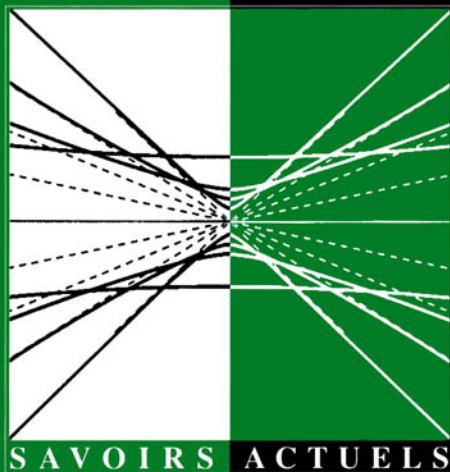


PHYSIQUE

Bernard CAGNAC - Jean-Pierre FAROUX

• LASERS •

Interaction lumière-atomes



 CNRS EDITIONS


EDP
SCIENCES

LASERS

Interaction lumière-atomes

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.

Bernard Cagnac
Jean-Pierre Faroux

LASERS

Interaction lumière-atomes

S A V O I R S A C T U E L S

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Illustration de couverture :

Relation entre le diamètre minimum (waist) et l'ouverture angulaire du faisceau gaussien (Fig. 15.7, p. 362)

© **2002, EDP Sciences**, 7, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A

et

CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

ISBN EDP Sciences 2-86883-528-7

ISBN CNRS ÉDITIONS 2-271-05954-2

Table des matières

Introduction	xiii
Partie I. Action d'un champ électromagnétique classique sur un système à deux états quantiques	1
1 Action d'une onde classique sur un atome isolé	3
1.1 Hamiltonien de l'interaction dipolaire électrique	3
1.2 Résolution de l'équation de Schrödinger. Représentation « tournante ». Approximation séculaire	6
1.3 Cas d'un seul atome non perturbé. Oscillation de Rabi pure . .	10
1.4 Les expériences de Rabi sur jet atomique	12
2 Équations différentielles de Bloch	17
2.1 Introduction des variables collectives, moyennées sur les atomes	18
2.2 Expression de l'équation de Schrödinger avec les nouvelles variables	20
2.3 Description théorique de l'émission spontanée et des collisions	22
2.4 Équations différentielles de Bloch	24
3 Solution stationnaire des équations de Bloch	27
3.1 Calcul de la solution stationnaire	27
3.2 Les populations atomiques. Comparaison avec le modèle des probabilités de transition	29
3.3 La polarisation atomique. Absorption et dispersion	33
3.4 Courbes de résonance en fréquence. Élargissement de puissance	36
3.5 Saturation	43
3.6 Comparaison avec l'oscillateur classique. Force d'oscillateur . .	46
4 Comparaison avec la résonance magnétique (spin 1/2)	49
4.1 Hamiltonien d'interaction avec un champ magnétique	50
4.1.1 Rapport gyromagnétique	50
4.1.2 Opérateur moment angulaire	50

4.2	Équation de Schrödinger dans un champ transverse oscillant . .	51
4.3	Vecteur moment magnétique atomique	53
4.4	Vecteur de Bloch	54
4.4.1	Référentiel tournant	54
4.4.2	Cas d'un champ tournant. Approximation séculaire . .	56
4.5	Aimantation volumique et relaxation	59
4.6	Solution stationnaire. Observation expérimentale	61
5	Solution transitoire des équations de Bloch	65
5.1	Calcul dans le cas résonnant. Amortissement de l'oscillation de Rabi	65
5.2	Calcul de l'oscillation amortie dans le cas général, non résonnant	69
5.3	Comparaison des oscillations atomiques individuelles avec l'oscillation collective	74
5.4	Observation expérimentale de l'oscillation collective	80
6	Impulsions courtes de l'onde électromagnétique	87
6.1	Impulsions carrées résonnantes à très forte intensité	88
6.2	Généralisation au cas d'impulsions résonnantes non carrées . .	91
6.3	Impulsions carrées hors résonance. Élargissement de la résonance par réduction de la durée d'interaction	93
6.4	Évolution libre de la polarisation dans le noir	96
6.5	Cas de deux impulsions cohérentes successives (Ramsey). Explication approchée	98
6.6	Calcul exact des franges de Ramsey	102
6.6.1	Calcul de la population après la deuxième impulsion, en l'absence d'amortissement	102
6.6.2	Effet de l'amortissement	105
6.7	Application aux expériences de physique atomique et de métrologie	106
7	Champs électromagnétiques intenses	115
7.1	Le hamiltonien dans la Représentation « Tournante »	116
7.2	Cas non résonnant « déplacements lumineux » ou effet Stark dynamique	119
7.3	Observation expérimentale des déplacements lumineux	123
7.4	Cas résonnant doublet Autler-Townes	131
7.5	Oscillation de Rabi à résonance	136
7.6	Effet Bloch-Siegert et approximation séculaire (en Résonance Magnétique)	139

