Sylvain GUGGER

MATHS PT

EXERCICES INCONTOURNABLES

j'intègre

DUNOD

Conception et création de couverture : Hokus Pokus Créations

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-077664-1

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de deuxième année de classes préparatoires scientifiques de la filière PT. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques grâce à des exercices, assortis d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution.
Le livre est divisé en quinze chapitres, chacun étant consacré à une partie du programme. Nous avons regroupé les chapitres selon les thèmes classiques : Algèbre, Géométrie, Analyse et Probabilités. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.
En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et du pictogramme . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent.
Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important, nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par .
Un grand merci à Sabrina Bergez et Jean-Marie Monier, qui ont collaboré à la réalisation de ce livre en le relisant en détail et en me faisant bénéficier de leurs nombreuses remarques pertinentes.

Table des matières

Partie 1

Algèbre

Algèbre

CHAPITRE 1

Algèbre linéaire

Exercice 1.1 : Utilisation des polynômes de Lagrange

On se fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
1. Montrer que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, il existe un unique $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout j entre 0 et n, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ (le symbole de Kronecker, qui vaut 0 si $i \neq j$, 1 si $i = j$).
2. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, quelles sont ses coordonnées dans cette base ?
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in [0, n]$, $|P(x)| \leqslant 1$. Montrer que :

$$|P(-1)| \leqslant 2^{n+1} - 1 \quad \text{et} \quad |P(n+1)| \leqslant 2^{n+1} - 1.$$

1. Pour montrer l'existence et l'unicité, il y a deux possibilités : on peut montrer d'une part l'unicité et d'autre part l'existence, mais il faudra avoir une idée de quoi poser dans l'existence. On peut également raisonner par analyse/synthèse. L'intérêt de ce dernier mode de raisonnement est qu'il n'y aura pas à réfléchir dans la phase de synthèse, pour savoir quoi poser.

► **Analyse :**
Dans la phase d'analyse, on suppose avoir un objet vérifiant la propriété voulue et on trouve son expression exacte. Ceci montrera l'unicité.

Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$. Supposons avoir $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout j entre 0 et n, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$. L_i admet alors tous les a_j (pour $j \neq i$) comme racines. Ce sont n réels deux à deux distincts, et $\deg(L_i) \leqslant n$, donc on a toutes les racines de L_i. La forme factorisée de L_i est alors de la forme :

$$L_i = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j).$$

On trouve enfin la valeur de λ grâce à $L_i(a_i) = 1$:

$$1 = L_i(a_i) = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (a_i - a_j) \quad \text{donc} \quad \lambda = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{a_i - a_j},$$

où l'on peut diviser car $a_i \neq a_j$ pour $j \neq i$. Ainsi

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

et on a l'unicité.

▶ **Synthèse :**

Dans la phase de synthèse, on pose l'objet trouvé dans la phase d'analyse, et on démontre qu'il convient effectivement.

Soit $i \in \{0, \ldots, n\}$. Posons

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Alors $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ (il est de degré n), $L_i(a_j) = 0$ si $j \neq i$ et $L_i(a_i) = 1$. On a donc l'existence.

La phase d'analyse montre toujours l'unicité, la phase de synthèse l'existence. Cette dernière est indispensable, puisque la phase d'analyse montre simplement que si l'objet cherché existe, il est d'une certaine forme, mais pas que cette forme convient effectivement.

2. La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ comporte autant d'éléments que la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

La dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est $n+1$ et non n, puisque sa base canonique $(X^0, \ldots, X^n)$ comporte $n+1$ éléments.

Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$. Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a, en évaluant en a_i,

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{j,i} = \lambda_i.$$

Ainsi la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre. Elle a $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a alors $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n$. Comme plus haut, pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a, en évaluant en a_i,

$$P(a_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_i) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{j,i} = \lambda_i.$$

Les coordonnées de P dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ sont donc $(P(a_0), \dots, P(a_n))$.

3. Pour démontrer les inégalités proposées, on cherche à appliquer les questions précédentes. L'hypothèse étant vérifiée sur $[0, n]$, on pense à poser $a_i = i$ pour tout i entre 0 et n. On a alors P qui s'exprime en fonction des $P(i)$ (de valeur absolue plus petite que 1) et des L_i. Il faut donc majorer les $|L_i(-1)|$ et $|L_i(n+1)|$.

