))$, montrer que $(x, u(x), y, u(y))$ est libre.

3. En déduire que A est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Donner une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ en fonction des matrices $E_{i,j}$ (dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient (i, j) qui vaut 1).

2. Soit f une forme linéaire de E vérifiant $\forall (A, B) \in E^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace.

3. Soit g un endomorphisme de E vérifiant $\forall (A, B) \in E^2$, $g(AB) = g(BA)$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g préserve la trace (c'est-à-dire que pour tout $A \in E$, $\mathrm{tr}(g(A)) = \mathrm{tr}(A)$).

Exercice 1.12

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n+1} = n! + (n+1)D_n$.

2. En déduire une expression de D_n en fonction de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (on pourra étudier $\dfrac{D_n}{n!}$).

Exercice 1.13

1. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A + B)\det(A - B)$.

2. Soit $(A, B, C, D) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^4$ tel que A soit inversible et $AC = CA$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - CB).$$

Exercice 1.14

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs vérifiant

$$\forall f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}), \quad f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Corrections

Interro de cours

1. La somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si l'écriture d'un élément x de cet espace sous la forme $x_1 + \cdots + x_n$, avec $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ est unique.
La somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe si et seulement si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad x_1 + \cdots + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

2. Soit $(P_0, \ldots, P_n) \in F_0 \times \cdots \times F_n$ tel que $P_0 + \cdots + P_n = 0$. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, en prenant la valeur en i, on obtient $P_i(i) = 0$ (puisque pour $j \neq i$, $P_j(i) = 0$). Ainsi P_i admet tous les entiers entre 0 et n comme racines, ce qui lui fait $n + 1$ racines au moins. Comme $\deg(P_i) \leqslant n$, on en déduit que $P_i = 0$, et comme ceci vaut pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, la somme $F_0 + \cdots + F_n$ est directe.
De plus $\dim(F_i) \geqslant 1$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ (F_i contient au moins le polynôme $\prod_{j \neq i} (X - j)$), donc

$$\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_n) = \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_n) \geqslant n + 1 = \dim(E)$$

et on en déduit que $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$.

3. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{tr}(u)$ est la trace de la matrice de u dans une base de E (ce scalaire ne dépend pas de la base choisie car deux semblables ont même trace).

4. **(a) est vrai :** Si A et B sont semblables, elle représente le même endomorphisme u dans deux bases différentes. Ainsi $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(B)$.
(b) est faux : Deux matrices de même rang ne sont pas nécessairement semblables. Par exemple $A = I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables mais ont même rang (2). En effet, si on avait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP$, alors $B = P^{-1}P = I_2$... absurde !
(c) est vrai : C'est un théorème du cours.
(d) est faux : Deux matrices de même trace ne sont pas nécessairement semblables. Par exemple $A = I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables (comme vu au b) mais ont même trace (2).

5. On pose $E = \mathbb{R}^n$, e la base canonique de E, et on considère $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_e(u) = A$. La relation $A^2 = I_n$ donne $u^2 = \mathrm{id}_E$, donc u est une symétrie. C'est la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$.
Soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. Si $p = \dim(F)$, pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a $u(f_i) = f_i$ et pour $i \in [\![p + 1, n]\!]$, on a $u(f_i) = -f_i$. La matrice de u en base f est donc $B = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$.

6. Un projecteur vérifie $p^2 = p$. Un polynôme annulateur d'un projecteur est donc $X^2 - X$.
Une symétrie vérifie $s^2 = \mathrm{id}_E$. Un polynôme annulateur d'une symétrie est donc $X^2 - 1$.

7. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - 3A + 2I_2 = 0$. Par suite $A(3I_2 - A) = 2I_2$, ce qui montre que A est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(3I_2 - A) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ est annulateur de A donc si $p \in \mathbb{N}$ et si $X^p = Q_p P + R_p$ est la division euclidienne de X^p par P, on a $A^p = R_p(A)$. Comme $\deg(R_p) < \deg(P) = 2$, R_p est de la forme $a_p X + b_p$, avec $(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$. Les racines de P sont 1 et 2, donc $R_p(1) = 1$ et $R_p(2) = 2^p$, ce qui montre que a_p et b_p sont solutions du système $\begin{cases} a_p + b_p = 1 \\ 2a_p + b_p = 2^p \end{cases}$

En effectuant la combinaison $L_2 - L_1$, on obtient $a_p = 2^p - 1$. Par suite $b_p = 1 - a_p = 2 - 2^p$. Ainsi

$$A^p = R_p(A) = a_p A + b_p I_2 = \begin{pmatrix} 3 - 2^{p+1} & -2^{p+1} + 2 \\ 3 \times 2^p - 3 & 3 \times 2^p - 2 \end{pmatrix}.$$

8. En développant suivant la première colonne, on trouve

$$D \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

9. On a $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Cette formule a été prouvée dans la méthode **1.4**, il est très important de savoir la retrouver (et la reprouver) rapidement.

10. (a) est vrai : C'est un théorème du cours.
(b) est faux : H est un hyperplan de E si et seulement si on a $a \in E$ **non nul** tel que $H \oplus \mathbb{K}a = E$. Dans la caractérisation donnée par l'énoncé, a peut être nul, et dans ce cas $H = E$ n'est pas un hyperplan.
(c) est faux : Dans R^2, $x + y = 0$ et $2x + 2y = 0$ sont deux équations définissant le même hyperplan (mais ne sont pas égales).
(d) est vrai : C'est un théorème du cours.

Exercice 1.1

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tel que $x_1 + \dots + x_n = 0$. Alors

$$x_n = -x_1 - \dots - x_{n-1} \in F_1 + \dots + F_{n-1},$$

donc $x_n \in (F_1 + \dots + F_{n-1}) \cap F_n = \{0\}$ et $x_n = 0$.
On a alors $x_1 + \dots + x_{n-1} = 0$, puis $x_{n-1} = -x_1 - \dots - x_{n-2} \in F_1 + \dots + F_{n-2}$. Ainsi il vient $x_{n-1} \in (F_1 + \dots + F_{n-2}) \cap F_{n-1} = \{0\}$ et $x_{n-1} = 0$.
On continue ainsi jusqu'à arriver à $x_1 = 0$. On a alors $x_1 = \dots = x_n = 0$ donc la somme est directe.

Il ne suffit pas d'avoir $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tout $i \neq j$ pour obtenir que la somme est directe !

Exercice 1.2

• Supposons M inversible. Soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0$.

Posons $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0_{n-p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (où 0_{n-p} désigne le vecteur colonne nul de taille $n-p$). Un calcul par blocs donne $MY = \begin{pmatrix} AX \\ 0_{n-p} \end{pmatrix} = 0$, donc $Y = 0$ puisque M est inversible. Ainsi $X = 0$ et A est inversible.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n-p,1}(\mathbb{K})$ tel que $CX = 0$. On ne peut pas directement poser $Y = \begin{pmatrix} 0_p \\ X \end{pmatrix}$ ici, puisqu'un calcul par blocs donne $MY = \begin{pmatrix} BX \\ CX \end{pmatrix} \neq 0$ a priori.

On se donne plutôt $Y = \begin{pmatrix} U \\ X \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $U \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ à déterminer. Un calcul par blocs donne $MY = \begin{pmatrix} AU + BX \\ CX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AU + BX \\ 0_{n-p} \end{pmatrix}$. Pour obtenir $MY = 0$, on choisit donc U de sorte que $AU + BX = 0$ soit $AU = -BX$ i.e. $U = -A^{-1}BX$ (licite car A est inversible). On a alors $MY = 0$, donc $Y = 0$ (puisque M est inversible) et en particulier $X = 0$, ce qui montre que C est inversible.