Partie II. Fonctionnement des lasers dans le modèle des probabilités de transition	143
8 L'amplification d'une onde de lumière	147
8.1 Les équations d'évolution des populations atomiques, coefficients d'Einstein	147
8.2 Sections efficaces d'interaction. Différence pondérée des populations	151
8.3 La saturation à forte intensité lumineuse	153
8.4 Coefficient d'absorption généralisé. L'inversion des populations, condition d'amplification	156
8.5 Les processus d'inversion ou de pompage	159
8.5.1 Le tri sur jet atomique ou moléculaire	159
8.5.2 Irradiation avec une autre onde électromagnétique sur une autre transition	160
8.5.3 Collisions électroniques, atomiques ou moléculaires dans les gaz	165
9 Équations fondamentales du laser oscillateur ou générateur	169
9.1 Amplification et oscillation. Rôle d'une cavité résonnante . . .	169
9.2 Constante de temps et coefficient de qualité d'une cavité	171
9.3 Équation différentielle de l'énergie lumineuse. Seuil de fonctionnement	176
9.4 Comparaison avec le gain sur un tour de cavité	180
9.5 Équations différentielles des populations. Exemples de modélisation	182
9.5.1 Modèle à deux niveaux	182
9.5.2 Modèle à quatre niveaux	186
10 Régime continu de fonctionnement	191
10.1 Équation de l'énergie lumineuse. Populations au seuil	191
10.2 Raisonement sur un tour. Gain saturé et gain non saturé . . .	192
10.3 Bilan stationnaire des populations. Puissance de sortie	193
10.3.1 Modèle à deux niveaux	194
10.3.2 Modèle à quatre niveaux	196
10.4 Optimisation de la puissance de sortie	198
10.5 Bilan d'énergie. Compétition entre émissions spontanée et stimulée	201
11 Régimes variables ou impulsionnels	205
11.1 Oscillations de relaxation, conséquence des équations non linéaires couplées	205

11.2 Démarrage d'un laser continu	210
11.2.1 Laser à fibre optique, dopée au Nd^{3+} , démarré par l'irradiation du pompage optique	210
11.2.2 Laser à décharge de très faible puissance démarré par déblocage instantané de la cavité	212
11.3 Impulsions déclenchées	215
11.4 Calcul approché des impulsions géantes très courtes	220
11.5 Impulsions ultra courtes en blocage de modes	225
11.6 Dilatation et compression d'impulsion	232
12 Divers types de lasers	237
12.1 Gaz pompés par décharge électrique	237
12.2 Excimères ou Exciplexes	251
12.3 Pompage optique ou chimique dans les gaz	255
12.3.1 Pompage optique résonnant de vibrations moléculaires	255
12.3.2 Production de molécules excitées par photodissociation ou réaction chimique	258
12.4 Pompage optique en milieu condensé. Lasers accordables . . .	259
12.5 Lasers à semi-conducteurs	266
12.6 Chaînes d'amplificateurs pour les fortes puissances	270
13 Fréquence de l'oscillation laser	275
13.1 Résonances de cavité et résonance atomique. Mode pulling . .	275
13.1.1 Correction des fréquences de résonance d'une cavité pleine	277
13.1.2 Cas d'un laser en régime continu	280
13.2 Élargissement homogène par collisions	282
13.2.1 Calcul des probabilités de collisions, vitesse relative et section efficace	282
13.2.2 Application aux transitions optiques résonnantes	285
13.3 Élargissement inhomogène. Classes d'atomes. Classes de vitesses	287
13.3.1 Classes d'atomes dans un environnement inhomogène	288
13.3.2 Effet Doppler dans un gaz (inhomogénéité dynamique)	291
13.4 « Hole burning », conséquence des classes d'atomes	295
13.5 Cas des gaz en cavités : résonance de saturation et Lamb-dip	298
13.6 Compétition de modes dans les lasers à gaz	303
14 Techniques de contrôle des fréquences laser	309
14.1 La première sélection de fréquence d'un laser accordable . . .	309
14.1.1 Train de prismes	309
14.1.2 Réseau de diffraction	311
14.1.3 Filtre de Lyot	312
14.2 Cavité en anneau unidirectionnelle	314