On applique les questions précédentes à $(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, n)$. Notons $L_0, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés, on a

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i = \sum_{i=0}^{n} P(i) L_i.$$

Pour i entre 0 et n, on a alors :

$$\begin{aligned}
|L_i(-1)| &= \left| \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{-1-j}{i-j} \right| = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{j+1}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{j+1}{j-i} \\
&= \prod_{j=0}^{i-1} (j+1) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} (j+1) \prod_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i} \\
&= (i!) \times \frac{1}{i!} \times \frac{(n+1)!}{(i+1)!} \times \frac{1}{(n-i)!} = \frac{(n+1)!}{(i+1)!\,(n-i)!} \\
&= \binom{n+1}{i+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
|P(-1)| &= \left| \sum_{i=0}^{n} P(i) L_i(-1) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |P(i) L_i(-1)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} - 1 = 2^{n+1} - 1.
\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\begin{aligned}
|L_i(n+1)| &= \left| \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{n+1-j}{i-j} \right| = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{n+1-j}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{n+1-j}{j-i} \\
&= \prod_{j=0}^{i-1} (n+1-j) \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{i-j} \prod_{j=i+1}^{n} (n+1-j) \prod_{j=i+1}^{n} \frac{1}{j-i} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!} \times \frac{1}{i!} \times ((n-i)!) \times \frac{1}{(n-i)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{i!\,(n+1-i)!} = \binom{n+1}{i}.
\end{aligned}$$

Puis, par l'inégalité triangulaire,

$$|P(n+1)| = \left|\sum_{i=0}^{n} P(i)L_i(n+1)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |P(i)L_i(n+1)|$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} = 2^{n+1} - 1.$$

On aurait également pu appliquer le résultat concernant $P(-1)$ au polynôme $Q = P(n - X)$ qui satisfait les mêmes hypothèses que P.

Exercice 1.2 : Polynôme et racines n-ièmes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

1. Calculer $\sum\limits_{x\in\mathbb{U}_n} x^p$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$. On suppose avoir $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{U}_n, \quad |P(x)| \leqslant M.$$

Montrer que les coefficients de P sont bornés par M.

1. Il s'agit d'un simple calcul d'une somme géométrique, il suffit de bien se souvenir de l'énumération classique de $\mathbb{U}_n$.

Lors du calcul d'une somme géométrique, il est indispensable de bien distinguer le cas où la raison vaut 1.

On sait que $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble de $\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$, k variant entre 0 et $n-1$. Ainsi, si p n'est pas un multiple de n, on a $e^{2ip\pi/n} \neq 1$ et donc :

$$\sum_{x\in\mathbb{U}_n} x^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{2ik\pi/n}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2ikp\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{2ip\pi/n}\right)^k$$
$$= \frac{1-\mathrm{e}^{2ip\pi}}{1-\mathrm{e}^{2ip\pi/n}} = 0$$

Si maintenant p est un multiple de n, on a

$$\sum_{x\in\mathbb{U}_n} x^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{2ik\pi/n}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2ikp\pi/n} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

2. Comme P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, il s'écrit sous la forme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. Pour isoler le coefficient de degré k, on pense, avec la question précédente, à regarder la somme de $P(x)x^{-k}$ pour $x \in \mathbb{U}_n$: les puissances autres que k vont s'annuler, et il ne restera que $n\,a_k$.

Comme P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, on a $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a, d'après la question précédente,

$$\sum_{x \in \mathbb{U}_n} P(x)x^{-k} = \sum_{x \in \mathbb{U}_n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{j-k} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \sum_{x \in \mathbb{U}_n} x^{j-k} = n a_k$$

puisque pour $j \neq k$, $j-k$ n'est pas un multiple de n.
Ainsi, par l'inégalité triangulaire :

$$|a_k| = \frac{1}{n} \left| \sum_{x \in \mathbb{U}_n} P(x)x^{-k} \right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathbb{U}_n} \left| P(x)x^{-k} \right| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathbb{U}_n} M = M.$$

Exercice 1.3 : Étude d'un projecteur

Soient p et q deux projecteurs de E (un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) tels que $p \circ q = 0$.
On considère $r = p + q - q \circ p$.
1. Montrer que r est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

1. Pour montrer qu'une application r est un projecteur, il faut montrer que $r \circ r = r$. Ici on développe cette composée (par bilinéarité de la composition dans $\mathscr{L}(E)$) et on simplifie les termes $p \circ p$ (en p), $q \circ q$ (en q) et $p \circ q$ (qui est nul).

