Physique
exercices incontournables

j'intègre

EXCERCICES INCONTOURNABLES

PCSI

Séverine **Bagard**
Nicolas **Simon**

Physique

exercices incontournables

5e ÉDITION

DUNOD

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-082875-3

Table des matières

Outils mathématiques

Ondes et signaux

Mouvements et interactions

L’énergie : conversions et transferts

Partie 1
Outils mathématiques

Outils mathématiques

Objectifs généraux développés

L'utilisation d'outils mathématiques est indispensable en physique en classe de CPGE. Nous en avons rassemblé un certain nombre. Ce chapitre ne doit cependant pas être étudié de façon linéaire. Il convient de s'y reporter au fur et à mesure que le besoin s'en fera sentir. Ces outils devront être maîtrisés progressivement, et acquis en fin d'année.
On commence par s'intéresser aux **équations différentielles**, auxquelles mènent souvent les lois de la physique. Lorsque la fonction et ses dérivées n'interviennent qu'à la puissance unité, l'équation différentielle est dite **linéaire**.
En physique, on se limitera à des équations différentielles des premier et second ordres, avec ou sans second membre. Dans le cas d'équations différentielles avec second membre, la méthode de résolution couramment utilisée en physique n'est pas la méthode générale qui peut être exposée en mathématiques, mais une simplification de cette dernière, adaptée aux cas que nous rencontrons habituellement.
Dans le cas d'équations différentielles **non linéaires** la méthode présentée n'est plus applicable. Il faut alors résoudre directement dans son ensemble, par **séparation des variables**, l'équation différentielle proposée. Cette technique sera utilisée lors de la résolution d'exercices de mécanique.
On aborde ensuite les **nombres complexes**, qui constituent un outil mathématique largement utilisé en physique, notamment en **électrocinétique**, en **mécanique**, en **méthode de résolution** de systèmes d'équations différentielles couplées...
Enfin les **systèmes de coordonnées** seront nécessaires notamment en mécanique, pour repérer la position d'un point de l'espace. L'idée générale consiste à décomposer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ associé à M en trois vecteurs colinéaires aux trois vecteurs orientant les axes de base du système de coordonnées. Cette base sera, dans tous les cas, **orthonormée et directe**, de sorte que les opérateurs de base de l'analyse vectorielle (**produit scalaire**, **produit vectoriel**...) y soient facilement utilisables.
On va rencontrer deux types de bases ; la base **fixe** du système **cartésien** et les bases **mobiles** des systèmes **cylindrique** et **sphérique**.

CHAPITRE

1

Les équations différentielles linéaires

Exercice 1.1 : Équation homogène du premier ordre

Lors de la décharge d'un condensateur de capacité C à travers un conducteur ohmique de résistance R, la fonction $u(t)$ décrivant les variations de la tension aux bornes du condensateur obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0$$

avec $\tau = RC$. Résoudre cette équation différentielle en prenant comme condition initiale $u(t = 0) = E$.

• Analyse de l'énoncé

L'équation à résoudre est bien linéaire, car seules la fonction $u(t)$ et sa dérivée première $\frac{du}{dt}$ à la puissance 1 interviennent. Par ailleurs, elle est à coefficients constants. Une telle équation différentielle est appelée **équation homogène** ou encore équation sans second membre. Sa résolution est doublement importante à maîtriser, puisqu'elle constitue également la première étape de résolution lorsque l'on a affaire à une équation différentielle linéaire avec second membre.

L'équation étant du premier ordre (seule la dérivée première intervient), sa résolution va faire apparaître une constante d'intégration. Cette constante d'intégration sera déterminée en fin de résolution grâce à une condition, le plus souvent initiale (valeur de u à $t = 0$).

• Méthode de séparation des variables

Pour résoudre ce type d'équation homogène, on **sépare les variables**, c'est-à-dire que l'on fait en sorte de réunir d'un même côté de l'équation tout ce qui est en u et du, et de l'autre tout ce qui est en t et dt. Il ne reste plus alors qu'à intégrer chacun des deux membres.

La séparation des variables dans l'équation différentielle proposée mène à :

$$\frac{du}{u} = -\frac{dt}{\tau}$$

qui s'intègre en :

$$\ln u = -\frac{t}{\tau} + K$$

où K est la constante d'intégration.

Bien qu'on ait écrit une primitive de chacun des membres, il n'est pas nécessaire de faire apparaître une constante d'intégration de chaque côté. On considère en fait que K contient ces deux constantes. On isole enfin la fonction $u(t)$ afin de déterminer la constante d'intégration par application de la condition initiale.

On passe alors à l'exponentielle :

$$u = e^{-\frac{t}{\tau}+K} = e^{K} \times e^{-\frac{t}{\tau}} = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On change le nom de la constante d'intégration en $\lambda = e^{K}$ pour alléger les notations.