14.3	Interféromètres en cascade dans un laser accordable monomode	317
14.4	Synchronisation par injection	320
14.5	Asservissements sur une raie fine. Standards de fréquence et de longueur	322
14.5.1	Le « jitter » en fréquence	322
14.5.2	Asservissement sur une raie de saturation	322
14.5.3	La mesure directe des fréquences optiques	325
14.6	Cohérence temporelle et spatiale	327

Partie III. Calcul des ondes émises 337

15	Le faisceau gaussien en espace libre	341
15.1	Approximation des ondes sphériques paraxiales	341
15.2	Limitation gaussienne de l'étendue du front d'onde	344
15.3	Rappel de la résolution des équations d'onde par la méthode de Kirchhoff	347
15.4	Application de la méthode de Kirchhoff à un faisceau paraxial : stabilité de la solution gaussienne	351
15.5	Caractéristiques de l'onde gaussienne	356
15.5.1	Rayon gaussien du profil transversal	357
15.5.2	Rayon de courbure du front d'onde	357
15.5.3	Amplitude et phase de l'onde	359
15.5.4	Directivité et inégalités de Heisenberg	362
15.6	Problèmes de détermination des caractéristiques gaussiennes . .	363
15.6.1	Rayon gaussien w_1 et rayon de courbure R_1 imposés dans un plan d'onde fixé P	363
15.6.2	Deux rayons gaussiens w_1 et w_2 imposés dans deux plans P et Q distants de D	364
15.7	Transformation de l'onde gaussienne par une lentille	366
15.7.1	Action d'une lentille sur le rayon de courbure de l'onde	366
15.7.2	Application au cas d'une onde gaussienne	368
15.8	Aspect vectoriel de l'onde gaussienne	371
16	Les modes d'une cavité linéaire	375
16.1	Le faisceau gaussien en cavité linéaire (modes gaussiens fondamentaux)	375
16.1.1	Discussion de la validité de ces calculs de modes	378
16.1.2	Condition de résonance de la cavité	383
16.2	Équation des ondes paraxiales (approximation de l'enveloppe lentement variable)	384
16.3	Solutions de l'équation paraxiale à variables x et y séparées. Modes transverses de Hermite-Gauss	387

16.4	Mise en évidence expérimentale des modes transverses	395
16.4.1	Cas d'une cavité passive	395
16.4.2	Cas d'une cavité active	397
16.4.3	Modes de symétrie circulaire, de Laguerre-Gauss	399
16.5	Comparaison avec les modes guidés	401
17	Propagation dépendant de la polarisation atomique	405
17.1	Couplage des équations d'onde et des équations quantiques de Bloch	405
17.2	Équations de Maxwell avec second membre. Ondes planes dans les milieux isolants, homogènes et <i>isotropes</i>	408
17.3	Onde plane progressive quasi sinusoïdale (approximation de l'enveloppe lentement variable). Laser amplificateur	411
17.4	Onde stationnaire dans une cavité laser (en dessous de la saturation)	415
17.4.1	Conséquence sur la phase et la fréquence. Mode pulling	419
17.4.2	Conséquence sur l'amplitude du champ	421
17.5	Effet de la saturation dans une onde stationnaire (laser oscillateur, modèle de Lamb)	422
17.5.1	Conséquence sur la phase et la fréquence	424
17.5.2	Conséquences de l'équation sur l'amplitude	425
17.6	Propagation d'impulsions ultracourtes : aires d'impulsion	429
17.6.1	Équations de Bloch sans relaxation	429
17.6.2	Élargissement inhomogène	430
17.6.3	Théorème des aires d'impulsion	431
17.6.4	Application à une impulsion de faible intensité	433
17.7	Impulsions ultracourtes très intenses. Autotransparence	434
17.7.1	Cas où l'aire d'impulsion est un multiple de π	435
17.7.2	Recherche d'une loi temporelle indéformable (solitons résonnants)	437
18	Les dipôles atomiques, sources de rayonnement	443
18.1	Onde rayonnée par un dipôle oscillant	443
18.2	Application au dipôle atomique créé par une onde incidente	446
18.2.1	Puissance cohérente rayonnée dans l'onde dipolaire	447
18.2.2	Puissance absorbée et dissipée par un atome	448
18.2.3	Cas des processus éloignés de la résonance	450
18.2.4	Bilan des énergies échangées. Puissance incohérente	451
18.3	Interférences des ondes dipolaires dans les directions obliques	455
18.3.1	En milieu condensé	456
18.3.2	Les fluctuations de densité dans un gaz	457
18.3.3	Diffusion par une onde sonore	460

