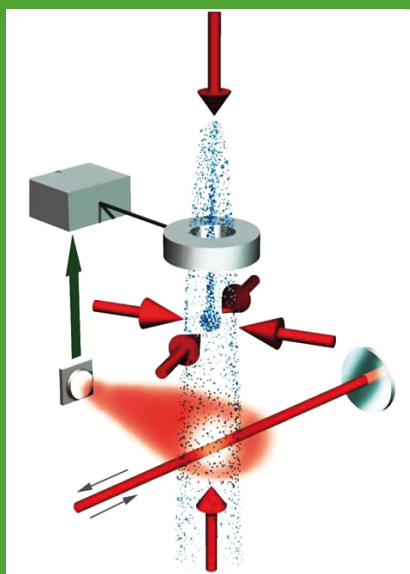


# PHYSIQUE QUANTIQUE

APPLICATIONS ET  
EXERCICES CORRIGÉS – TOME II



MICHEL LE BELLAC

PRÉFACES DE  
CLAUDE COHEN-TANNOUJJI  
ET DE FRANCK LALOË

3<sup>e</sup> ÉDITION

Michel Le Bellac

Physique quantique  
Tome II : Applications  
et exercices corrigés  
3<sup>e</sup> édition

S A V O I R S   A C T U E L S  

---

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

*Illustration de couverture : Fontaine atomique. Des atomes froids stockés initialement dans un piège magnéto-optique sont lancés vers le haut et retombent sous l'effet de la gravité : voir la sous-section 15.3.5. Copyright : C. Salomon, Laboratoire Kastler-Brossel, École Normale Supérieure ; A. Clairon, SYRTE, Observatoire de Paris ; CNES, Centre National d'Études Spatiales. Courtoisie de Christophe Salomon.*

Imprimé en France.

© 2013, EDP Sciences, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A  
et  
CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

ISBN EDP Sciences 978-2-7598-0804-5

ISBN CNRS ÉDITIONS 978-2-271-07604-3

# Table des matières

## Tome I : Fondements

Avant-propos	xxi
Préface de la première édition	xxv
Préface de la troisième édition	xxvii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Structure de la matière . . . . .	1
1.1.1 Échelles de longueur : de la cosmologie aux particules élémentaires . . . . .	1
1.1.2 États de la matière . . . . .	2
1.1.3 Constituants élémentaires . . . . .	6
1.1.4 Interactions (ou forces) fondamentales . . . . .	8
1.2 Physique classique et physique quantique . . . . .	11
1.3 Un peu d'histoire . . . . .	14
1.3.1 Le rayonnement du corps noir . . . . .	14
1.3.2 L'effet photoélectrique . . . . .	18
1.4 Ondes et particules : interférences . . . . .	19
1.4.1 Hypothèse de de Broglie . . . . .	19
1.4.2 Diffraction et interférences avec des neutrons froids . . . . .	20
1.4.3 Interprétation des expériences . . . . .	23
1.4.4 Inégalités de Heisenberg I . . . . .	27
1.4.5 Interféromètre de Mach-Zehnder . . . . .	30
1.5 Niveaux d'énergie . . . . .	33
1.5.1 Niveaux d'énergie en mécanique classique et modèles classiques de l'atome . . . . .	33
1.5.2 L'atome de Bohr . . . . .	36
1.5.3 Ordres de grandeur en physique atomique . . . . .	38
1.6 Exercices . . . . .	40
1.6.1 Ordres de grandeur . . . . .	40
1.6.2 Le corps noir . . . . .	41
1.6.3 Inégalités de Heisenberg . . . . .	42

1.6.4	Diffraction de neutrons par un cristal . . . . .	42
1.6.5	Atomes hydrogénoïdes . . . . .	45
1.6.6	Interféromètre à neutrons et gravité . . . . .	45
1.6.7	Diffusion cohérente et diffusion incohérente de neutrons par un cristal . . . . .	46
1.7	Bibliographie . . . . .	47
<b>2</b>	<b>Mathématiques de la mécanique quantique I :</b>	
	<b>dimension finie</b>	<b>49</b>
2.1	Espaces de Hilbert de dimension finie . . . . .	50
2.2	Opérateurs linéaires sur $\mathcal{H}$ . . . . .	51
2.2.1	Opérateurs linéaires, hermitiens, unitaires . . . . .	51
2.2.2	Projecteurs et notation de Dirac . . . . .	53
2.3	Décomposition spectrale des opérateurs hermitiens . . . . .	55
2.3.1	Diagonalisation d'un opérateur hermitien . . . . .	55
2.3.2	Diagonalisation d'une matrice $2 \times 2$ hermitienne . . . . .	57
2.3.3	Ensemble complet d'opérateurs compatibles . . . . .	59
2.3.4	Opérateurs unitaires et opérateurs hermitiens . . . . .	60
2.3.5	Fonctions d'un opérateur . . . . .	61
2.4	Produit tensoriel de deux espaces vectoriels . . . . .	62
2.4.1	Définition et propriétés du produit tensoriel . . . . .	62
2.4.2	Espaces de dimension $d = 2$ . . . . .	64
2.5	Exercices . . . . .	66
2.5.1	Produit scalaire et norme . . . . .	66
2.5.2	Commutateurs et traces . . . . .	66
2.5.3	Déterminant et trace . . . . .	67
2.5.4	Projecteur dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	67
2.5.5	Théorème de la projection . . . . .	67
2.5.6	Propriétés des projecteurs . . . . .	68
2.5.7	Intégrale gaussienne . . . . .	68
2.5.8	Commutateurs et valeur propre dégénérée . . . . .	68
2.5.9	Matrices normales . . . . .	69
2.5.10	Matrices positives . . . . .	69
2.5.11	Identités opératorielles . . . . .	69
2.5.12	Indépendance du produit tensoriel par rapport au choix de la base . . . . .	70
2.5.13	Produit tensoriel de deux matrices $2 \times 2$ . . . . .	70
2.5.14	Propriétés de symétrie de $ \Phi\rangle$ . . . . .	70
2.6	Bibliographie . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Polarisation : photon et spin 1/2</b>	<b>73</b>
3.1	Polarisation de la lumière et polarisation d'un photon . . . . .	73
3.1.1	Polarisation d'une onde électromagnétique . . . . .	73
3.1.2	Polarisation d'un photon . . . . .	80
3.1.3	Cryptographie quantique . . . . .	86