Par bilinéarité de la composition, et en utilisant le fait que $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$ (puisque p et q sont des projecteurs), on a

$$\begin{aligned}
r \circ r &= (p + q - q \circ p) \circ (p + q - q \circ p) \\
&= p \circ p + p \circ q - p \circ q \circ p + q \circ p + q \circ q - q \circ q \circ p \\
&\quad - q \circ p \circ p - q \circ p \circ q + q \circ p \circ q \circ p \\
&= p + 0 - 0 \circ p + q \circ p + q - q \circ p - q \circ p - q \circ 0 + q \circ 0 \circ p \\
&= p + q - q \circ p = r.
\end{aligned}$$

> Dans le développement, bien prendre garde que $q \circ p$ est a priori différent de $p \circ q$!

2. Pour montrer cette égalité, il faut montrer deux inclusions. L'une est ici plus simple que l'autre.

▶ **Inclusion réciproque :**
C'est la plus facile car si $p(x) = q(x) = 0$, on a facilement $r(x) = 0$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$, alors

$$r(x) = p(x) + q(x) - (q \circ p)(x) = 0 + 0 - q(p(x)) = -q(0) = 0$$

donc $x \in \mathrm{Ker}(r)$ et $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(r)$.

▶ **Inclusion directe :**
Si maintenant $r(x) = 0$, on va appliquer p et q à la relation qu'on en déduit pour obtenir que $p(x) = q(x) = 0$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(r)$. Alors $0 = r(x) = p(x) + q(x) - (q \circ p)(x)$. On a donc $p(x) = q(p(x)) - q(x)$. En appliquant p de chaque côté, il vient

$$\begin{aligned} p(x) = p(p(x)) = p(q(p(x))) - p(q(x)) &= (p \circ q \circ p)(x) - (p \circ q)(x) \\ &= (0 \circ p)(x) - 0 = 0 \end{aligned}$$

et $x \in \mathrm{Ker}(p)$. Par suite, $r(x) = 0 + q(x) - q(0) = q(x)$, donc $q(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(q)$. On a donc $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$, ce qui montre l'inclusion $\mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
En conclusion, $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

3. Là encore, il y a deux inclusions à montrer. Cette fois, c'est l'inclusion directe qui est la plus facile.

▶ **Inclusion directe :**

Soit $x \in \mathrm{Im}(r)$. Alors on a $a \in E$ tel que

$$x = r(a) = p(a) + q(a) - (q \circ p)(a) = p(a) + q(a) - q(p(a)) = p(a) + q(a - p(a))$$

donc $x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Im}(r) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

▶ **Inclusion réciproque :**
Pour montrer qu'un élément x de $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ est dans $\mathrm{Im}(r)$, on va calculer $r(x)$. En effet les projecteurs ont la propriété qu'un élément de leur image vérifie $r(x) = x$.

Soit $x \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Alors on a $(y, z) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Im}(q)$ tel que $x = y + z$. Comme $y \in \mathrm{Im}(p)$, on a $b \in E$ tel que $y = p(b)$; comme $z \in \mathrm{Im}(q)$, on a $c \in E$

tel que $z = q(c)$. On a donc $x = p(b) + q(c)$. On calcule alors

$$\begin{aligned} r(x) &= p(x) + q(x) - (q \circ p)(x) \\ &= p(p(b) + q(c)) + q(p(b) + q(c)) - q(p(p(b) + q(c))) \\ &= (p \circ p)(b) + (p \circ q)(c) + (q \circ p)(b) + (q \circ q)(c) \\ &\quad - (q \circ p \circ p)(b) - (q \circ p \circ q)(c) \\ &= p(b) + 0 + (q \circ p)(b) + q(c) - (q \circ p)(b) - (q \circ 0)(c) \\ &= p(b) + q(c) = x. \end{aligned}$$

Ainsi $x = r(x) \in \mathrm{Im}(r)$ et $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(r)$.

