

# Sommaire

<b>1. Arithmétique – Algèbre générale</b>	<b>7</b>
<i>Sujets d'oraux</i>	<b>8</b>
A. Dénombrement	8
B. Nombres complexes – Identités algébriques	8
C. Polynômes et fractions rationnelles	12
<i>Thèmes d'étude – Problèmes</i>	<b>18</b>
<b>2. Algèbre linéaire – Réduction</b>	<b>35</b>
<i>Sujets d'oraux</i>	<b>36</b>
A. Déterminants	36
B. Diagonalisation	41
C. Réduction triangulaire ou diagonale	68
D. Applications de la réduction	76
<i>Thèmes d'étude – Problèmes</i>	<b>100</b>
<b>3. Espaces vectoriels normés – Suites et séries</b>	<b>123</b>
<i>Sujets d'oraux</i>	<b>124</b>
A. Espaces vectoriels normés	124
B. Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	138
C. Suites	141
D. Séries	154
<i>Thèmes d'étude – Problèmes</i>	<b>170</b>

# Sommaire

<b>4. Espaces préhilbertiens – Espaces euclidiens</b>	
<b>Coniques – Quadriques</b>	<b>191</b>
<i>Sujets d'oraux</i>	<i>192</i>
A. Produit scalaire	192
B. Projections orthogonales – Distances	194
C. Adjoint – Réduction des endomorphismes symétriques	200
D. Endomorphismes symétriques positifs	210
E. Coniques	225
F. Quadriques	232
<i>Thèmes d'étude – Problèmes</i>	<i>238</i>
<b>5. Intégration – Suites et séries de fonctions</b>	
<b>Séries entières – Séries de Fourier</b>	<b>271</b>
<i>Sujets d'oraux</i>	<i>272</i>
A. Intégrabilité	272
B. Suites de fonctions	276
C. Séries de fonctions	283
D. Séries entières	293
E. Séries de Fourier	310
F. Convergence dominée	315
G. Fonctions définies par une intégrale	327
<i>Thèmes d'étude – Problèmes</i>	<i>336</i>
<b>6. Équations différentielles – Calcul différentiel et intégral – Géométrie différentielle</b>	<b>405</b>
<i>Sujets d'oraux</i>	<i>406</i>
A. Équations différentielles linéaires	406
B. Équations différentielles non linéaires	424
C. Dérivées partielles – Différentielle – Gradient	430
D. Difféomorphismes	435
E. Équations aux dérivées partielles	439
F. Intégrales doubles – Intégrales curvilignes	442
G. Géométrie différentielle	450
<i>Thèmes d'étude – Problèmes</i>	<i>457</i>

# CHAPITRE 1

## Arithmétique Algèbre générale

<i>Sujets d'oraux</i>	8
A. Dénombrement	8
B. Nombres complexes – Identités algébriques	8
C. Polynômes et fractions rationnelles	12
<i>Thèmes d'étude – Problèmes</i>	18
1. Formules de Cardan	18
2. Une équation polynomiale	21
3. Inégalités dans $\mathbb{C}$	26

## A Dénombrement

### Ex. 1

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer le nombre de surjections d'un ensemble à  $n+1$  éléments sur un ensemble à  $n$  éléments.

Soit  $A$  de cardinal  $n+1$  :  $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ ,  $B$  de cardinal  $n$  :  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ , et  $S$  l'ensemble des surjections de  $A$  sur  $B$ .

Pour  $f \in S$ , il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(j, k) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$ ,  $j \neq k$ , uniques tels que  $f(a_j) = f(a_k) = b_i$  et alors  $f|_{A \setminus \{a_j, a_k\}}$  est une bijection de  $A \setminus \{a_j, a_k\}$  sur  $B \setminus \{b_i\}$ .

L'application  $\Phi$  définie sur  $S$  par :

$$\Phi : f \mapsto b_i, \{a_j, a_k\}, f|_{A \setminus \{a_j, a_k\}}$$

est injective, donc :

$$\text{Card } S = \text{Card } \Phi(S) = n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)!$$

En conclusion,  $\text{Card } S = \frac{n(n+1)!}{2}$ .