• Réciproquement, supposons A et C inversibles. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = 0$. On décompose X sous la forme $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec $X_1 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $X_2 \in \mathscr{M}_{n-p,1}(\mathbb{K})$. Un calcul par blocs donne alors $MX = \begin{pmatrix} AX_1 + BX_2 \\ CX_2 \end{pmatrix}$, donc $AX_1 + BX_2 = 0_p$ et $CX_2 = 0_{n-p}$. Comme C est inversible, on en déduit que $X_2 = 0$. Par suite $AX_1 = 0$, et comme A est inversible, $X_1 = 0$. Ainsi $X = 0$ et M est inversible.

Comme vu en première année, dans les exercices un peu théoriques, la caractérisation de M inversible la plus pratique est $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ MX = 0 \Rightarrow X = 0$.

On a montré l'équivalence souhaitée. Si maintenant M (et donc A et C) est inversible, on cherche M^{-1} sous la forme $N = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B_1 \in \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C_1 \in \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ (il semble raisonnable d'espérer que l'inverse d'une matrice triangulaire par blocs soit encore triangulaire par blocs).

En faisant le calcul par blocs, la relation $MN = I_n$ donne

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_1 & AB_1 + BC_1 \\ 0 & CC_1 \end{pmatrix}.$$

On veut donc $AA_1 = I_p$, $CC_1 = I_{n-p}$ et $AB_1 + BC_1 = 0$. Il faut donc choisir $A_1 = A^{-1}$, $C_1 = C^{-1}$ et $B_1 = -A^{-1}BC_1 = -A^{-1}BC^{-1}$.

En prenant $N = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$, le calcul plus haut montre que $MN = I_n$. Ainsi on a $M^{-1} = N$.

Exercice 1.3

1. Notons F et G les espaces supplémentaires associée à p (on a $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$, ou l'inverse). Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $F \oplus G = E$. Notant

$d = \dim(F)$, pour $i \in [\![1, d]\!]$, $p(e_i) = e_i$, et pour $i \in [\![d+1, n]\!]$, $p(e_i) = 0$. Ainsi la matrice de p en base e est $\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Par suite, $\operatorname{tr}(p) = d = \dim(F) = \dim(\operatorname{Im} p) = \operatorname{rg}(p)$.

> Cette formule est très classique, il faut savoir la reprouver rapidement.

2. Pour appliquer la question précédente à B, il faut d'abord montrer que B est une matrice de projection, soit $B^2 = B$. Notons que comme $A^q = I_n$, on a

$$AB = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^{k+1} = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} A^k = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q-1} A^k + \frac{1}{q} I_n = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^k = B.$$

On en déduit par récurrence aisée que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B = B$, puis

$$B^2 = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^k B = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} B = B.$$

Ainsi B est une matrice de projection, et par la question précédente, $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{rg}(B)$.
Par linéarité de la trace, $\operatorname{tr}(B) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{tr}(A^k)$. Pour avoir la formule voulue, il faut donc montrer que $\operatorname{rg}(B) = \dim(\operatorname{Ker}(A - I_n))$. Ceci sera le cas si on arrive à montrer que $\operatorname{Im}(B) = \operatorname{Ker}(A - I_n)$.
Soit $X \in \operatorname{Ker}(A - I_n)$. Alors $AX = X$, donc pour tout $k \in [\![0, q-1]\!]$, $A^k X = X$, ce qui montre que $X = BX$. Par suite $X \in \operatorname{Im}(B)$ et $\operatorname{Ker}(A - I_n) \subset \operatorname{Im}(B)$.
Réciproquement, soit $Y \in \operatorname{Im}(B)$. On a $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = BX$. Par suite

$$AY = ABX = BX = Y$$

(puisque $AB = B$, comme vu plus haut) et $Y \in \operatorname{Ker}(A - I_n)$, puis $\operatorname{Im}(B) \subset \operatorname{Ker}(A - I_n)$.
En conclusion, $\operatorname{Im}(B) = \operatorname{Ker}(A - I_n)$, donc $\operatorname{rg}(B) = \dim(\operatorname{Ker}(A - I_n))$, ce que l'on voulait montrer.