• **Détermination de la constante d'intégration**

À ce stade, on n'a plus qu'à utiliser la valeur particulière fournie pour u, à travers la condition initiale $u(0) = E$. Rappelons que la tension aux bornes d'un condensateur est toujours une fonction continue du temps, ce qui autorise à l'appliquer sans se demander si cette valeur initiale est celle avant ou après la bascule de l'interrupteur.

La condition initiale fournie permet d'écrire $u(0) = E = \lambda e^{-\frac{0}{\tau}} = \lambda$, d'où $\lambda = E$. La solution recherchée s'écrit alors :

$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Exercice 1.2 : Équation du premier ordre avec second membre

Lors de la charge d'un condensateur de capacité C à travers un conducteur ohmique de résistance R par un générateur de force électromotrice E, la fonction $u(t)$ décrivant les variations de la tension aux bornes du condensateur obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

avec $\tau = RC$. Résoudre cette équation différentielle en prenant comme condition initiale $u(t = 0) = 0$.

• Analyse de l'énoncé

On a de nouveau une équation différentielle linéaire à coefficients constants à résoudre. La différence par rapport à l'exercice précédent est la présence d'un second membre non nul. La solution d'une telle équation différentielle, **linéaire**, s'écrit comme la somme de deux termes :

– la **solution générale de l'équation homogène** (c'est-à-dire sans second membre, notée ESSM) associée, ci-après notée u_g ;
– une **solution particulière de l'équation complète**, cherchée de la même forme que le second membre de l'équation différentielle, ci-après notée u_p.

Par *solution générale de l'ESSM*, on entend solution faisant apparaître la/les constante(s) d'intégration. Autrement dit il ne faut pas injecter immédiatement les conditions (initiales) fournies par l'énoncé. Elles ne seront utilisées que dans l'expression finale (somme de la solution générale et d'une solution particulière) une fois l'expression de celle-ci établie.

• Détermination d'une solution particulière de l'équation complète

Pour ce qui est de la solution particulière on rencontrera deux types d'équations différentielles : celles dont le second membre est une constante (comme c'est le cas ici) et celles dont le second membre est fonction du temps.

Dans le cas d'un **second membre constant**, on recherche la solution particulière u_p sous forme d'une constante satisfaisant à l'équation complète. Il s'agit donc finalement de trouver la valeur que va prendre la fonction $u(t)$ en régime permanent, c'est-à-dire quand on aura attendu suffisamment longtemps pour que les phénomènes transitoires soient amortis. Pour cela, on réinjecte $u_\mathrm{p} = \text{cte}$ dans l'équation différentielle complète (toutes les dérivées s'annulent donc) et on en déduit u_p.

Dans le cas d'un **second membre dépendant du temps**, on va à priori utiliser une méthode que l'on peut qualifier d'identification. On postule la solution particulière comme étant une fonction du temps du même type que le second membre. Ce dernier point, ainsi que ses limites d'application, sont détaillés dans l'exercice suivant.

Cette méthode de résolution ne s'applique pas aux équations différentielles non linéaires.

La solution générale de l'ESSM $\frac{du_{\mathrm{g}}}{dt} + \frac{u_{\mathrm{g}}}{\tau} = 0$ s'écrit (cf. exercice précédent) :

$$u_{\mathrm{g}} = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec λ une constante d'intégration.
Pour ce qui est de la solution particulière u_{p} on obtient, en reportant $u_{\mathrm{p}} = \mathrm{cte}$ dans l'équation différentielle complète :

$$\frac{du_{\mathrm{p}}}{dt} + \frac{u_{\mathrm{p}}}{\tau} = \frac{E}{\tau} = \frac{u_{\mathrm{p}}}{\tau} \quad \Rightarrow \quad u_{\mathrm{p}} = E$$

.
Au final, on obtient donc :

$$u(t) = u_{\mathrm{g}} + u_{\mathrm{p}} = \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

• Détermination de la constante d'intégration
C'est bien à la somme de la solution générale de l'ESSM et de la solution particulière de l'équation complète que l'on applique la condition initiale.

On détermine enfin λ à l'aide de la condition $u(0) = 0$ qui mène à $E + \lambda e^{-\frac{0}{\tau}} = 0$, soit $\lambda = -E$. Finalement, on écrit :

$$u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Exercice 1.3 : Équation avec second membre fonction du temps

On parle de filiation radioactive lorsqu'un noyau père radioactif X_1 se désintègre pour donner un noyau fils X_2, lui-même radioactif et menant à un noyau X_3 stable. On note respectivement λ_1 et $\lambda_2 > \lambda_1$ les constantes radioactives associées aux noyaux X_1 et X_2. Les nombres $N_1(t)$ et $N_2(t)$ de noyaux X_1 et X_2 présents à la date t, satisfont aux équations différentielles suivantes :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \quad \text{et} \quad \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

Déterminer les expressions de $N_1(t)$ et $N_2(t)$ en supposant qu'à $t = 0$ $N_1(0) = N_0$ et $N_2(0) = 0$.