## B Nombres complexes – Identités algébriques

### Ex. 2

Résoudre l'équation  $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . (E)

Soit  $\mathbb{U} = \{Z \in \mathbb{C} / |Z| = 1\}$ , pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , posons  $X = e^{ix}$ ,  $Y = e^{iy}$ ,  $Z = e^{iz}$ , l'équation proposée se lit :

$$X + Y + Z = 0, \quad (X, Y, Z) \in \mathbb{U}^3 \quad (E')$$

Il est bien connu que  $1 + j + j^2 = 0$  avec  $j = e^{2i\pi/3}$  donc  $(1, j, j^2)$  est solution de  $(E')$ . Nous allons vérifier, qu'à une rotation près  $((X, Y, Z) \mapsto (Xe^{i\alpha}, Ye^{i\alpha}, Ze^{i\alpha}))$ , et une permutation près sur  $(X, Y, Z)$ , c'est là l'unique solution de  $(E')$ .

Remarquons d'abord que  $(E)$  est équivalente à :

$$1 + e^{i(y-x)} + e^{i(z-x)} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

en posant  $u = y - x$ ,  $v = z - x$ , on est donc ramené à étudier l'équation :

$$1 + e^{iu} + e^{iv} = 0, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (E_1)$$

qui s'écrit aussi :  $1 + \cos u + \cos v = 0$ ,  $\sin u + \sin v = 0$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

$\sin v = -\sin u$  donne  $v \equiv -u \pmod{2\pi}$  ou  $v \equiv \pi + u \pmod{2\pi}$ .

Pour  $v \equiv \pi + u \pmod{2\pi}$ , on a  $\cos v + \cos u = 0$ , ce cas est donc à rejeter et  $(E_1)$  équivaut ainsi à :

$$v \equiv -u \pmod{2\pi} \quad , \quad \cos u = -\frac{1}{2}.$$

Finalement les solutions des  $(E_1)$  sont les couples :

$$\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right), \quad (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$$

et pour  $(E)$  on obtient les triplets :

$$\left(\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \alpha - \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right) \quad \text{et} \quad \left(\alpha, \alpha - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \alpha + \frac{2\pi}{3} + 2\ell\pi\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}, (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$$

### Ex. 3

Soit  $N = 101010 \dots 101$  écrit en base 10.

L'entier  $N$  est-il premier ?

Le nombre  $N$  s'écrit avec  $p$  fois le chiffre 1 et  $p - 1$  fois le chiffre 0 et on a :

$$N = 1 + 10^2 + \dots + 10^{2(p-1)} = \frac{10^{2p} - 1}{10^2 - 1}.$$

Une exploration numérique avec un logiciel de calcul formel montre que si **101** est premier, il n'en est pas de même pour **10101** =  $3 \times 7 \times 13 \times 37$  ou pour **1010101** =  $73 \times 101 \times 137$ . En fait, nous allons prouver que  $N$  est non premier dès que  $p \geq 3$ . Ceci nécessite de faire apparaître une factorisation après la simplification par  $10^2 - 1$  et, pour ce faire, nous allons procéder différemment selon que  $p$  est pair ou impair.

- Premier cas :  $p$  est pair,  $p = 2n$  avec  $n \geq 2$

Alors :

$$N = \frac{10^{4n} - 1}{10^2 - 1} = \frac{10^{2n} - 1}{10^2 - 1} \times (10^{2n} + 1) = (1 + 10^2 + \dots + 10^{2(n-1)}) (10^{2n} + 1).$$

Puisque  $n \geq 2$ , on a  $1 + 10^2 + \dots + 10^{2(n-1)} > 1$ , donc  $N$  n'est pas premier.

- Deuxième cas :  $p$  est impair,  $p = 2n + 1$  avec  $n \geq 1$

Alors :

$$N = \frac{10^{4n+2} - 1}{10^2 - 1} = \frac{10^{2n+1} - 1}{10 - 1} \times \frac{10^{2n+1} + 1}{10 + 1}$$

donc, en utilisant  $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^{2n-k} b^k$ , il vient :

$$\begin{aligned} N &= (1 + 10 + \dots + 10^{2n}) (1 - 10 + 10^2 + \dots + (-1)^k 10^k + \dots + 10^{2n}) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} 10^k \times \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k 10^k \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $N$  n'est pas premier.

### Ex. 4

Quels sont les entiers naturels  $n$  tels que  $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$  soit le carré d'un entier ?

Posons  $A(n) = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 1$ .