Lorsque p est un projecteur, $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E\,;\, p(x) = x\}$.

À ce stade, on a montré que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Il reste à montrer que la somme est directe. On monre pour cela que l'intersection des deux espaces est réduite à $\{0\}$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Comme $y \in \mathrm{Im}(p)$, on a $a \in E$ tel que $y = p(a)$; comme $y \in \mathrm{Im}(q)$, on a $b \in E$ tel que $y = q(b)$. On a alors $p(a) = q(b)$. En composant par p, il vient

$$y = p(a) = p(p(a)) = p(q(b)) = (p \circ q)(b) = 0$$

donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}$, ce qui montre que la somme est directe.

Exercice 1.4 : Somme de projecteurs

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $p_1 + \ldots + p_n = \mathrm{Id}_E$.
1. Montrer que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{rg}(p_i) = \mathrm{tr}(p_i)$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}(p_n)$.

1. Pour calculer la trace de l'un des p_i, il faut calculer sa matrice dans une base de E. On choisit une base adaptée à la décomposition $E = F_i \oplus G_i$, si p_i projette sur F_i parallèlement à G_i.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notons F_i et G_i les sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_i \oplus G_i$, et que p_i projette sur F_i parallèlement à G_i.
Soit $(e_1, \ldots, e_q)$ une base de F_i et $(e_{q+1}, \ldots, e_n)$ une base de G_i. Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
Pour $k \in \{1, \ldots, q\}$, on a $p_i(e_k) = e_k$. Pour $k \in \{q+1, \ldots, n\}$, on a $p_i(e_k) = 0$.
Dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$, la matrice de p_i est donc

$$\begin{pmatrix} I_q & 0_{q,n-q} \\ 0_{n-q,q} & 0_{q,q} \end{pmatrix}$$

et $\mathrm{tr}(p_i) = q = \dim(F_i)$. Comme $F_i = \mathrm{Im}(p_i)$, on obtient $\mathrm{tr}(p_i) = \mathrm{rg}(p_i)$.

Il est toujours utilise de se souvenir que si p est un projecteur, il projette sur $F = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(p)$.

2. La question précédente nous donne immédiatement une information sur les dimensions : la somme des rangs de p_i est la somme de leurs traces, qui est $\mathrm{tr}(\mathrm{Id}_E)$ (par linéarité de la trace) donc qui vaut $d = \dim(E)$.
Il suffit donc de montrer que la somme est directe, ou qu'elle vaut E. L'hypothèse nous permettra de montrer plus facilement le fait qu'elle vaut E.

Soit $x \in E$. On a $x = p_1(x) + \cdots + p_n(x)$ par hypothèse, donc

$$x \in \mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n).$$

Comme $\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n)$ est clairement inclus dans E, on en déduit que

$$\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n) = E.$$

De manière générale, seule l'inclusion directe est vraie dans

$$\mathrm{Im}(p_1 + \cdots + p_n) \subset \mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n).$$

D'autre part, comme tr est linéaire,

$$\mathrm{tr}(p_1) + \cdots + \mathrm{tr}(p_n) = \mathrm{tr}(p_1 + \cdots + p_n) = \mathrm{tr}(\mathrm{Id}_E) = \dim(E).$$

Ainsi, avec la question précédente, on a, $\mathrm{rg}(p_1) + \cdots + \mathrm{rg}(p_n) = \dim(E)$. On a donc

$$\dim(\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_n)) = \dim(\mathrm{Im}(p_1)) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}(p_n))$$

et la somme est directe d'après le cours. En conclusion :

$$E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}(p_n).$$

Exercice 1.5 : Somme de sous-espaces de polynômes

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on note

$$F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,;\, \forall j \in \{0, \ldots, n\} \backslash \{i\},\ P(a_j) = 0\}.$$

Montrer que $F_0 \oplus \ldots \oplus F_n = \mathbb{R}_n[X]$.