3.2	Spin $1/2$ . . . . .	91
3.2.1	Moment angulaire et moment magnétique en physique classique . . . . .	91
3.2.2	Expérience de Stern-Gerlach et filtres de Stern-Gerlach . . . . .	93
3.2.3	États de spin d'orientation arbitraire . . . . .	96
3.2.4	Rotation d'un spin $1/2$ . . . . .	98
3.2.5	Dynamique et évolution temporelle . . . . .	104
3.3	Exercices . . . . .	107
3.3.1	Polarisation elliptique et détermination de la polarisation . . . . .	107
3.3.2	Une stratégie optimale pour Ève . . . . .	107
3.3.3	Polarisation circulaire et opérateur de rotation pour les photons . . . . .	108
3.3.4	Théorème de non-clonage quantique . . . . .	109
3.3.5	Expérience à choix retardé . . . . .	109
3.3.6	Autres solutions de (3.45) . . . . .	110
3.3.7	Décomposition d'une matrice $2 \times 2$ . . . . .	111
3.3.8	Exponentielles de matrices de Pauli . . . . .	111
3.3.9	Tenseur $\varepsilon_{ijk}$ . . . . .	112
3.3.10	Mesures successives d'un spin $1/2$ . . . . .	112
3.3.11	Rotation de $2\pi$ d'un spin $1/2$ . . . . .	112
3.3.12	Diffusion de neutrons par un cristal : noyaux de spin $1/2$ . . . . .	113
3.4	Bibliographie . . . . .	114
<b>4</b>	<b>Postulats de la physique quantique</b>	<b>115</b>
4.1	Vecteurs d'état et propriétés physiques . . . . .	116
4.1.1	Principe de superposition . . . . .	116
4.1.2	Propriétés physiques et mesure . . . . .	118
4.1.3	Inégalités de Heisenberg II . . . . .	124
4.2	Évolution temporelle . . . . .	126
4.2.1	Équation d'évolution . . . . .	126
4.2.2	Opérateur d'évolution . . . . .	129
4.2.3	États stationnaires . . . . .	131
4.2.4	Inégalité de Heisenberg temporelle . . . . .	133
4.2.5	Points de vue de Schrödinger et de Heisenberg . . . . .	138
4.3	Approximations et modélisation . . . . .	139
4.4	Exercices . . . . .	142
4.4.1	Dispersion et vecteurs propres . . . . .	142
4.4.2	Méthode variationnelle . . . . .	142
4.4.3	Théorème de Feynman-Hellmann . . . . .	143
4.4.4	Évolution temporelle d'un système à deux niveaux . . . . .	143
4.4.5	Inégalités de Heisenberg temporelles . . . . .	144

4.4.6	L'énigme des neutrinos solaires . . . . .	145
4.4.7	Points de vue de Schrödinger et de Heisenberg . . . . .	147
4.4.8	Borne de Helstrom . . . . .	147
4.4.9	Règle de Born généralisée . . . . .	148
4.4.10	Le système des mésons K neutres : évolution non unitaire . . . . .	149
4.5	Bibliographie . . . . .	151
<b>5</b>	<b>Systèmes à nombre de niveaux fini</b>	<b>153</b>
5.1	Chimie quantique élémentaire . . . . .	153
5.1.1	Molécule d'éthylène . . . . .	153
5.1.2	Molécule de benzène . . . . .	156
5.2	Résonance magnétique nucléaire (RMN) . . . . .	160
5.2.1	Spin 1/2 dans un champ magnétique périodique . . . . .	161
5.2.2	Oscillations de Rabi . . . . .	163
5.2.3	Principes de la RMN et de l'IRM . . . . .	166
5.3	La molécule d'ammoniac . . . . .	169
5.3.1	La molécule d'ammoniac comme système à deux niveaux . . . . .	169
5.3.2	La molécule dans un champ électrique : le maser à ammoniac . . . . .	171
5.3.3	Transitions hors résonance . . . . .	176
5.4	Atome à deux niveaux . . . . .	179
5.4.1	Absorption et émission de photons . . . . .	179
5.4.2	Principes du laser . . . . .	183
5.4.3	Franges de Ramsey et principe des horloges atomiques . . . . .	187
5.5	Exercices . . . . .	191
5.5.1	Base orthonormée de vecteurs propres . . . . .	191
5.5.2	Moment dipolaire électrique du formaldéhyde . . . . .	191
5.5.3	Le butadiène . . . . .	192
5.5.4	Vecteurs propres du hamiltonien (5.22) . . . . .	194
5.5.5	L'ion moléculaire $H_2^+$ . . . . .	194
5.5.6	Compléments sur la RMN . . . . .	195
5.6	Bibliographie . . . . .	195
<b>6</b>	<b>Mathématiques de la mécanique quantique II : dimension infinie</b>	<b>197</b>
6.1	Espaces de Hilbert . . . . .	197
6.1.1	Définitions . . . . .	197
6.1.2	Réalisations d'espaces séparables et de dimensio infinie . . . . .	199
6.2	Opérateurs linéaires sur $\mathcal{H}$ . . . . .	201
6.2.1	Domaine et norme d'un opérateur . . . . .	201
6.2.2	Conjugaison hermitienne . . . . .	203