18.4	Diffusion cohérente vers l'avant	463
18.4.1	Cône de cohérence	463
18.4.2	Faisceau incident gaussien (dispersion et absorption) . .	466
18.4.3	Puissance de l'onde résultante. Amplification	469
18.5	Superradiance due aux interactions entre voisins	470
18.6	L'émission spontanée amplifiée (ou A.S.E., Amplified Spontaneous Emission)	475
18.7	Émission libre cohérente et échos de photons	477
18.7.1	Brouillage des oscillations libres dans le noir par les inhomogénéités	477
18.7.2	La technique des échos	478
18.7.3	Observation expérimentale dans les solides et dans les gaz	482
19	Vecteur dipôle atomique et polarisation des ondes	487
19.1	Représentation standard du moment angulaire ou dipolaire . .	488
19.2	Théorème de Wigner-Eckart	491
19.3	Action d'une onde polarisée circulairement	492
19.4	Probabilités de transition et coefficients d'Einstein	495
19.4.1	Transition élémentaire entre deux états quantiques . . .	495
19.4.2	Coefficients d'Einstein	496
19.4.3	Utilisation des probabilités de transition	498
19.5	Diagrammes de rayonnement des transitions dipolaires électriques	503
19.6	Base standard	508
19.6.1	Définition. Produit scalaire hermitien	508
19.6.2	Application aux polarisations standard	509
19.6.3	Composantes standard d'un vecteur	510
19.7	Changements de base pour la polarisation lumineuse	511
	Notations	515
	Index	521

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.

Introduction

CET OUVRAGE a un double but : 1) donner une première approche aussi simple que possible aux processus d'interaction entre les atomes et les ondes lumineuses, qui interviennent dans un si grand nombre de phénomènes physiques, et 2) aider tous les scientifiques ou ingénieurs qui sont amenés à utiliser des lasers et qui souhaitent en connaître le fonctionnement, voire qui ont besoin parfois de comprendre tel ou tel aspect technique de ce fonctionnement pour améliorer leur utilisation.

Ces deux finalités ne sont pas étrangères l'une à l'autre ; et c'est bien ce qui autorise à les réunir dans le même ouvrage. Elles ne se recouvrent cependant pas entièrement ; et ceci nous a conduit à découper l'ouvrage en trois parties assez différentes, et largement indépendantes, qui peuvent être lues séparément, dans l'ordre qui paraîtra le plus urgent pour le besoin immédiat de chaque lecteur.

Les lecteurs, qui souhaitent comprendre rapidement le fonctionnement des lasers, **peuvent lire directement la partie II fondée sur les hypothèses phénoménologiques d'Einstein et les équations de probabilités qui en découlent (en anglais « rate equations »)**. Ils y trouveront l'essentiel de ce dont ils ont besoin dans la pratique courante de l'utilisation des lasers.

Mais les hypothèses de base du modèle phénoménologique ne sont pas une représentation exacte de l'interaction lumière-atomes ; et en toute rigueur, elles sont fausses. Si l'on s'en tient à cette description simpliste de l'interaction, on garde dans l'esprit des images simplistes qui ne permettent pas de comprendre les expériences modernes en optique atomique.

C'est pourquoi nous incitons vivement le lecteur à lire au moins la moitié de la partie I (chapitres 1, 2, 3 et 5) qui lui donnera une représentation plus exacte de l'interaction lumière-atomes, permettant d'expliquer toutes les expériences effectuées avec une intensité lumineuse suffisante.