Commençons par montrer que la somme de ces $n+1$ espaces est directe (le fait qu'il s'agit bien de sous-espaces de $\mathbb{R}_n[X]$ se montre aisément). Pour ce faire, il faut partir de $(P_0,\ldots,P_n) \in F_0 \times \ldots \times F_n$ tel que $P_0+\ldots+P_n = 0$ et montrer que $P_0 = \ldots = P_n = 0$.

> Le fait que les intersections de deux des F_i soient réduites à $\{0\}$ n'implique pas le fait que la somme est directe, quand on a plus de deux espaces.

Soit $(P_0,\ldots,P_n) \in F_0 \times \ldots \times F_n$ tel que $P_0+\ldots+P_n = 0$.
Pour $k \in \{0,\ldots,n\}$, on a, en prenant la valeur en a_k, $P_k(a_k) = 0$ (puisque les $P_i(a_k)$ sont nuls si $k \neq i$). Le polynôme P_k admet alors $a_0,\ldots,a_n$ comme racines, donc au moins $n+1$ racines. Comme $\deg(P_k) \leqslant n$, on en déduit que $P_k = 0$.
Ceci vaut pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$, donc la somme $F_0+\ldots+F_n$ est directe.

Il reste à montrer que cette somme vaut $\mathbb{R}_n[X]$. Le plus simple est de procéder par un argument de dimension. On détermine donc la dimension de chacun des F_i.

Soit $i \in \{0,\ldots,n\}$. Si $P \in F_i$, alors P admet les a_j, $j \neq i$ comme racines, ce qui fait n racines. Ou bien P est nul, ou bien on a toutes ses racines (car $\deg(P) \leqslant n$). Dans les deux cas, on a $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$P = \lambda \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} (X-a_j).$$

Réciproquement, tous ces polynômes sont dans F_i, donc

$$F_i = \mathbb{K} \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} (X-a_j)$$

est de dimension 1. Comme la somme est directe, on a

$$\dim(F_0 \oplus \ldots \oplus F_n) = \dim(F_0)+\cdots+\dim(F_n) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]).$$

Comme on avait $F_0 \oplus \ldots \oplus F_n \subset \mathbb{R}_n[X]$, on en déduit que

$$F_0 \oplus \ldots \oplus F_n = \mathbb{R}_n[X].$$

Exercice 1.6 : Calcul par blocs

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r, décomposée par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in GL_r(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour tout vecteur colonne $Y \in \mathscr{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, il existe un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ tel que

$$M \begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que $D = CA^{-1}B$.

1. Notons tout d'abord que comme A est de taille $r \times r$, B est de taille $r \times (n-r)$, C est de taille $(n-r) \times r$ et D est de taille $(n-r) \times (n-r)$.

On peut commencer par chercher X de manière pratique, en effectuant les produits par blocs. On se rend cependant vite compte que le calcul sera utile dans la question suivante, pour montrer que $D = CA^{-1}B$, mais ne permettra pas de répondre à cette première question. Il faut ici montrer l'existence de X de manière théorique.

Pour Y donné, le premier produit est une combinaison linéaire des $n-r$ dernières colonnes de M. Le second produit correspond à une combinaison linéaire des r premières. Il faut donc montrer que toute combinaison linéaire de colonnes de A peut s'exprimer comme combinaison linéaire des r premières.

Par hypothèse, la matrice A est inversible. Ainsi, ses colonnes forment une famille libre dans $\mathscr{M}_r(\mathbb{K})$. Il en est donc de même des r premières colonnes de M. Comme M est de rang r, cette famille libre est en fait une base de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de M.

Notons $M_1, \ldots, M_n$ les n colonnes de M, $A_1, \ldots, A_r$ celles de A et $C_1, \ldots, C_r$ celles de C.

Comme A est inversible, $(A_1, \ldots, A_r)$ est libre dans $\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{K})$. Montrons que la famille $(M_1, \ldots, M_r)$ est libre dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_r M_r = 0$.

En calculant par blocs, il vient

$$0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r \\ \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_r C_r \end{pmatrix}.$$

En particulier $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r = 0$ donc comme $(A_1, \ldots, A_r)$ est libre, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$.

Ainsi la famille $(M_1, \ldots, M_r)$ est libre dans l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, donc dans l'espace $F = \mathrm{Vect}(M_1, \ldots, M_n)$. Comme $\dim(F) = \mathrm{rg}(M) = r$, $(M_1, \ldots, M_r)$ est une base de F.