6.3	Décomposition spectrale . . . . .	205
6.3.1	Opérateurs hermitiens . . . . .	205
6.3.2	Opérateurs unitaires . . . . .	208
6.4	Exercices . . . . .	209
6.4.1	Espaces de dimension infinie . . . . .	209
6.4.2	Spectre d'un opérateur hermitien . . . . .	209
6.4.3	Relations de commutation canoniques . . . . .	209
6.4.4	Opérateurs de dilatation et de transformation conforme . . . . .	210
6.5	Bibliographie . . . . .	210
<b>7</b>	<b>Symétries en physique quantique</b>	<b>211</b>
7.1	Transformation d'un état dans une opération de symétrie . . . . .	212
7.1.1	Invariance des probabilités dans une opération de symétrie . . . . .	212
7.1.2	Théorème de Wigner . . . . .	215
7.2	Générateurs infinitésimaux . . . . .	217
7.2.1	Définitions . . . . .	217
7.2.2	Lois de conservation . . . . .	218
7.2.3	Relations de commutation des générateurs infinitésimaux . . . . .	220
7.3	Relations de commutation canoniques . . . . .	225
7.3.1	Cas de la dimension $d = 1$ . . . . .	225
7.3.2	Réalisation explicite et commentaires . . . . .	227
7.3.3	L'opération parité . . . . .	228
7.4	Invariance galiléenne . . . . .	230
7.4.1	Hamiltonien en dimension $d = 1$ . . . . .	230
7.4.2	Hamiltonien en dimension $d = 3$ . . . . .	234
7.5	Exercices . . . . .	236
7.5.1	Rotations . . . . .	236
7.5.2	Rotations et $SU(2)$ . . . . .	236
7.5.3	Relations de commutation entre l'impulsion et le moment angulaire . . . . .	237
7.5.4	Algèbre de Lie d'un groupe continu . . . . .	238
7.5.5	Règle de somme de Thomas-Reiche-Kuhn . . . . .	239
7.5.6	Centre de masse et masse réduite . . . . .	239
7.5.7	Transformation de Galilée . . . . .	240
7.5.8	Hamiltonien dans un champ magnétique . . . . .	240
7.6	Bibliographie . . . . .	241
<b>8</b>	<b>Mécanique ondulatoire</b>	<b>243</b>
8.1	Diagonalisation de $X$ et de $P$ ; fonctions d'onde . . . . .	244
8.1.1	Diagonalisation de $X$ . . . . .	244
8.1.2	Réalisation dans $L_x^{(2)}(\mathbb{R})$ . . . . .	246



8.1.3	Réalisation dans $L_p^{(2)}(\mathbb{R})$ . . . . .	248
8.1.4	Inégalités de Heisenberg . . . . .	249
8.1.5	Évolution du paquet d'ondes libre . . . . .	251
8.2	Équation de Schrödinger . . . . .	254
8.2.1	Hamiltonien de l'équation de Schrödinger . . . . .	254
8.2.2	Probabilité de présence et vecteur courant . . . . .	255
8.3	Résolution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps . . . . .	258
8.3.1	Généralités . . . . .	258
8.3.2	Réflexion et transmission par une marche de potentiel . . . . .	260
8.3.3	États liés du puits carré . . . . .	262
8.3.4	Diffusion par un potentiel . . . . .	265
8.4	Potentiel périodique . . . . .	270
8.4.1	Théorème de Bloch . . . . .	270
8.4.2	Bandes d'énergie . . . . .	272
8.5	Mécanique ondulatoire en dimension $d = 3$ . . . . .	276
8.5.1	Généralités . . . . .	276
8.5.2	Espace de phase et densité de niveaux . . . . .	278
8.5.3	Règle d'or de Fermi . . . . .	281
8.6	Exercices . . . . .	285
8.6.1	Inégalités de Heisenberg . . . . .	285
8.6.2	Étalement du paquet d'ondes . . . . .	285
8.6.3	Paquet d'ondes gaussien . . . . .	286
8.6.4	Heuristique de l'inégalité de Heisenberg . . . . .	287
8.6.5	Potentiel de Lennard-Jones pour l'hélium . . . . .	287
8.6.6	Marche de potentiel et retard à la réflexion . . . . .	288
8.6.7	Potentiel en fonction $\delta$ . . . . .	288
8.6.8	Niveaux d'énergie du puits cubique infini en dimension $d = 3$ . . . . .	290
8.6.9	Courant de probabilité à trois dimensions . . . . .	290
8.6.10	Densité de niveaux . . . . .	290
8.6.11	Règle d'or de Fermi . . . . .	290
8.6.12	Étude de l'expérience de Stern-Gerlach . . . . .	291
8.6.13	Modèle de mesure de von Neumann . . . . .	292
8.6.14	Transformation de Galilée . . . . .	293
8.7	Bibliographie . . . . .	294
<b>9</b>	<b>Moment angulaire</b> . . . . .	<b>295</b>
9.1	Diagonalisation de $\vec{J}^2$ et de $J_z$ . . . . .	295
9.2	Matrices de rotation . . . . .	299
9.3	Moment angulaire orbital . . . . .	304
9.3.1	Opérateur moment angulaire orbital . . . . .	304
9.3.2	Propriétés des harmoniques sphériques . . . . .	308

9.4	Particule dans un potentiel central . . . . .	311
9.4.1	Équation d'onde radiale . . . . .	311
9.4.2	Atome d'hydrogène . . . . .	315
9.5	Distributions angulaires des désintégrations . . . . .	319
9.5.1	Rotations de $\pi$ , parité, réflexion par rapport à un plan . . . . .	319
9.5.2	Transitions dipolaires . . . . .	322
9.5.3	Désintégrations : cas général . . . . .	327
9.6	Composition de deux moments angulaires . . . . .	328
9.6.1	Composition de deux spins $1/2$ . . . . .	328
9.6.2	Cas général : composition de deux moments angulaires $\vec{J}_1$ et $\vec{J}_2$ . . . . .	331
9.6.3	Composition des matrices de rotation . . . . .	334
9.6.4	Théorème de Wigner-Eckart (opérateurs scalaires et vectoriels) . . . . .	335
9.7	Exercices . . . . .	338
9.7.1	Propriétés de $\vec{J}$ . . . . .	338
9.7.2	Rotation d'un moment angulaire . . . . .	338
9.7.3	Rotations $(\theta, \phi)$ . . . . .	338
9.7.4	Moments angulaires $j = \frac{1}{2}$ et $j = 1$ . . . . .	338
9.7.5	Moment angulaire orbital . . . . .	339
9.7.6	Relation entre les matrices de rotation et les harmoniques sphériques . . . . .	339
9.7.7	Indépendance de l'énergie par rapport à $m$ . . . . .	340
9.7.8	Puits sphérique . . . . .	340
9.7.9	Atome d'hydrogène pour $l \neq 0$ . . . . .	340
9.7.10	Éléments de matrice d'un potentiel . . . . .	341
9.7.11	Équation radiale en dimension $d = 2$ . . . . .	341
9.7.12	Propriété de symétrie des matrices $d^{(j)}$ . . . . .	342
9.7.13	Diffusion de la lumière . . . . .	342
9.7.14	Mesure du moment magnétique du $\Lambda^0$ . . . . .	343
9.7.15	Production et désintégration du méson $\rho^+$ . . . . .	345
9.7.16	Interaction de deux dipôles . . . . .	347
9.7.17	Désintégration du $\Sigma^0$ . . . . .	347
9.7.18	Coefficients de Clebsch-Gordan du couplage $\vec{L} \cdot \vec{S}$ . . . . .	348
9.7.19	Opérateurs tensoriels irréductibles . . . . .	349
9.8	Bibliographie . . . . .	350
<b>10</b>	<b>Oscillateur harmonique</b> . . . . .	<b>351</b>
10.1	L'oscillateur harmonique simple . . . . .	352
10.1.1	Opérateurs de création et d'annihilation . . . . .	352
10.1.2	Diagonalisation du hamiltonien . . . . .	353
10.1.3	Fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique . . . . .	355
10.2	États cohérents . . . . .	357