• Analyse de l'énoncé
On a ici un système de deux équations différentielles linéaires à coefficients constants à résoudre. Sa particularité provient du fait que la deuxième fait intervenir la solution de la première. On va donc commencer par résoudre la première, que l'on identifie comme une équation différentielle homogène, puis réécrire la deuxième équation différentielle en y injectant ce premier résultat, avant de la résoudre à son tour.

La première équation différentielle s'écrit (cf. exercices précédents) :

$$\frac{dN_1}{dt} + \lambda_1 N_1 = 0$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit :

$$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

La deuxième équation différentielle se réécrit alors :

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

On se retrouve donc à présent en présence d'une équation différentielle avec second membre fonction du temps. En appliquant la méthode exposée à l'exercice précédent, on commence par chercher la solution générale de l'ESSM associée.

La solution générale de l'ESSM associée à la deuxième équation différentielle s'écrit :

$$N_{2,\mathrm{g}}(t) = \lambda e^{-\lambda_2 t}$$

avec λ constante d'intégration.

• Utilisation de la méthode d'identification

Le second membre est du type $Ae^{-\lambda_1 t}$. On va donc injecter une solution $u_\mathrm{p}(t) = Be^{-\lambda_1 t}$ dans l'équation différentielle complète, et en déduire la valeur de la constante B. L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que la dépendance temporelle $e^{-\lambda_1 t}$ de $u_\mathrm{p}(t)$ se simplifie lors de cette opération.

On cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme : $u_\mathrm{p}(t) = Be^{-\lambda_1 t}$. On a alors $\frac{du_\mathrm{p}}{dt} = -\lambda_1 Be^{-\lambda_1 t}$. En reportant dans l'équation différentielle étudiée,on obtient :

$$-\lambda_1 Be^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 Be^{-\lambda_1 t} = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

On en déduit immédiatement, après simplification par $e^{-\lambda_1 t}$:

$$B = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

On peut finalement écrire la solution complète :

$$N_2(t) = \lambda e^{-\lambda_2 t} + N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}$$

• Détermination de la constante d'intégration
Il ne reste alors plus qu'à injecter la condition initiale portant sur la fonction N_2 afin de déterminer la constante d'intégration λ.

Avec $N_2(t=0)=0$, on obtient $\lambda = -N_0\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}$, d'où la solution finale :

$$N_2(t) = N_0\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}[e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}]$$

• Méthode de variation de la constante

Il peut vous paraître un peu miraculeux de voir la dépendance temporelle de la solution particulière se simplifier ainsi avec cette méthode par identification... Le fait est que cette méthode est loin d'être générale, mais il se trouve qu'elle va le plus souvent donner un résultat avec les équations différentielles rencontrées en physique. Dans le cas où elle ne permet pas de conclure (simplification de la dépendance temporelle impossible, ou encore obtention d'une incohérence), il faut alors se ramener à la méthode générale de résolution des équations différentielles avec second membre (variable) : la **méthode de variation de la constante**.

En pratique, la méthode d'identification fonctionne toujours pour les seconds membres constants. Un cas où elle peut être mise en défaut est celui où le second membre est de la même forme que la solution générale de l'ESSM.
Considérons par exemple l'équation différentielle sur la fonction $f(t)$ suivante :

$$\frac{df}{dt} + af = Ae^{-at}$$

avec a et A, constantes non nulles.
La solution générale de l'ESSM s'écrit λe^{-at}, et est donc de la même forme que le second membre. Si l'on applique la méthode d'identification, c'est-à-dire si l'on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme Be^{-at} (B constante), on aboutit, en reportant dans l'équation différentielle complète à :

$$-aBe^{-at} + aBe^{-at} = Ae^{-at}$$

relation impossible si $A \neq 0$.
La méthode de variation de la constante est alors nécessaire. Cette méthode consiste à rechercher la solution particulière sous la forme $B(t) \times F(t)$, où $F(t)$ est de la même forme que la solution générale de l'ESSM et $B(t)$ une fonction (la constante "qui varie"...) à déterminer.