Nous montrons en particulier dans les chapitres 3 et 5 dans quelles conditions expérimentales particulières les calculs quantiques exacts conduisent à des résultats collectifs identiques à ceux du modèle phénoménologique : bien que les probabilités phénoménologiques restent toujours incapables d'expliquer le comportement individuel d'un atome, tout se passe, en valeur moyenne sur un grand nombre d'atomes, « comme si » elles étaient vraies. C'est ce qui permet de les utiliser dans la partie II.

Nous avons donc cherché dans la partie I à réconcilier les deux langages, en partie contradictoires, que constituent la théorie d'Einstein et l'application rigoureuse de la mécanique quantique. On ne peut lire avec fruit cette première partie que si l'on a suivi un cours général d'introduction à la mécanique quantique. Mais nous avons voulu aussi permettre au plus grand nombre de lecteurs d'entrer dans cette explication quantique de l'interaction avec la lumière sans avoir à fournir un effort trop ardu dans les mathématiques abstraites. C'est pourquoi nous avons choisi de restreindre cette étude dans le cadre de deux grandes hypothèses simplificatrices :

1) **Le système atomique étudié est supposé n'avoir que deux niveaux d'énergie E_a et E_b non dégénérés.** Cette hypothèse, qui est rarement vraie, est cependant applicable à un grand nombre d'expériences parce que l'aspect résonnant de l'interaction électromagnétique avec la fréquence ν de l'onde ($E_b - E_a = h\nu$) fait que, très souvent dans la pratique, seuls deux niveaux d'énergie de l'atome sont réellement mis en jeu de manière significative ; on peut donc négliger l'effet sur les autres niveaux.

2) **L'onde lumineuse interagissant avec l'atome est supposée d'assez forte intensité pour que le nombre de photons correspondants soit très élevé (cette hypothèse est, de fait, vérifiée à l'intérieur des lasers, comme à l'extérieur, pour les atomes éclairés par un faisceau laser).** Dans ces conditions, il n'est pas nécessaire d'utiliser la représentation quantique du rayonnement, parce que l'on peut alors donner une signification réelle au champ électrique (ou magnétique) de l'onde ; et **utiliser ce champ électrique pour écrire mathématiquement l'interaction quantique de l'onde.**

C'est dans le cadre de ces deux hypothèses que nous pouvons écrire les **équations de Bloch optiques** et étudier leurs solutions.

Nous renvoyons pour la représentation quantique du rayonnement à l'ouvrage « Photons et atomes (Processus d'interaction) » de Cohen-Tannoudji, Dupont-Roc et Grynberg (dans cette même collection) qui reste l'ouvrage de référence en ce domaine. Nous excluons bien sûr du champ de notre ouvrage les expériences effectuées avec de très petits nombres de photons, et en particulier toutes celles qui portent sur les corrélations de photons.

Nous espérons ainsi permettre à un grand nombre d'étudiants ou de scientifiques non physiciens (dans leur formation première) d'entrer sans trop de difficulté dans la théorie quantique de l'interaction onde-atomes, et de découvrir les nombreux effets spécifiques, non explicables dans les modèles plus simples : oscillation de Rabi, phénomènes transitoires et impulsionnels, franges de Ramsey, « déplacements lumineux » des niveaux d'énergie, dédoublement de niveaux « Autler-Townes ». Dans chaque chapitre des descriptions d'expériences donnent immédiatement la signification physique des équations théoriques, et justifient ainsi, au fur et à mesure, l'effort accompli.

On n'oubliera pas que ces équations quantiques sont seules capables d'expliquer les lasers émettant les impulsions ultra-courtes ou les expériences utilisant ces impulsions extrêmement courtes.

Il faut noter également que le modèle d'Einstein décrit seulement les échanges d'énergie entre les atomes et le faisceau lumineux. Mais le faisceau lumineux ne peut être décrit seulement par l'énergie qu'il transporte ; il s'agit d'une onde caractérisée par la répartition dans l'espace d'un champ électrique. La description précise de nombreuses expériences nécessite la prise en compte de cette répartition spatiale du champ. C'est pourquoi, **dans la partie III, nous calculons, à partir des équations de Maxwell, les répartitions spatiales du champ** couramment rencontrées dans la pratique.