10.2.1	Définition et propriétés élémentaires . . . . .	357
10.2.2	Opérateurs de déplacement et de phase . . . . .	361
10.3	Mouvement dans un champ magnétique . . . . .	365
10.3.1	Invariance de jauge locale . . . . .	365
10.3.2	Champ magnétique uniforme : niveaux de Landau . .	368
10.4	Exercices . . . . .	371
10.4.1	Éléments de matrice de $Q$ et de $P$ . . . . .	371
10.4.2	Propriétés mathématiques . . . . .	371
10.4.3	États cohérents . . . . .	371
10.4.4	Couplage à une force classique . . . . .	373
10.4.5	Opérateur de phase . . . . .	374
10.4.6	Conservation du courant en présence d'un champ magnétique . . . . .	375
10.4.7	Transformations de jauge non abéliennes . . . . .	375
10.5	Bibliographie . . . . .	377
<b>11</b>	<b>Intrication et non localité quantiques</b>	<b>379</b>
11.1	Opérateur statistique (ou opérateur densité) . . . . .	379
11.1.1	Définition et propriétés . . . . .	379
11.1.2	Opérateur statistique réduit . . . . .	382
11.1.3	Opérateur statistique pour un système à deux niveaux . . . . .	387
11.1.4	Non unicité de la préparation . . . . .	390
11.1.5	Dépendance temporelle de l'opérateur statistique . .	393
11.1.6	Postulats . . . . .	395
11.2	Inégalités de Bell . . . . .	395
11.2.1	Démonstration de l'inégalité BCHSH . . . . .	395
11.2.2	Physique quantique et borne de Cirelson . . . . .	398
11.2.3	Expériences avec des photons . . . . .	403
11.2.4	EPR et la non localité quantique . . . . .	408
11.3	Compléments sur les inégalités de Bell . . . . .	411
11.3.1	Conditions sur les probabilités . . . . .	411
11.3.2	Boîtes de Popescu-Rohrlich . . . . .	413
11.3.3	États GHZ . . . . .	414
11.3.4	Contextualité . . . . .	416
11.4	Décohérence et mesure . . . . .	417
11.4.1	Intrication et perte de cohérence . . . . .	417
11.4.2	Définition générale de la décohérence . . . . .	420
11.4.3	Modèle pour l'émission spontanée . . . . .	422
11.4.4	Modèle de von Neumann pour la mesure . . . . .	424
11.4.5	Modèle de Zurek . . . . .	427
11.4.6	La réduction du paquet d'ondes . . . . .	430
11.4.7	Interprétations . . . . .	431
11.5	Information quantique . . . . .	435

11.5.1	Théorème de non-clonage quantique . . . . .	435
11.5.2	Calcul quantique . . . . .	438
11.5.3	Téléportation quantique . . . . .	444
11.5.4	Échange d'intrication . . . . .	447
11.6	Exercices . . . . .	453
11.6.1	Propriétés des opérateurs statistiques . . . . .	453
11.6.2	Structure fine et effet Zeeman du positronium . . . . .	453
11.6.3	11.6.3 Ondes de spin et magnons . . . . .	455
11.6.4	Écho de spin et décomposition des niveaux en RMN . . . . .	456
11.6.5	Non unicité de la préparation de l'opérateur statistique pour le spin $1/2$ . . . . .	458
11.6.6	Inégalité de Wigner . . . . .	458
11.6.7	États de Hardy . . . . .	459
11.6.8	Photons intriqués en polarisation . . . . .	460
11.6.9	Stratégies gagnantes . . . . .	461
11.6.10	États de Bell et mesure de Bell . . . . .	462
11.6.11	États GHZ . . . . .	462
11.6.12	Théorème de non-clonage quantique . . . . .	463
11.6.13	Discrimination entre deux états non orthogonaux . . . . .	464
11.6.14	Interférences des temps d'émission . . . . .	465
11.6.15	Calcul quantique avec des ions piégés . . . . .	466
11.7	Bibliographie . . . . .	469
<b>Annexes</b>		<b>471</b>
A	Théorème de Wigner et renversement du temps . . . . .	471
A.1	Démonstration du théorème . . . . .	472
A.2	Renversement du sens du temps . . . . .	474
B	Méthode de Wigner et Weisskopf . . . . .	480
C	Constantes physiques . . . . .	484
<b>References</b>		<b>x1</b>
<b>Index</b>		<b>x11</b>
<b>Tome II : Applications et exercices corrigés</b>		
<b>Avant-propos</b>		<b>xxi</b>
<b>12 Méthodes semi-classiques</b>		<b>485</b>
12.1	Propagateurs et fonctions de Green . . . . .	488
12.1.1	Propagateur de l'équation de Schrödinger . . . . .	488
12.1.2	Fonctions de Green . . . . .	489
12.1.3	Propagateur libre . . . . .	491
12.2	L'intégrale de Feynman-Kac . . . . .	492
12.2.1	Mouvement brownien et diffusion . . . . .	492
12.2.2	Propagateur euclidien et fonction de partition . . . . .	496