Dans notre cas, on recherche alors la solution particulière sous la forme $B(t)e^{-at}$. En reportant dans l'équation complète on arrive à :

$$\frac{dB}{dt}e^{-at} - aB(t)e^{-at} + aB(t)e^{-at} = Ae^{-at}$$

soit $\frac{dB}{dt} = A$, d'où $B(t) = A \times t + \text{cte}$. Il est bien sûr inutile d'introduire une nouvelle constante d'intégration puisqu'on recherchait **une** solution particulière.
Gardez toutefois à l'esprit que vous ne rencontrerez que très rarement, en physique, des situations où la méthode d'identification sera mise en défaut, et qu'il est donc le plus souvent inutile de compliquer la résolution mathématique par l'utilisation de la méthode la plus générale.

Exercice 1.4 : Équation du deuxième ordre

Lors du mouvement horizontal d'un point matériel M de masse m relié à un ressort de constante de raideur k et soumis à une force de frottement fluide de coefficient f, les variations temporelles de l'abscisse $x(t)$ du point matériel sont régies par l'équation différentielle suivante :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Déterminer l'expression de $x(t)$ en supposant $x(t = 0) = L$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$. On écrira les différentes solutions possibles suivant les valeurs de f, mais on ne déterminera complètement la solution que pour $f = 2\sqrt{mk}$.

• Analyse de l'énoncé
Il s'agit ici de résoudre une équation différentielle linéaire, à coefficients constants, homogène et du **second ordre**. Cette dernière caractéristique nous indique que deux constantes d'intégration vont apparaître lors de la résolution. Il faut donc toujours deux conditions (initiales) pour résoudre totalement ce type de problème. Généralement l'énoncé donne de manière plus ou moins explicite des conditions initiales sur la fonction recherchée d'une part, et sur sa dérivée d'autre part. Ceci n'est cependant pas indispensable ; par exemple deux conditions particulières portant sur la fonction proprement dite (et aucune sur la dérivée) peuvent tout à fait permettre de conclure...
• Écriture du polynôme caractéristique
On admet qu'une telle équation différentielle admet une solution de la forme $x(t) = Ae^{rt}$, avec A un réel non nul et r à priori complexe. Vous pouvez alors, en reportant dans l'équation différentielle initiale, en déduire que le nombre complexe r satisfait à l'équation du deuxième degré suivante, et est donc une racine du **polynôme caractéristique** associé à l'équation différentielle :

$$mr^2 + fr + k = 0$$

La forme des solutions de l'équation différentielle dépend alors de la nature des solutions du polynôme caractéristique, autrement dit du signe de son discriminant Δ.

• Forme des solutions possibles

– si $\mathbf{\Delta > 0}$, le polynôme caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

avec A et B deux constantes d'intégration.

– si $\mathbf{\Delta = 0}$, le polynôme caractéristique admet une racine réelle double r. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$x(t) = e^{rt}(A + Bt)$$

avec A et B deux constantes d'intégration.

– si $\mathbf{\Delta < 0}$, le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\underline{r_1}$ et $\underline{r_2}$. La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$x(t) = Ae^{\underline{r_1} t} + Be^{\underline{r_2} t}$$

avec A et B deux constantes d'intégration. En physique, on ne laissera généralement pas l'expression sous cette forme. En effet, les racines conjuguées s'écrivant respectivement $\underline{r_1} = a + jb$ et $\underline{r_2} = a - jb$, la solution peut se réécrire :

$$x(t) = e^{at}\left[Ae^{jbt} + Be^{-jbt}\right]$$

L'utilisation de la formule d'Euler ($e^{jbt} = \cos(bt) + j\sin(bt)$ et $e^{-jbt} = \cos(bt) - j\sin(bt)$) mène finalement à une solution de la forme :

$$x(t) = e^{at}\left[(A + B)\cos(bt) + j(A - B)\sin(bt)\right]$$

On écrira donc directement en physique la solution sous la forme :

$$x(t) = e^{at}\left[\underline{A'}\cos(bt) + \underline{B'}\cos(bt)\right]$$

avec $\underline{A'} = A + B$ et $\underline{B'} = j(A - B)$ deux constantes d'intégration complexes.

Le discriminant du polynôme caractéristique de l'équation différentielle proposée s'écrit ici : $\Delta = f^2 - 4mk$.

– si $f > 2\sqrt{mk}$, $\Delta > 0$ et les racines réelles du polynôme sont $r_{1,2} = -\frac{f}{2m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2m}$. On a alors :

$$x(t) = e^{-\frac{f}{2m}t}\left[Ae^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2m}t} + Be^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2m}t}\right]$$

– si $f = 2\sqrt{mk}$, $\Delta = 0$ et la racine double du polynôme est $r = -\frac{f}{2m}$. La solution générale de l'équation différentielle est donc de la forme :

$$x(t) = e^{-\frac{f}{2m}t}(A + Bt)$$

On en déduit :

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\frac{f}{2m}t}\left[-\frac{f}{2m}(A+Bt)+B\right]$$