Les deux premiers chapitres de cette troisième partie n'utilisent que les équations de Maxwell et peuvent donc être lus de manière totalement indépendante des parties I et II. Dans le premier de ces chapitres (chapitre 15), nous étudions le faisceau lumineux issu d'un laser, qui se propage en espace libre avec une extension spatiale limitée malgré l'absence de diaphragme, et qui doit se substituer au modèle simpliste de l'optique géométrique. Dans le deuxième (chapitre 16), nous étudions les solutions possibles des équations de Maxwell à l'intérieur des cavités optiques utilisées dans les lasers ; c'est ce qui nous permet de décrire les modes de fonctionnement des lasers.

Dans les deux derniers chapitres de la partie III, nous ne pouvons plus être indépendants de la partie I. Nous parvenons en effet au faite de l'édifice dessiné dans cet ouvrage ; nous devons utiliser conjointement les équations de Maxwell et les équations quantiques de Bloch pour calculer comment la polarisation atomique calculée dans la partie I peut être source de l'onde engendrée à l'intérieur du laser, ou à l'extérieur du laser dans d'autres expériences courantes de diffusion de la lumière.

Nous essayons enfin, dans un dernier chapitre (chapitre 19), de donner quelques aperçus de problèmes mettant en jeu plus de deux états quantiques (niveaux d'énergie dégénérés). Ceci est en particulier absolument nécessaire pour décrire les phénomènes d'émission ou d'interaction électromagnétique en tenant compte des **diverses polarisations** possibles pour l'onde électromagnétique.

Une dernière remarque concernera les quelques références que nous avons citées à la fin de chaque chapitre. Il était impossible, sur des sujets aussi vastes, quarante ans après le début de l'aventure des lasers, de fournir une bibliographie exhaustive qui aurait rempli sans doute la moitié du volume de ce livre. Nous nous sommes, *a priori*, limités aux quelques références fondatrices qui, sur chaque sujet, ont marqué le démarrage de développements nouveaux. Mais bien sûr, nous devons également citer les références des expériences décrites pour illustrer chaque chapitre. Celles-ci ont été choisies assez arbitrairement, soit parce que nous les connaissions bien, soit parce qu'elles nous ont semblé particulièrement spectaculaires. Mais cela ne signifie

en aucune manière qu'elles soient plus importantes que de nombreuses autres qui ne sont pas citées. Que les auteurs de ces autres expériences veuillent bien nous excuser de cette sélection un peu arbitraire.

Ce livre est issu de cours spécialisés en maîtrise ou en DEA. Nous espérons rendre service aux étudiants avancés en mettant à leur disposition un exposé relativement simple, leur permettant d'éclaircir un grand nombre de phénomènes, avant de se plonger dans les exposés plus ardues et plus spécialisés, indispensables pour leurs sujets de recherche.

B. CAGNAC, J.P. FAROUX

Partie I

Action d'un champ électromagnétique classique sur un système à deux états quantiques

Cette page est laissée intentionnellement en blanc.

Pour deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ complexes, on définit ce produit que l'on note $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$, par la relation :

$$\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle = \vec{a}^* \cdot \vec{b} = a_x^* b_x + a_y^* b_y + a_z^* b_z \quad (19-52)$$

où le point dans l'expression centrale désigne le produit scalaire classique.

Noter que l'échange des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ change le produit en son complexe conjugué. Ce produit est un nombre réel positif si $\vec{a} = \vec{b}$, ce qui est conforme à ce que l'on exige du carré d'une norme.

De la définition des vecteurs de base $\vec{e}_q$ découle la propriété :

$$\boxed{\vec{e}_q^* = (-1)^q \vec{e}_{-q}} \quad (19-53)$$

Tenant compte de la définition ci-dessus du produit scalaire hermitien, on montre que ces vecteurs sont orthonormés :

$$\langle \vec{e}_q | \vec{e}_{q'} \rangle = \vec{e}_q^* \cdot \vec{e}_{q'} = (-1)^q \vec{e}_{-q} \cdot \vec{e}_{q'} = \delta_{qq'} \quad (19-54)$$

où $\delta_{qq'}$ est le symbole de Kroneker (égal à 1 si $q = q'$, nul autrement).