12.2.3	Intégrale de chemin de Feynman . . . . .	499
12.3	Applications de l'intégrale de chemin . . . . .	501
12.3.1	Oscillateur harmonique . . . . .	501
12.3.2	Intégrale de chemin en présence d'un champ magnétique . . . . .	503
12.3.3	L'effet Aharonov-Bohm . . . . .	506
12.4	L'approximation BKW . . . . .	508
12.4.1	Forme asymptotique de la fonction d'onde . . . . .	508
12.4.2	Formules de raccordement . . . . .	511
12.4.3	Phénomène de Stokes . . . . .	513
12.4.4	États liés . . . . .	515
12.4.5	Effet tunnel . . . . .	518
12.5	Mécanique quantique dans l'espace de phase . . . . .	522
12.5.1	Conditions pour une représentation dans l'espace de phase . . . . .	522
12.5.2	La distribution de Wigner . . . . .	523
12.5.3	Distribution de Wigner pour les états purs . . . . .	526
12.6	Théorème adiabatique et phases géométriques . . . . .	527
12.6.1	Un exemple . . . . .	527
12.6.2	Théorème adiabatique . . . . .	529
12.6.3	La phase géométrique . . . . .	532
12.7	Exercices . . . . .	534
12.7.1	Formule de Trotter . . . . .	534
12.7.2	Longueur de corrélation et niveau excité . . . . .	535
12.7.3	Fonctionnelle génératrice . . . . .	536
12.7.4	Propagateur de Feynman et propagateur euclidien . . . . .	536
12.7.5	Équation de Schrödinger et intégrale de chemin . . . . .	537
12.7.6	Calcul de la fonctionnelles génératrice pour l'oscillateur harmonique . . . . .	537
12.7.7	Formules de raccordement pour $K < 0$ . . . . .	540
12.7.8	Propriétés de la distribution de Wigner . . . . .	541
12.7.9	Évolution temporelle de la distribution de Wigner . . . . .	541
12.7.10	Probabilités de transition à l'approximation adiabatique . . . . .	542
12.7.11	Spin 1/2 dans un champ magnétique : relation avec l'étude générale . . . . .	544
12.7.12	Phase de Berry et effet Aharonov-Bohm . . . . .	545
12.8	Bibliographie . . . . .	545
<b>13</b>	<b>Théorie de la diffusion</b> . . . . .	<b>547</b>
13.1	Section efficace et amplitude de diffusion . . . . .	548
13.1.1	Sections efficaces différentielle et totale . . . . .	548
13.1.2	Amplitude de diffusion . . . . .	550

13.2 Ondes partielles et déphasages . . . . .	553
13.2.1 Développement en ondes partielles . . . . .	553
13.2.2 Diffusion à basse énergie . . . . .	557
13.2.3 Potentiel effectif . . . . .	561
13.2.4 Diffusion neutron-proton à basse énergie . . . . .	563
13.3 Diffusion inélastique . . . . .	565
13.3.1 Théorème optique . . . . .	565
13.3.2 Potentiel optique . . . . .	568
13.4 Développements formels . . . . .	570
13.4.1 Équation intégrale de la diffusion . . . . .	570
13.4.2 Matrice $T$ . . . . .	572
13.4.3 Diffusion d'un paquet d'ondes . . . . .	575
13.5 Théorie opératorielle de la diffusion . . . . .	577
13.5.1 Équations de Lippman-Schwinger . . . . .	577
13.5.2 Matrice $T$ et matrice $S$ . . . . .	581
13.5.3 Collisions inélastiques . . . . .	584
13.5.4 Symétries de la matrice $T$ . . . . .	588
13.6 Exercices . . . . .	591
13.6.1 Pic de Gamow . . . . .	591
13.6.2 Diffusion de neutrons de basse énergie par une molécule d'hydrogène . . . . .	593
13.6.3 Propriétés analytiques de l'amplitude de diffusion neutron-proton . . . . .	594
13.6.4 Approximation de Born . . . . .	596
13.6.5 Optique neutronique . . . . .	596
13.6.6 Section efficace d'absorption de neutrinos . . . . .	599
13.6.7 Non hermiticité de $H_0$ . . . . .	601
13.6.8 Unitarité et théorème optique . . . . .	601
13.6.9 Opérateurs de Møller . . . . .	603
13.7 Bibliographie . . . . .	604
<b>14 Particules identiques</b> . . . . .	<b>605</b>
14.1 Bosons et fermions . . . . .	606
14.1.1 Symétrie ou antisymétrie du vecteur d'état . . . . .	606
14.1.2 Spin et statistique . . . . .	612
14.2 Diffusion de particules identiques . . . . .	616
14.3 États collectifs de fermions . . . . .	619
14.3.1 Le gaz de Fermi à température nulle . . . . .	619
14.3.2 Opérateurs de création et d'annihilation . . . . .	621
14.3.3 Opérateurs de champ et hamiltonien . . . . .	624
14.3.4 Autres formes du hamiltonien . . . . .	629
14.4 États collectifs de bosons . . . . .	632
14.4.1 La condensation de Bose-Einstein . . . . .	632
14.4.2 L'équation de Gross-Pitaevskii . . . . .	635

14.4.3	L'approximation de Bogoliubov . . . . .	638
14.5	Exercices . . . . .	642
14.5.1	Particule $\Omega^-$ et couleur . . . . .	642
14.5.2	Parité du méson $\pi$ . . . . .	642
14.5.3	Fermions de spin 1/2 dans un puits infini . . . . .	643
14.5.4	Désintégration du positronium . . . . .	643
14.5.5	Lame séparatrice et fermions . . . . .	644
14.5.6	Fonctions d'onde et opérateurs de champ . . . . .	644
14.5.7	Hiérarchie BBGKY et approximation de Hartree-Fock . . . . .	645
14.5.8	Approximation semi-classique pour la condensation dans un piège . . . . .	648
14.6	Bibliographie . . . . .	649
<b>15</b>	<b>Atomes à un électron</b> . . . . .	<b>651</b>
15.1	Méthodes d'approximation . . . . .	651
15.1.1	Généralités . . . . .	651
15.1.2	Cas d'une valeur propre simple de $H_0$ . . . . .	653
15.1.3	Cas d'un niveau dégénéré . . . . .	654
15.1.4	Méthode variationnelle . . . . .	655
15.2	Atomes à un électron . . . . .	657
15.2.1	Niveaux d'énergie en l'absence de spin . . . . .	657
15.2.2	Structure fine . . . . .	657
15.2.3	Effet Zeeman . . . . .	660
15.2.4	Structure hyperfine . . . . .	662
15.3	Manipulation d'atomes par laser . . . . .	664
15.3.1	Équations de Bloch optiques . . . . .	664
15.3.2	Forces dissipatives et forces réactives . . . . .	668
15.3.3	Refroidissement Doppler . . . . .	670
15.3.4	Piège magnétooptique . . . . .	676
15.3.5	Fontaines atomiques . . . . .	677
15.4	Exercices . . . . .	679
15.4.1	Perturbation au second ordre et forces de van der Waals . . . . .	679
15.4.2	Corrections d'ordre $\alpha^2$ aux niveaux d'énergie . . . . .	680
15.4.3	Atomes muoniques . . . . .	682
15.4.4	Atomes de Rydberg . . . . .	683
15.4.5	Terme diamagnétique . . . . .	684
15.5	Bibliographie . . . . .	685
<b>16</b>	<b>Atomes complexes et et molécules</b> . . . . .	<b>687</b>
16.1	L'atome à deux électrons . . . . .	687
16.1.1	L'état fondamental de l'atome d'hélium . . . . .	687
16.1.2	États excités de l'atome d'hélium . . . . .	690
16.2	Modèle en couches de l'atome . . . . .	691