Pour $Y \in \mathscr{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$, on a

$$M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = y_1 M_{r+1} + \cdots + y_{n-r} M_n \in F \text{ où } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Notons $(x_1, \ldots, x_r)$ ses coordonnés en base $(M_1, \ldots, M_r)$, on a donc :

$$M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = x_1 M_1 + \cdots + x_r M_r = M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix} \text{ en posant } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}.$$

2. On exploite ici la question précédente en effectuant le calcul par blocs.

Ici, il est possible d'effectuer un calcul par blocs parce que les tailles correspondent : X a le même nombre de lignes que A et C de colonnes, Y a le même nombre de lignes que B et D de colonnes.

Soit $Y \in \mathscr{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$. D'après la question précédente, on a $X \in \mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{K})$ tel que

$$M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix}.$$

En calculant par blocs, on obtient :

$$M\begin{pmatrix} 0_r \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BY \\ DY \end{pmatrix} \text{ et } M\begin{pmatrix} X \\ 0_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ CX \end{pmatrix}.$$

On a donc $BY = AX$ et $DY = CX$. Comme A est inversible, la première relation donne $X = A^{-1}BY$. On en déduit que $DY = (CA^{-1}B)Y$.
Ceci vaut pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n-r,1}(\mathbb{K})$. En prenant, pour i entre 1 et $n-r$, Y égal au vecteur colonne n'ayant que des 0, sauf en 1 en position i, on en déduit que D et $CA^{-1}B$ ont même i-ème colonne.
Ainsi $D = CA^{-1}B$.

Exercice 1.7 : Propriétés de la trace

Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
1. En s'aidant des matrices élémentaires, déterminer une base Ker(tr).
2. En déduire que $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \mathrm{Vect}(\{(AB - BA)\,;\,(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2\})$.
3. Soit $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ linéaire vérifiant :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer que φ est colinéaire à la trace.

1. On sait que le noyau de l'application trace est de dimension n^2-1 par le théorème du rang. Il faut donc trouver une famille libre composée de n^2-1 matrices pour en avoir une base.
L'énoncé nous invite à utiliser les matrices élémentaires $E_{i,j}$, dont tous les coefficients valent 0 sauf celui en position (i,j) qui vaut 1. Si $i \neq j$, il est clair que $\operatorname{tr}(E_{i,j})=0$. Ceci nous fait déjà n^2-n matrices. Il en manque $n-1$, que l'on construit comme combinaison linéaire des $E_{i,i}$ (pour que la famille obtenue soit libre), par exemple les $E_{i,i}-E_{n,n}$ pour i entre 1 et $n-1$.

Notons tout d'abord que par le théorème du rang $\dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{tr}))+\operatorname{rg}(\operatorname{tr})=n^2$. Comme tr est à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\operatorname{rg}(\operatorname{tr}) \leqslant \dim(\mathbb{K})=1$. De plus tr n'est pas constante nulle, donc $\operatorname{rg}(\operatorname{tr})=1$. Ainsi $\dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{tr}))=n^2-1$.
Pour $i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$, on a $\operatorname{tr}(E_{i,j})=0$. Pour $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, on a $\operatorname{tr}(E_{i,i}-E_{n,n})=0$. La famille $\mathscr{F}=(E_{i,j})_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \cup (E_{i,i}-E_{n,n})_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ est donc une famille de n^2-1 éléments de $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$.
Soient $(\lambda_{i,j})_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \in \mathbb{K}^{n^2-2}$ et $(\mu_1,\ldots,\mu_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\lambda_{i,j}E_{i,j}+\sum_{k=1}^{n-1}\mu_k(E_{k,k}-E_{n,n})=0.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\lambda_{i,j}E_{i,j}+\sum_{k=1}^{n-1}\mu_k E_{k,k}-\left(\sum_{k=1}^{n-1}\mu_k\right)E_{n,n}=0.$$

Comme la famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est libre (c'est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$), on en déduit que $\lambda_{i,j}=0$ pour $i\neq j\in\{1,\ldots,n\}$ et que $\mu_1=\cdots=\mu_{n-1}=0$.
Ainsi $\mathscr{F}$ est libre. Comme elle contient $n^2-1=\dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{tr}))$ éléments, c'est une base de $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$.