Les deux conditions initiales données mènent alors à :

$$x(t=0) = L \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{f}{2m}\times 0}(A+B\times 0) = L \quad \Rightarrow \quad A = L$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{f}{2m}\times 0}\left[-\frac{f}{2m}(L+B\times 0)+B\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{Lf}{2m}$$

– si $f < 2\sqrt{mk}$, $\Delta < 0$ et les racines complexes du polynôme sont :

$$\underline{r}_{\pm} = -\frac{f}{2m} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}$$

On a alors :

$$x(t) = e^{-\frac{f}{2m}t}\left[\underline{A'}\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t\right) + \underline{B'}\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2m}t\right)\right]$$

CHAPITRE

2

Les nombres complexes

Exercice 2.1 : Module et argument d'un nombre complexe

On considère le nombre complexe suivant :

$$\underline{H}(jx) = \frac{a}{(1 - x^2) + jb}$$

où a et b sont deux constantes réelles et x une variable de $\mathbb{R}^+$. Déterminer le module H et l'argument φ de ce nombre complexe.

• Analyse de l'énoncé

Le nombre complexe présenté est exprimé comme le rapport de deux nombres complexes (a, réel, n'est jamais qu'un cas particulier de nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle). Son module est donc égal au rapport des modules des deux nombres et son argument est égal à la différence entre les arguments du numérateur et du dénominateur.

En physique on privilégiera souvent la présentation sous **forme exponentielle** (on dit encore **trigonométrique**) $He^{j\varphi}$ par rapport à la **forme algébrique** $\mathrm{Re}(\underline{H}) + j\mathrm{Im}(\underline{H})$. En effet, passer un rapport de nombres complexes sous forme algébrique (en multipliant le numérateur et le dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur) alourdit inutilement les expressions.

• Détermination du module

Pour déterminer le module de $\underline{H}$ il faut distinguer les cas a positif ou négatif. En effet, le module d'un complexe est un nombre réel et positif. Le module du numérateur de $\underline{H}$ dépend donc du signe de a.

L'expression du module ne dépend en revanche pas du signe de b.

$$H = \frac{|a|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + b^2}} = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)^2+b^2}} & \text{si } a \geq 0 \\ \frac{-a}{\sqrt{(1-x^2)^2+b^2}} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

• Détermination de l'argument

La détermination de l'argument présente deux subtilités.

En premier lieu, il n'est défini qu'à 2π rad près ("modulo-2π" comme disent nos ami(e)s mathématicien(ne)s). On sait en effet que l'argument $\arg(z) = \varphi$ d'un complexe est défini par la relation :

$$z = a + jb = |z|e^{j\varphi} = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

avec a et b réels, respectivement qualifiés de partie réelle ($a = \mathrm{Re}(z)$) et partie imaginaire ($b = \mathrm{Im}(z)$), et par suite :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \cos\varphi = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

On peut donc l'interpréter comme l'angle formé par segment liant l'origine du plan complexe au point d'affixe z, avec l'axe des abscisses porteur des nombres réels (cf. schéma page suivante). À chaque fois que l'argument augmente ou diminue de 2π, le segment effectue un tour complet (dans le sens direct ou dans le sens horaire, respectivement) et l'on se retrouve au même point. Deux complexes de même module et dont les arguments diffèrent d'un nombre entier de fois 2π sont donc égaux entre eux.

En second lieu, on voit immédiatement que cet argument vérifie l'égalité :

$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \frac{b}{a}$$

On peut être tenté(e) d'en déduire la relation réciproque :