16.2.1	Potentiel effectif . . . . .	692
16.2.2	Couplage spin-orbite . . . . .	694
16.3	Molécules diatomiques . . . . .	696
16.3.1	Fonctions d'onde électroniques . . . . .	696
16.3.2	Niveaux de rotation-vibration . . . . .	699
16.4	Exercices . . . . .	700
16.4.1	États $np^3$ permis . . . . .	700
16.4.2	Théorème de non croisement des niveaux . . . . .	701
16.4.3	Structure hyperfine du deutérium . . . . .	701
16.4.4	Modèle en couches du noyau atomique . . . . .	703
16.5	Bibliographie . . . . .	705
<b>17</b>	<b>Champ électromagnétique quantifié</b>	<b>707</b>
17.1	Quantification du champ électromagnétique . . . . .	707
17.1.1	Quantification d'un mode . . . . .	708
17.1.2	Cas général . . . . .	711
17.2	États du champ électromagnétique . . . . .	718
17.2.1	Fluctuations quantiques du champ électromagnétique . . . . .	718
17.2.2	Lames séparatrices et détection homodyne . . . . .	722
17.2.3	Hamiltonien de Jaynes-Cummings . . . . .	726
17.3	Interaction atome-champ électromagnétique . . . . .	730
17.3.1	Théorie semi-classique . . . . .	731
17.3.2	Approximation dipolaire . . . . .	733
17.3.3	Effet photoélectrique . . . . .	735
17.3.4	Champ électromagnétique quantifié : émission spontanée . . . . .	737
17.3.5	Décohérence par émission de photons . . . . .	743
17.4	Corrélations de photons . . . . .	746
17.4.1	Détection de photons et fonctions de corrélation . . . . .	746
17.4.2	Cohérences . . . . .	749
17.4.3	Expérience de Hanbury Brown et Twiss . . . . .	752
17.5	Exercices . . . . .	755
17.5.1	Potentiels scalaire et vecteur en jauge de Coulomb . . . . .	755
17.5.2	Dépendance temporelle du coefficient de Fourier classique . . . . .	755
17.5.3	Relations de commutation du champ électromagnétique . . . . .	756
17.5.4	Détection homodyne et lame séparatrice déséquilibrée . . . . .	756
17.5.5	Oscillations de Rabi dans une cavité . . . . .	757
17.5.6	Effet Casimir . . . . .	758
17.5.7	Observation non destructive de photons . . . . .	759



17.5.8	Cohérences et interférences . . . . .	763
17.5.9	Forces réactives . . . . .	763
17.5.10	Capture radiative de neutrons par l'hydrogène . . . . .	765
17.5.11	L'expérience de Badurek <i>et al.</i> . . . . .	767
17.6	Bibliographie . . . . .	769
<b>18</b>	<b>Systèmes quantiques ouverts</b>	<b>771</b>
18.1	Superopérateurs . . . . .	773
18.1.1	Représentation de Kraus . . . . .	773
18.1.2	Modèle pour l'amortissement de phase . . . . .	777
18.2	Équations pilotes : la forme de Lindblad . . . . .	779
18.2.1	L'approximation markovienne . . . . .	779
18.2.2	L'équation de Lindblad . . . . .	781
18.2.3	Exemple : l'oscillateur harmonique amorti . . . . .	783
18.3	Couplage à un bain thermique d'oscillateurs . . . . .	785
18.3.1	Équations d'évolution exactes . . . . .	785
18.3.2	Déduction de l'équation pilote . . . . .	787
18.3.3	Relaxation d'un système à deux niveaux . . . . .	790
18.3.4	Mouvement brownien quantique . . . . .	793
18.3.5	Décohérence d'un paquet d'ondes . . . . .	798
18.4	Exercices . . . . .	799
18.4.1	La transposition n'est pas complètement positive . . . . .	799
18.4.2	Représentation de Kraus pour le modèle d'émission spontanée . . . . .	800
18.4.3	Modèle de dépolarisation . . . . .	800
18.4.4	Amortissements de phase et d'amplitude . . . . .	801
18.4.5	Détails de la preuve de l'équation pilote . . . . .	801
18.4.6	Superposition d'états cohérents . . . . .	802
18.4.7	Dissipation dans un système à deux niveaux . . . . .	804
18.4.8	Approximation séculaire et équation de Lindblad . . . . .	804
18.4.9	Modèles simples de relaxation . . . . .	805
18.4.10	Un autre choix pour la fonction spectrale $\mathbf{J}(\omega)$ . . . . .	806
18.4.11	L'équation de Fokker-Planck-Kramers pour une particule brownienne . . . . .	806
18.5	Bibliographie . . . . .	807
<b>19</b>	<b>Physique quantique relativiste</b>	<b>809</b>
19.1	Les groupes de Lorentz et de Poincaré . . . . .	810
19.1.1	Transformations de Lorentz spéciales . . . . .	810
19.1.2	Produit scalaire de Minkowski . . . . .	811
19.1.3	Groupe de Lorentz connexe . . . . .	814
19.1.4	Relation avec le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	815
19.1.5	Cinématique relativiste . . . . .	818
19.2	L'analyse de Wigner : masse et spin des particules . . . . .	819
19.2.1	Algèbre de Lie du groupe de Poincaré . . . . .	819