2. Nous devons montrer que Ker(tr) est l'ensemble des combinaisons linéaires de matrices de la forme $AB-BA$. Il s'agit d'une égalité d'ensembles, il faut donc montrer deux inclusions.
La première vient du fait que $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ pour tout $(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, donc par linéarité, on a $\operatorname{tr}(AB-BA)=0$.
Pour la seconde, on utilise la question précédente en montrant que tous les éléments de la base de Ker(tr) qu'on a trouvée peuvent s'écrire sous la forme $AB-BA$. Pour ce faire, il faut se souvenir de la formule $E_{i,j}E_{k,l}=\delta_{j,k}E_{i,l}$.

Pour $(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a $\operatorname{tr}(AB-BA)=\operatorname{tr}(AB)-\operatorname{tr}(BA)=0$ (puisque tr est linéaire). Ainsi $AB-BA\in\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$. Comme $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$ est stable par combinaison linéaire, on en déduit que

$$\operatorname{Vect}(\{(AB-BA)\,;\,(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2\})\subset\operatorname{Ker}(\operatorname{tr}).$$

Pour $i\neq j\in\{1,\ldots,n\}$, on a $E_{i,j}=E_{i,i}E_{i,j}-E_{i,j}E_{i,i}$.
Pour $i\in\{1,\ldots,n-1\}$, on a $E_{i,i}-E_{n,n}=E_{i,n}E_{n,i}-E_{n,i}E_{i,n}$.

Ainsi tous les éléments de la base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ déterminée dans la question précédente peuvent s'écrire sous la forme $AB - BA$, avec $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Tout élément de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ est donc combinaison linéaire de matrices de cette forme, et on a

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \subset \mathrm{Vect}(\{(AB - BA)\,;\,(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2\}).$$

En conclusion, $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \mathrm{Vect}(\{(AB - BA)\,;\,(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2\})$.

3. Comme φ est linéaire, elle vérifie $\varphi(AB - BA) = 0$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ contient tous les éléments de la forme $AB - BA$, donc leurs combinaisons linéaires, donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. On conclut alors directement en disant que tr et φ définissent le même hyperplan, quand $\varphi \neq 0$, donc sont colinéaires.

Pour $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\varphi(AB - BA) = \varphi(AB) - \varphi(BA) = 0$ (car φ est linéaire). $\mathrm{Ker}(\varphi)$ contient donc toutes les matrices de la forme $AB - BA$, donc toutes leurs combinaisons linéaires. D'après la question précédente on en déduit que $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Si $\varphi = 0$, on a $\varphi = 0\,\mathrm{tr}$. Sinon $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$ et par le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n^2 - 1 = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}))$.
On a donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$: φ et tr définissent le même hyperplan. Elles sont donc proportionnelles.

Exercice 1.8 : Projecteurs et trace

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et p un projecteur de E. Montrer qu'on a $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
2. Soient $q \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q = I_n$. Montrer que

$$\dim(\mathrm{Ker}(A - I_n)) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{tr}(A^k).$$

On pourra appliquer la question précédente à $B = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} A^k$.

1. Pour montrer cette relation (extrêmement classique), on va écrire la matrice de p dans une base adaptée. Une telle base doit être choisie pour correspondre à la décomposition associée à p en deux sous-espaces supplémentaires, qui sont, d'après le cours, son image et son noyau.

Notons F et G les espaces supplémentaires associée à p (on a $F = \mathrm{Im}\,p$ et $G = \mathrm{Ker}\,p$). Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $F \oplus G = E$. Notant $d = \dim(F)$, pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, $p(e_i) = e_i$, et pour $i \in \{d+1, \ldots, n\}$, $p(e_i) = 0$. Ainsi la matrice de p en base e est $\begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par suite, $\mathrm{tr}(p) = d = \dim(F) = \dim(\mathrm{Im}\, p) = \mathrm{rg}(p)$.

La trace d'un endomorphisme se calcule toujours en écrivant sa matrice dans une base bien choisie.