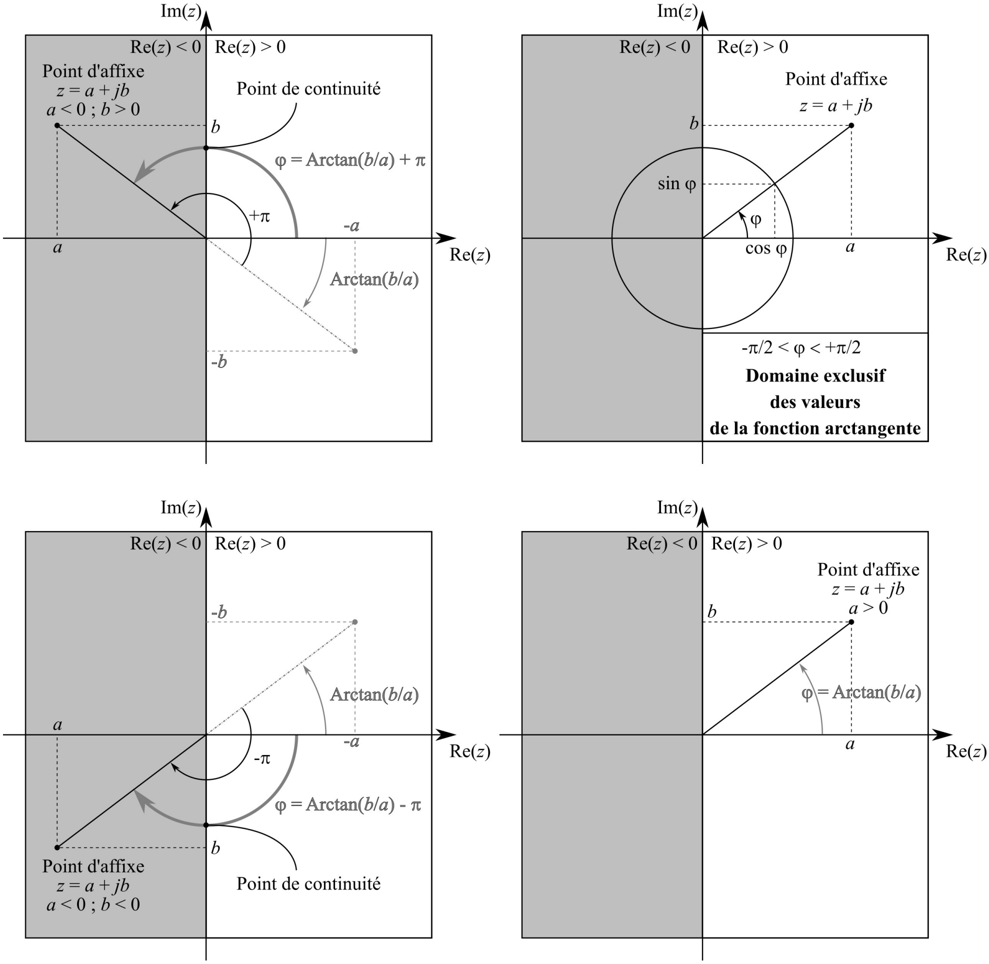
$$\varphi = \arctan\left[\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right]$$

mais ce serait aller un peu vite en besogne. En effet, la fonction arctangente associe à tout nombre réel un angle **compris dans l'intervalle** $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$, dont le nombre en question est la tangente. Or ces valeurs couvrent un intervalle de π rad seulement, qui exclut donc d'office les arguments de tous les complexes situés dans la partie gauche du plan complexe, autrement dit tous les complexes à partie rélle négative.

Bon, voyons le bon côté des choses : dès lors que la partie rélle d'un complexe est positive, on peut exprimer son argument simplement comme :

$$\mathrm{Re}(z) = a > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi = \arctan\left[\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right]$$

Les choses se compliquent en revanche un peu si cette partie réelle est négative, puisque l'argument est cette fois compris dans l'intervalle $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ (cas où $b = \mathrm{Im}(z) < 0$) ou $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ (cas où $b = \mathrm{Im}(z) > 0$), toujours modulo-2π.