Exercice 1.4

1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$, donc

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A = \begin{pmatrix} a^2 + bc - a(a+d) & ab + bd - b(a+d) \\ ac + cd - c(a+d) & bc + d^2 - d(a+d) \end{pmatrix} = (bc - ad)I_2$$

ce qui montre que $A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.

> Dans le chapitre qui suit, on verra que $X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$ est le polynôme caractéristique de A, et que le résultat plus haut est le théorème de Cayley-Hamilton en taille 2.

2. Si A est inversible, on a $\det(A) \neq 0$, donc la relation plus haut se réécrit

$$\frac{1}{\det(A)}(\operatorname{tr}(A)I_2 - A)A = I_2.$$

Ainsi A est inversible, et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{tr}(A)I_2 - A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.5

1. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -18 & 12 \\ -6 & 22 & -12 \\ -6 & 18 & -8 \end{pmatrix}$, donc $A^2 - 6A + 8I_2 = 0$.

2. D'après la question précédente, on a $A(6I_2 - A) = 8I_2$, donc A est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(6I_2 - A) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Le polynôme $P = X^2 - 6X + 8$ est annulateur de A donc si $p \in \mathbb{N}$ et si $X^p = Q_p P + R_p$ est la division euclidienne de X^p par P, on a $A^p = R_p(A)$. Comme $\deg(R_p) < \deg(P) = 2$, R_p est de la forme $a_p X + b_p$, avec $(a_p, b_p) \in \mathbb{R}^2$. Les racines de P sont 2 et 4, donc $R_p(2) = 2^p$ et $R_p(4) = 4^p$, ce qui montre que a_p et b_p sont solutions du système $\begin{cases} 2a_p + b_p = 2^p \\ 4a_p + b_p = 4^p \end{cases}$
En effectuant la combinaison $L_2 - L_1$, on obtient $2a_p = 4^p - 2^p$ donc $a_p = 2 \times 4^{p-1} - 2^{p-1}$. Par suite $b_p = 2^p - 2a_p = 2^{p+1} - 4^p$. Ainsi

$$A^p = R_p(A) = a_p A + b_p I_3 = \begin{pmatrix} 2 \times 4^{p-1} + 2^{p-1} & -6 \times 4^{p-1} + 3 \times 2^{p-1} & 4^p - 2^p \\ -2 \times 4^{p-1} + 2^{p-1} & 6 \times 4^{p-1} - 2^{p-1} & -4^p + 2^p \\ -2 \times 4^{p-1} + 2^{p-1} & 6 \times 4^{p-1} - 3 \times 2^{p-1} & -4^p + 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.6

Notons $D_n(a,b)$ le déterminant à calculer (où $n \in \mathbb{N}^*$ désigne la taille de la matrice associée). En développant suivant la première ligne, on obtient (si $n \geqslant 3$)

$$\begin{aligned} D_n(a,b) &= (a+b)D_{n-1}(a,b) - b \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix} \\ &= (a+b)D_{n-1}(a,b) - abD_{n-2}(a,b) \end{aligned}$$

en développant le dernier déterminant par rapport à la première colonne. L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence double est $r^2 - (a+b)r + ab = 0$, dont les racines sont a et b.
Si $a \neq b$, on a $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n(a,b) = \lambda a^n + \mu b^n$.
Comme $D_2(a,b) = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$ et $D_1(a,b) = a+b$, λ et μ sont solutions du système

$$\begin{cases} \lambda a + \mu b = a + b \\ \lambda a^2 + \mu b^2 = a^2 + b^2 + ab \end{cases}$$

La combinaison $L_2 - bL_1$ donne $\lambda(a^2 - ab) = a^2$, donc $\lambda = \dfrac{a}{a-b}$ si $a \neq 0$. Si $a = 0$, on peut poser de même $\lambda = \dfrac{a}{a-b}$ (puisque $D_n(a,b)$ ne dépend pas de la valeur λ).