2. Pour appliquer la question précédente à B, il suffit d'abord montrer que B est une matrice de projection, ce qui signifie $B^2 = B$. Pour calculer facilement B^2, on montre que $A^k B = B$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui provient de $AB = B$.

Notons que, comme $A^q = I_n$, on a

$$AB = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^{k+1} = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} A^k = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q-1} A^k + \frac{1}{q} I_n = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^k = B.$$

On en déduit par récurrence aisée que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B = B$, puis

$$B^2 = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^k B = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} B = B.$$

Ainsi B est une matrice de projection, et par la question précédente, on a $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{rg}(B)$.

Par linéarité de la trace, le second membre de la formule voulue est $\mathrm{tr}(B)$. Il faut donc maintenant montrer que $\mathrm{rg}(B) = \dim(\mathrm{Ker}(A - I_n))$. Ceci sera le cas si on arrive à montrer que $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A - I_n)$ (ce qui nécessite deux inclusions).

Soit $X \in \mathrm{Ker}(A - I_n)$. Alors $AX = X$, donc pour tout $k \in \{0, \dots, q-1\}$, $A^k X = X$, ce qui montre que $X = BX$.
Par suite $X \in \mathrm{Im}(B)$ et $\mathrm{Ker}(A - I_n) \subset \mathrm{Im}(B)$.
Réciproquement, soit $Y \in \mathrm{Im}(B)$. On a $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = BX$. Par suite

$$AY = ABX = BX = Y$$

(puisque $AB = B$, comme vu plus haut) et $Y \in \mathrm{Ker}(A - I_n)$, et on en déduit que $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A - I_n)$.
En conclusion, $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A - I_n)$, donc $\mathrm{rg}(B) = \dim(\mathrm{Ker}(A - I_n))$. Par suite

$$\dim(\mathrm{Ker}(A - I_n)) = \mathrm{tr}(B) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{tr}(A^k)$$

par linéarité de la trace.

Exercice 1.9 : Réduction des matrices de trace nulle

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathbb{K}\,x$. Démontrer que f est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire λ tel que $f = \lambda\ \mathrm{Id}_E$.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle de trace nulle. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que la première colonne de $P^{-1}MP$ soit nulle, sauf le deuxième coefficient qui vaut 1.
3. Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra raisonner par récurrence sur n.

1. Ce résultat n'a a priori rien d'évident. L'hypothèse est que, pour tout élément x de E, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x\, x$. La conclusion est qu'il existe un scalaire λ tel que, pour tout élément x de E, $f(x) = \lambda\, x$. Ces deux énoncés diffèrent par l'ordre des quantificateurs : dans le premier cas, le scalaire dépend de x, alors qu'il n'en dépend pas dans le second ! Autrement dit, il s'agit de montrer que les scalaires λ_x sont en fait tous égaux.

Il faut bien faire la distinction entre une phrase logique du type $\forall x, \exists \lambda$, où pour chaque x, on obtient un λ **dépendant** de x, et une phrase du type $\exists \lambda, \forall x$ qui nous donne un λ constant, qui marche pour tous les x.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $f(e_k) = \lambda_k\, e_k$. Il suffit de montrer que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.
Si $n = 1$, il n'y a rien à faire.
Sinon, pour k et l distincts : $f(e_k + e_l) = \lambda_k\, e_k + \lambda_l\, e_l$. Mais il existe aussi un scalaire μ tel que $f(e_k + e_l) = \mu\,(e_k + e_l)$ ($\mu = \lambda_{e_k+e_l}$ avec les notations vues plus haut). Ainsi :

$$\lambda_k\, e_k + \lambda_l\, e_l = \mu\,(e_k + e_l).$$

Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E on a

$$\lambda_k = \mu = \lambda_l.$$

Ainsi, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. Supposons que P existe et soit $\mathscr{B}$ la base de $\mathbb{K}^n$ telle que P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$: alors $P^{-1}MP$ est la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ et le fait que la première colonne de cette matrice soit nulle, sauf le deuxième coefficient qui vaut 1, signifie que l'image par f du premier vecteur de $\mathscr{B}$ est le deuxième vecteur de $\mathscr{B}$. Ainsi, il s'agit de démontrer l'existence d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $f(e_1) = e_2$.