19.2.2	États à une particule : masse et spin . . . . .	824
19.2.3	Particules de masse non nulle . . . . .	827
19.2.4	Particules de masse nulle . . . . .	829
19.3	L'équation de Dirac . . . . .	832
19.3.1	Construction de l'équation de Dirac . . . . .	832
19.3.2	Courants de de Dirac . . . . .	838
19.3.3	Courant de Dirac en présence d'un champ électromagnétique . . . . .	840
19.3.4	Le hamiltonien de structure fine . . . . .	843
19.3.5	L'atome d'hydrogène . . . . .	845
19.4	Symétries de l'équation de Dirac . . . . .	851
19.4.1	Invariance de Lorentz . . . . .	851
19.4.2	Parité . . . . .	852
19.4.3	Conjugaison de charge . . . . .	853
19.4.4	Inversion du temps . . . . .	854
19.5	Quantification du champ de Dirac . . . . .	855
19.5.1	Ondes planes . . . . .	855
19.5.2	Champ de Dirac quantifié . . . . .	857
19.5.3	Hamiltonien du champ de Dirac . . . . .	858
19.6	Exercices . . . . .	860
19.6.1	Décomposition polaire d'une transformation de Lorentz . . . . .	860
19.6.2	Relations de commutation des $J^{\alpha\beta}$ et des $P^\mu$ . . . . .	861
19.6.3	Rotation de Thomas-Wigner et précession de Thomas . . . . .	861
19.6.4	Relation de commutation des $J_{\mu\nu}$ et des $W_\lambda$ . . . . .	865
19.6.5	Cas de la masse nulle . . . . .	866
19.6.6	Courant de Klein-Gordon . . . . .	866
19.6.7	Automorphismes de $SL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	866
19.6.8	Équation de Dirac . . . . .	867
19.6.9	Courant de Dirac en présence d'un champ magnétique . . . . .	867
19.6.10	Transformation de Lorentz d'un spineur de Dirac . . . . .	867
19.6.11	Relations d'orthogonalité . . . . .	868
19.6.12	Relation de Parseval . . . . .	868
19.7	Bibliographie . . . . .	868
<b>20</b>	<b>Corrigés d'une sélection d'exercices</b>	<b>871</b>
20.1	Exercices du chapitre 1 . . . . .	871
1.6.1	Ordres de grandeur . . . . .	871
1.6.4	Diffraction de neutrons par un cristal . . . . .	873
1.6.6	Interféromètre à neutrons et gravité . . . . .	874

1.6.7	Diffusion cohérente et diffusion incohérente de neutrons par un cristal . . . . .	875
20.2	Exercices du chapitre 2 . . . . .	876
2.5.3	Déterminant et trace . . . . .	876
2.5.10	Matrices positives . . . . .	877
2.5.11	Identités opératorielles . . . . .	877
20.3	Exercices du chapitre 3 . . . . .	878
3.3.1	Polarisation elliptique et détermination de la polarisation . . . . .	878
3.3.2	Une stratégie optimale pour Ève . . . . .	879
3.3.5	Autres solutions de (3.45) . . . . .	880
3.3.7	Exponentielles de matrices de Pauli . . . . .	881
3.3.12	Diffusion de neutrons par un cristal : noyaux de spin 1/2 . . . . .	882
20.4	Exercices du chapitre 4 . . . . .	883
4.4.4	Évolution temporelle d'un système à deux niveaux . . . . .	883
4.4.5	Inégalités de Heisenberg temporelles . . . . .	884
4.4.6	L'énigme des neutrinos solaires . . . . .	885
4.4.8	Borne de Helstrom . . . . .	886
4.4.9	Règle de Born généralisée . . . . .	887
4.4.10	Le système des mésons K neutres : évolution non unitaire . . . . .	888
20.5	Exercices du chapitre 5 . . . . .	889
5.5.3	Le butadiène . . . . .	889
5.5.5	L'ion moléculaire $H_2^+$ . . . . .	891
5.5.6	Compléments sur la RMN . . . . .	892
20.6	Exercices du chapitre 6 . . . . .	892
6.4.3	Relations de commutation canoniques . . . . .	892
20.7	Exercices du chapitre 7 . . . . .	894
7.5.2	Rotations et $SU(2)$ . . . . .	894
7.5.4	Algèbre de Lie d'un groupe continu . . . . .	895
7.5.5	Règle de somme de Thomas-Reiche-Kuhn . . . . .	896
7.5.8	Hamiltonien dans un champ magnétique . . . . .	897
20.8	Exercices du chapitre 8 . . . . .	898
8.6.2	Étalement du paquet d'ondes . . . . .	898
8.6.3	Paquet d'ondes gaussien . . . . .	899
8.6.7	Potentiel en fonction $\delta$ . . . . .	901
8.6.12	Étude de l'expérience de Stern-Gerlach . . . . .	905
8.6.13	Modèle de mesure de von Neumann . . . . .	906
20.9	Exercices du chapitre 9 . . . . .	907
9.7.5	Moment angulaire orbital . . . . .	907
9.7.6	Relation entre les matrices de rotation et les harmoniques sphériques . . . . .	908