De même on obtient $\mu = -\dfrac{b}{a-b}$, donc $D_n(a,b) = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$.

Supposons maintenant que $a = b$. Alors on a $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $D_n(a,b) = \lambda a^n + \mu n a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $D_2(a,b) = a^2 + ab + b^2 = 3a^2$ et $D_1(a,b) = a + b = 2a$ donc si $a \neq 0$, λ et μ sont solutions du système $\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda + 2\mu = 3 \end{cases}$ qui équivaut à $\lambda = \mu = 1$. Si $a = 0$, $D_n(a,b) = 0$ on peut prendre ces valeurs de λ et μ (puisque $D_n(a,b)$ n'en dépend pas). Dans ce cas, on trouve $D_n(a,b) = (n+1)a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1.7

1. Soit F un sous-espace strict de E, et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de F (avec $d = \dim(F)$). Comme $(e_1, \ldots, e_d)$ est libre dans E, on peut la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On pose alors $H = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Comme $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est libre, $\dim(H) = n - 1$ et H est un hyperplan de E.

De plus, $F \neq E$, donc $d < n$, ce qui montre que $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_d) \subset H$. Ainsi F est un inclus dans un hyperplan de E. Pour chaque $i \in [\![1,p]\!]$, on a donc H_i un hyperplan de E contenant F_i. Si l'on arrive à montrer que $H_1 \cup \cdots \cup H_p \neq E$, comme $F_1 \cup \cdots \cup F_p \subset H_1 \cup \cdots \cup H_p$, $F_1 \cup \cdots \cup F_p \neq E$. Il suffit donc de montrer le résultat voulu lorsque $F_1, \ldots, F_p$ sont des hyperplans de E.

2. Soit $i \in [\![1,p]\!]$. Comme F_i est un hyperplan de E, on a φ_i une forme linéaire non nulle telle que $F_i = \mathrm{Ker}(\varphi_i)$. Si $x \in E$ a pour coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ en base e, on a donc $x \in F_i$ si et seulement si

$$0 = \varphi_i(x) = x_1\varphi_i(e_1) + \cdots + x_n\varphi_i(e_n)$$

et on pose $a_{i,j} = \varphi_i(e_j)$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

Comme φ_i n'est pas constante nulle, $(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}) \neq (0, \ldots, 0)$.

On a alors $x \in F_1 \cup \cdots \cup F_p$ si et seulement si il existe $i \in [\![1,p]\!]$ tel que $\varphi_i(x) = 0$, ce qui équivaut à $\varphi_1(x) \ldots \varphi_p(x) = 0$ puis à

$$(a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n) \ldots (a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n) = 0.$$

3. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, $P_i = a_{i,1} + a_{i,2}X + \cdots + a_{i,n}X^{n-1}$ n'est pas le polynôme nul d'après la question précédente (l'un de ses coefficients est non nul). Ainsi $P = P_1 \ldots P_p \neq 0$, et on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) \neq 0$ (sinon P aurait une infinité de racines).

Soit alors x l'élément de E dont les coordonnées en base e sont $(1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1})$. Comme $P(\lambda) \neq 0$, d'après la question précédente, $x \notin F_1 \cup \cdots \cup F_p$, ce qui prouve que $F_1 \cup \cdots \cup F_p \neq E$.

Exercice 1.8

1. Soient $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ et $x = x_1 + \cdots + x_p$. Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on a $u(x_i) = \lambda_i x_i$ (puisque $x_i \in E_i$). Par récurrence aisée, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x_i) = \lambda_i^k x_i$. En faisant des combinaisons linéaires de ces relations, il en découle que pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(u)(x_i) = Q(\lambda_i)x_i$. Par suite,

$$Q(u)(x) = Q(u)(x_1) + \cdots + Q(u)(x_p) = Q(\lambda_1)x_1 + \cdots + Q(\lambda_p)x_p.$$