19.6.2 Application aux polarisations standard

L'intérêt de cette base réside dans ses propriétés de transformation par rotation autour de Oz . Pour cela introduisons la dépendance temporelle $e^{-i\omega t}$; il vient :

$$e^{-i\omega t} \vec{e}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^{-i\omega t} \vec{e}_x + e^{-i(\omega t - \pi/2)} \vec{e}_y \right]$$

Cette expression montre que la composante selon Oy oscille en quadrature retard, par rapport à la composante selon Ox . Le vecteur $e^{-i\omega t} \vec{e}_+$ est donc un vecteur tournant dans le sens positif autour de Oz . On vérifie facilement qu'il en est de même pour son complexe conjugué $-e^{i\omega t} \vec{e}_-$. Inversement on montre que le vecteur $e^{-i\omega t} \vec{e}_-$ tourne dans le sens négatif autour de Oz , ainsi que son complexe conjugué $-e^{+i\omega t} \vec{e}_+$.

Effectivement si l'on exprime les champs électriques tournants, de polarisations circulaires σ_+ et σ_- , utilisés au §19.3, on obtient pour les trois polarisations standard les expressions suivantes du champ électrique :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_+ \text{ tournant dans le sens positif autour de } Oz : \\ \quad \vec{E}(r, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(r) \cdot e^{-i\omega t} \vec{e}_+ + \text{C.C.} \\ \sigma_- \text{ tournant dans le sens rétrograde autour de } Oz : \\ \quad \vec{E}(r, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(r) e^{-i\omega t} \vec{e}_- + \text{C.C.} \\ \pi \text{ rectiligne parallèle à } Oz : \\ \quad \vec{E}(r, t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(r) e^{-i\omega t} \vec{e}_0 + \text{C.C.} \end{array} \right\} \quad (19-55)$$

Ces expressions classiques, privilégiant le terme en $e^{-i\omega t}$, sont commodes parce qu'elles établissent une correspondance entre la polarisation σ_+ et le vecteur $\vec{e}_+$ d'une part, la polarisation σ_- et le vecteur $\vec{e}_-$ d'autre part. Mais elles ne doivent pas faire oublier que dans les termes Complexes Conjugués (C.C), ayant le même sens de rotation, on trouve avec l'exponentielle $e^{+i\omega t}$ le vecteur $-\vec{e}_-$ conjugué de $\vec{e}_+$ d'une part, et le vecteur $-\vec{e}_+$ conjugué de $\vec{e}_-$ d'autre part.

19.6.3 Composantes standard d'un vecteur

Nous avons choisi la base standard (19-51) en transposant les expressions des composantes standard (19-1) et (19-4) ; ceci implique une définition des composantes standard par rapport à la base standard, utilisant un simple produit scalaire classique :

$$a_q = \vec{e}_q \cdot \vec{a} \quad (19-56)$$

En effet, en explicitant le vecteur $\vec{a}$ à l'aide de ses composantes cartésiennes :

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

et en utilisant (19-51), on vérifie facilement que :

$$\left. \begin{aligned} a_+ &= \vec{e}_+ \cdot \vec{a} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y) \\ a_0 &= \vec{e}_0 \cdot \vec{a} = a_z \\ a_- &= \vec{e}_- \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y) \end{aligned} \right\} \quad (19-57)$$

On retrouve la même forme que les expressions (19-1) et (19-4) adoptées au §19.1 pour définir les composantes standard des opérateurs vectoriels $\vec{J}$ et $\vec{D}$.

Ce choix complique un peu le développement du vecteur $\vec{a}$ sur la base $\{\vec{e}_q\}$ en associant la composante a_q avec le vecteur $\vec{e}_{-q}$ d'indice opposé :

$$\vec{a} = \sum_q (-1)^q a_q \vec{e}_{-q} = -a_+ \vec{e}_- + a_0 \vec{e}_0 - a_- \vec{e}_+ \quad (19-58)$$

on le vérifie facilement en faisant le produit scalaire classique de cette expression avec les vecteurs $\vec{e}_q$, en tenant compte des produits scalaires classiques $\vec{e}_+ \cdot \vec{e}_- = -1$ et $\vec{e}_+ \cdot \vec{e}_+ = \vec{e}_- \cdot \vec{e}_- = 0$ qui dérivent de (19-54).

Remarque 19.5 - Si $\vec{a}$ est un vecteur réel, et tenant compte de (19-56) et (19-53) :

$$a_q^* = \vec{e}_q^* \cdot \vec{a} = (-1)^q \vec{e}_{-q} \cdot \vec{a} = (-1)^q a_{-q} \quad (19-59)$$