9.7.8	Puits sphérique . . . . .	909
9.7.13	Diffusion de la lumière . . . . .	910
9.7.14	Mesure du moment magnétique du $\Lambda^0$ . . . . .	912
9.7.15	Production et désintégration du méson $\rho^+$ . . . . .	913
9.7.17	Désintégration du $\Sigma^0$ . . . . .	916
9.7.18	Coefficients de Clebsch-Gordan du couplage $\vec{L} \cdot \vec{S}$ . . . . .	917
20.10	Exercices du chapitre 10 . . . . .	917
10.4.2	Propriétés mathématiques . . . . .	917
10.4.3	États cohérents . . . . .	918
10.4.4	Couplage à une force classique . . . . .	921
10.4.5	Opérateur de phase . . . . .	922
10.4.7	Transformations de jauge non abéliennes . . . . .	924
20.11	Exercices du chapitre 11 . . . . .	925
11.6.1	Propriétés des opérateurs statistiques . . . . .	925
11.6.2	Structure fine et effet Zeeman du positronium . . . . .	926
11.6.3	Ondes de spin et magnons . . . . .	928
11.6.4	Écho de spin et décomposition des niveaux en RMN . . . . .	930
11.6.6	Inégalité de Wigner . . . . .	931
11.6.7	États de Hardy . . . . .	932
11.6.8	Photons intriqués en polarisation . . . . .	933
11.6.11	États GHZ . . . . .	934
11.6.13	Discrimination entre deux états non orthogonaux . . . . .	934
11.6.14	Interférences des temps d'émission . . . . .	935
11.6.15	Calcul quantique avec des ions piégés . . . . .	936
20.12	Exercices du chapitre 12 . . . . .	939
12.7.2	Longueur de corrélation et niveau excité . . . . .	939
12.7.4	Propagateur de Feynman et propagateur euclidien . . . . .	940
12.7.6	Calcul de la fonctionnelle génératrice pour l'oscillateur harmonique . . . . .	941
12.7.10	Probabilités de transition à l'approximation adiabatique . . . . .	945
20.13	Exercices du chapitre 13 . . . . .	948
13.5.1	Pic de Gamow . . . . .	948
13.5.2	Diffusion de neutrons de basse énergie par une molécule d'hydrogène . . . . .	951
13.5.3	Propriétés analytiques de l'amplitude de diffusion neutron-proton . . . . .	952
13.5.5	Optique neutronique . . . . .	958
13.5.6	Section efficace d'absorption des neutrinos . . . . .	960
13.6.7	Non hermiticité de $H_0$ . . . . .	962
20.14	Exercices du chapitre 14 . . . . .	962

- ordinaire 75
  - rayonnement du corps noir
    - (ou thermique) 14, 752
  - rayonnement gaussien 751
  - réduction du paquet d'ondes
    - 122, 430
  - référentiel tournant 162
  - réflexion quantique 34
  - refroidissement Doppler 670
  - refroidissement laser 664
  - registre de données 441
  - registre de résultats 441
  - règle
    - de Bohr-Sommerfeld 37, 516
    - de Born 117, 148, 395
    - de factorisation 82
    - de Hund 695
    - de sélection 734
    - de supersélection 118
    - d'or de Fermi 284, 738, 792
  - relation
    - d'anticommutation canonique (RAC) 623, 857
    - de commutation canonique (RCC) 140, 226, 638
    - de commutation du champ électromagnétique 717
    - de commutation du moment angulaire 22, 295
    - de fermeture 55, 207, 245, 277
    - d'Einstein 676, 795
    - de Planck-Einstein 19, 132
    - d'unitarité 569, 584, 601
  - renormalisation 38, 718
  - renversement du temps 230, 474, 588, 854
  - représentation
    - chirale 838
    - de Kraus 774
    - des relations de commutation 227
    - de Wigner (voir distribution de)
    - irréductible 302
    - projective 216, 225
    - spinorielle 216
    - vectorielle 216
  - répulsion (ou non-croisement) des niveaux 173, 697
  - réseau réciproque 43
  - résolvante 62, 491
  - résonance 161, 165, 595
    - magnétique nucléaire (RMN) 161, 166
  - rotateur sphérique 307
  - rotation 218
    - de Thomas-Wigner 823, 829, 861
    - de Wick 493, 811
  - rydberg 38, 316
- S**
- saut quantique 775
  - section efficace
    - cohérente 598
    - de Rutherford 596
    - différentielle 548
    - élastique 566
    - incohérente 598
    - inélastique 567
    - totale 549, 567
  - semi-groupe dynamique 783
  - sensibilité d'un détecteur 748
  - séparabilité (d'un espace) 199
  - simplement connexe 224, 815
  - source 501
    - classique 373
    - de particules 259
    - du champ électromagnétique 11, 708
  - sous-espace d'une valeur propre 57
  - spectre 205
    - continu 206
    - de rotation 308
    - de niveaux 37, 318
    - discret 206
  - sphère
    - de Fermi 621
    - de Poincaré-Bloch 103, 389
    - dure 550
  - spin 92, 702
  - spin 1/2 92, 161, 303, 329
  - spineur de Dirac 837
  - spineur de Majorana 854

- spineur de Pauli 833
- spineur de Weyl 833
- statistique 609
  - de Bose, ou de Bose-Einstein 609
  - de Fermi, ou de Fermi-Dirac 609
  - de Maxwell-Boltzmann 633
- structure fine 454, 657, 694, 843
- structure hyperfine 663, 701
- superfluidité 642
- superopérateur 775
- superposition cohérente 121, 389, 778
- superposition incohérente 390, 778
- surface de Fermi 620
- symétrie 211
  - de jauge 375
  - interne 375
- symétrisation 611
- système
  - à deux niveaux 387
  - à nombre de niveaux fini 140
  - intégréable 517
  - quantique fermé 127, 771
  - quantique ouvert 666, 771
- T**
- téléportation quantique 444
- température
  - critique 634
  - de Curie 615
  - de Néel 615
  - de recul 673
  - Doppler 675
- temps
  - de cohérence 186
  - de décohérence 421, 778, 798, 803
  - de relaxation 779
  - de relaxation longitudinale  $T_1$  167, 772
  - de relaxation transverse  $T_2$  167, 456, 772
  - imaginaire (ou euclidien) 493
- tenseur complètement
  - antisymétrique d'ordre 4  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  826
- tenseur métrique 813
- terme
  - d'échange 631
  - de Darwin 682, 845
  - diamagnétique 684
  - direct 631
- test 84
  - idéal 120
  - maximal 123
- tétrade 827
- théorème
  - adiabatique 529
  - d'addition des harmoniques sphériques 310
  - de Bell 403
  - de Bloch 271
  - de Feynman-Hellmann 143
  - d'Ehrenfest 133
  - de Gleason 387
  - de Kochen-Specker 416
  - de nonclonage quantique 87, 109, 435
  - de purification de Schmidt 385
  - de représentation de Kraus 776
  - de Stone 208
  - de von Neumann 227
  - de Wigner 215, 472
  - de Wigner-Eckart 337, 350
  - GHJW 392
  - optique 568, 603
  - spin-statistique 612, 859
- théorie
  - de Fermi 600
  - de jauge abélienne 376
  - de jauge non abélienne 375
  - des perturbations dégénérée 652
  - des perturbations dépendant du temps 282
  - des perturbations non dégénérée 652, 688
  - électrofaible 600
  - locale 406
- trace 55
  - partielle 384