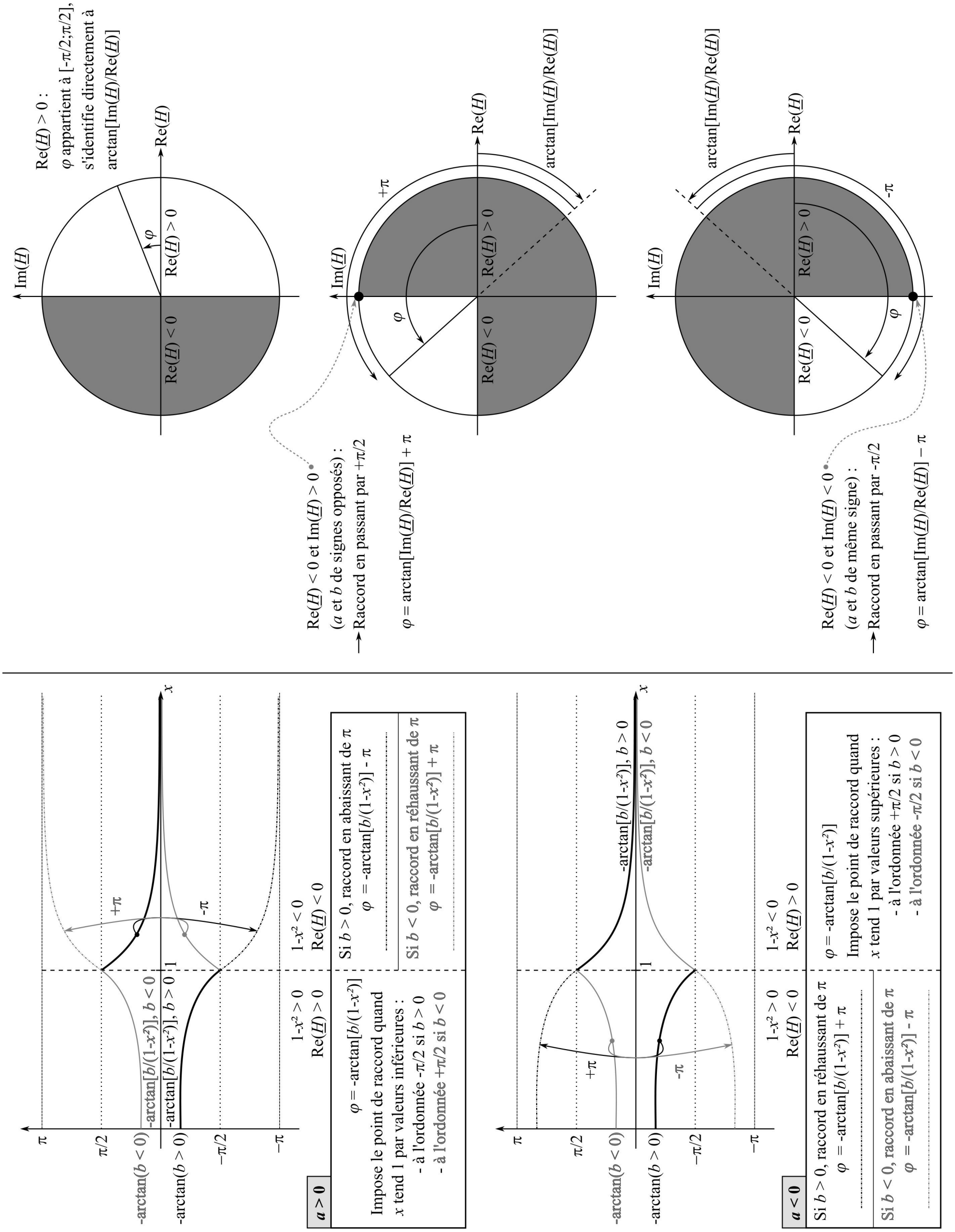
Dans ce cas, on utilise le fait que les arguments de deux points diamétralement opposés ont la même tangente ; ceci se comprend facilement : les parties réelle et imaginaire de l'un étant les opposés respectifs de celles de l'autre, leurs rapports seront égaux entre eux :

$$z' = -z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a' = -a \\ b' = -b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tan\varphi' = \frac{b'}{a'} = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a} = \tan\varphi$$

On peut dès lors affirmer que l'argument d'un complexe à partie réelle négative se déduit de celui du complexe opposé, en lui ajoutant ou en lui retranchant π rad. Analytiquement, la chose s'interprète comme :

$$z' = -z \quad \Leftrightarrow \quad |z'|e^{j\varphi'} = e^{\pm j\pi}|z|e^{j\varphi} = |z|e^{j(\varphi \pm \pi)}$$

La question étant de savoir si l'on doit ajouter ou retrancher π. Mathématiquement parlant, les deux reviennent au même. Cependant lorsque l'argument est par exemple le déphasage imposé par une fonction de transfert $\underline{H}$ et que ce déphasage dépend d'une variable (mettons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$), on privilégiera l'option qui assure la continuité de la fonction $\varphi(x)$.



Ainsi :

– Dans le cas où $\text{Re}\,(\underline{H})$ change de signe alors que $\text{Im}\,(\underline{H}) > 0$, il est souhaitable que l'argument reprenne à $+\frac{\pi}{2}$ plutôt qu'à $-\frac{3\pi}{2}$. Dans ce cas, donc on préféra exprimer l'argument comme :

$$\text{Re}(z) = a < 0 \text{ et } \text{Im}(z) = b > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\left[\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right] + \pi$$

– Dans le cas où $\text{Re}\,(\underline{H})$ change de signe alors que $\text{Im}\,(\underline{H}) < 0$, il est souhaitable que l'argument reprenne à $-\frac{\pi}{2}$ plutôt qu'à $+\frac{3\pi}{2}$. Dans ce cas, donc on préféra exprimer l'argument comme :

$$\text{Re}(z) = a < 0 \text{ et } \text{Im}(z) = b < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\left[\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right] - \pi$$

Commençons par mutliplier le numérateur et le dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur afin d'obtenir une expression sous la forme $\underline{H} = \text{Re}(\underline{H}) + j\text{Im}(\underline{H})$:

$$\underline{H} = \frac{a}{(1-x^2)+jb} \times \frac{(1-x^2)-jb}{(1-x^2)-jb} = \frac{1}{(1-x^2)^2+b^2} \times [a(1-x^2) - jab]$$

Nous devons donc distinguer plusieurs cas :

– si $a(1-x^2) > 0$, autrement dit si $a > 0$ et $x < 1$, ou si $a < 0$ et $x > 1$:

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{b}{1-x^2}\right)$$

– si $a(1-x^2) < 0$, alors :

  – si $-ab < 0$ (donc a et b de même signe, donc $b > 0$ et $x > 1$, ou $b < 0$ et $x < 1$) :

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{b}{1-x^2}\right) - \pi$$

  – si $-ab > 0$ (donc a et b de signes opposés, donc $b > 0$ et $x < 1$, ou $b < 0$ et $x > 1$) :

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{b}{1-x^2}\right) + \pi$$

Exercice 2.2 : Utilisation de la notation complexe

On considère l'équation différentielle sur la fonction complexe $\underline{x}(t)$ suivante :

$$\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\underline{x}}{dt} + \omega_0^2\underline{x} = \frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$$

où m, Q, ω_0 et F_0 sont des constantes réelles positives.
Déterminer complètement une solution particulière de cette équation, cherchée sous la forme $\underline{x}(t) = X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$.

• Analyse de l'énoncé
On demande ici de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle portant sur une fonction complexe $\underline{x}(t)$. La forme de la solution étant proposée par l'énoncé, il s'agit en fait de déterminer le **module** X_0 et l'**argument** φ de l'amplitude complexe de cette solution particulière de l'équation différentielle.

• Dérivations en notation complexe
L'intérêt de rechercher une solution complexe d'une équation différentielle sous la forme proposée est la simplification des opérations de dérivation (et d'intégration). Dériver revient à multiplier la fonction complexe par $j\omega$. Dériver une seconde fois revient à multiplier de nouveau par $j\omega$, d'où une double dérivation qui se traduit simplement par un facteur multiplicatif $-\omega^2$. Notons au passage qu'intégrer par rapport au temps reviendrait à une multiplication par $\frac{1}{j\omega}$.

Pour une solution écrite $\underline{x}(t) = X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$, on a :

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = j\omega \underline{x}(t) \quad \text{et} \quad \frac{d^2\underline{x}}{dt^2} = -\omega^2 \underline{x}$$

Si l'énoncé demande la recherche d'une solution dont la dépendance au temps est en $e^{-j\omega t}$, les opérateurs dérivation première et intégration deviennent des multiplications respectivement par $-j\omega$ et $-\frac{1}{j\omega}$; l'opérateur dérivée seconde est lui bien sûr inchangé.

• Transformation de l'équation différentielle en équation algébrique
En reportant la fonction $\underline{x}(t)$ et ses dérivées dans l'équation différentielle proposée, on aboutit à une équation algébrique dans laquelle le facteur $e^{j\omega t}$ intervient dans tous les termes, et l'on peut le simplifier. Par ailleurs, les opérations de dérivation faisant également apparaître l'amplitude complexe $X_0 e^{j\varphi}$ en facteur de tous les termes du membre de gauche, on obtient une équation portant sur celle-ci.

Le remplacement dans l'équation différentielle mène à :

$$-\omega^2 X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} + \frac{j\omega\omega_0}{Q} X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} + \omega_0^2 X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

Soit, après factorisation par $X_0 e^{j\varphi}$ et division :

$$X_0 e^{j\varphi} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{j\omega\omega_0}{Q}}$$

• Identification du module et de l'argument de l'amplitude complexe

On se trouve ainsi ramené au problème de l'exercice précédent.

Le module de l'amplitude complexe s'écrit :

$$X_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$$

et son argument :

$$\varphi = \begin{cases} -\arctan\left[\frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2-\omega^2)}\right] & \text{si } \omega < \omega_0 \\ \\ -\arctan\left[\frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2-\omega^2)}\right] - \pi & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

puisque $-\frac{\omega\omega_0}{Q}$, partie imaginaire du complexe conjugué du dénominateur, est frocément négative.

CHAPITRE

3

Systèmes de coordonnées et analyse vectorielle

Exercice 3.1 : Base polaire

Déterminer les expressions des projections des vecteurs unitaires de la base polaire sur les vecteurs de la base cartésienne. En déduire les dérivées temporelles des vecteurs de la base polaire par rapport à un référentien lié á la base cartésienne.

• Analyse de l'énoncé

La base polaire est la restriction à deux dimensions de la base cylindrique (encore appelée cylindro-polaire). L'intérêt de cette base est qu'elle accompagne le point matériel M dont on cherche à repérer la position, au cours de son mouvement. La contrepartie est que les vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ de cette base évoluent à priori au cours du temps, puisqu'ils accompagnent le point mobile ; autrement dit les dérivées temporelles des vecteurs de la base polaire par rapport à la base cartésienne ne sont pas nulles, contrairement à celles des vecteurs de la base cartésienne fixe $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.

Commençons par représenter les deux bases sur un même schéma :