Sommaire

Sommaire

CHAPITRE 1

Arithmétique
Algèbre générale

Sujets d'oraux

A Dénombrement

Ex. 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le nombre de surjections d'un ensemble à $n+1$ éléments sur un ensemble à n éléments.

Soit A de cardinal $n+1$: $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$, B de cardinal n : $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, et S l'ensemble des surjections de A sur B.

Pour $f \in S$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$, $(j, k) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $j \neq k$, uniques tels que $f(a_j) = f(a_k) = b_i$ et alors $f_{|A \setminus \{a_j, a_k\}}$ est une bijection de $A \setminus \{a_j, a_k\}$ sur $B \setminus \{b_i\}$.

L'application Φ définie sur S par :

$$\Phi : f \mapsto b_i, \{a_j, a_k\}, f_{|A\setminus\{a_j, a_k\}}$$

est injective, donc :

$$\operatorname{Card} S = \operatorname{Card} \Phi(S) = n \times \mathrm{C}_{n+1}^2 \times (n-1)!.$$

En conclusion, $\operatorname{Card} S = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

B Nombres complexes – Identités algébriques

Ex. 2

Résoudre l'équation $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. (E)

Soit $\mathbb{U} = \{Z \in \mathbb{C} \,/\, |Z| = 1\}$, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, posons $X = e^{ix}$, $Y = e^{iy}$, $Z = e^{iz}$, l'équation proposée se lit :

$$X + Y + Z = 0, \quad (X, Y, Z) \in \mathbb{U}^3 \qquad (E')$$

> Il est bien connu que $1 + j + j^2 = 0$ avec $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ donc $(1, j, j^2)$ est solution de (E'). Nous allons vérifier, qu'à une rotation près $\left((X, Y, Z) \mapsto (Xe^{i\alpha}, Ye^{i\alpha}, Ze^{i\alpha})\right)$, et une permutation près sur (X, Y, Z), c'est là l'unique solution de (E').

Remarquons d'abord que (E) est équivalente à :

$$1 + e^{i(y-x)} + e^{i(z-x)} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

en posant $u = y - x$, $v = z - x$, on est donc ramené à étudier l'équation :

$$1 + e^{iu} + e^{iv} = 0, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \qquad (E_1)$$

qui s'écrit aussi : $1 + \cos u + \cos v = 0$, $\sin u + \sin v = 0$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

$\sin v = -\sin u$ donne $v \equiv -u \bmod 2\pi$ ou $v \equiv \pi + u \bmod 2\pi$.

Pour $v \equiv \pi + u \bmod 2\pi$, on a $\cos v + \cos u = 0$, ce cas est donc à rejeter et (E_1) équivaut ainsi à :

$$v \equiv -u \bmod 2\pi \quad , \quad \cos u = -\frac{1}{2}.$$

Finalement les solutions des (E_1) sont les couples :

$$\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right), \quad (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$$

et pour (E) on obtient les triplets :

$$\left(\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \alpha - \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right) \text{ et } \left(\alpha, \alpha - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \alpha + \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}, (k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$$

Ex. 3

Soit $N = 1\,0\,1\,0\,1\,0 \ldots 1\,0\,1$ écrit en base 10.

L'entier N est-il premier ?

Le nombre N s'écrit avec p fois le chiffre 1 et $p-1$ fois le chiffre 0 et on a :

$$N = 1 + 10^2 + \ldots + 10^{2(p-1)} = \frac{10^{2p} - 1}{10^2 - 1}.$$

> Une exploration numérique avec un logiciel de calcul formel montre que si 101 est premier, il n'en est pas de même pour $10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$ ou pour $1010101 = 73 \times 101 \times 137$. En fait, nous allons prouver que N est non premier dès que $p \geqslant 3$. Ceci nécessite de faire apparaître une factorisation après la simplification par $10^2 - 1$ et, pour ce faire, nous allons procéder différemment selon que p est pair ou impair.

- Premier cas : p est pair, $p = 2n$ avec $n \geqslant 2$

Alors :

$$N = \frac{10^{4n} - 1}{10^2 - 1} = \frac{10^{2n} - 1}{10^2 - 1} \times \left(10^{2n} + 1\right) = \left(1 + 10^2 + \ldots + 10^{2(n-1)}\right)\left(10^{2n} + 1\right).$$

Puisque $n \geqslant 2$, on a $1 + 10^2 + \ldots + 10^{2(n-1)} > 1$, donc N n'est pas premier.

- Deuxième cas : p est impair, $p = 2n + 1$ avec $n \geqslant 1$

Alors :

$$N = \frac{10^{4n+2} - 1}{10^2 - 1} = \frac{10^{2n+1} - 1}{10 - 1} \times \frac{10^{2n+1} + 1}{10 + 1}$$

donc, en utilisant $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^{2n-k} b^k$, il vient :

$$\begin{aligned} N &= \left(1 + 10 + \ldots + 10^{2n}\right)\left(1 - 10 + 10^2 + \ldots + (-1)^k 10^k + \ldots + 10^{2n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} 10^k \times \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k 10^k \end{aligned}$$

ce qui prouve que N n'est pas premier.

Ex. 4

Quels sont les entiers naturels n tels que $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$ soit le carré d'un entier ?

Posons $A(n) = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$.