SAVOIRS PHYSIQUE ACTUELS

# SYMÉTRIES CONTINUES


FRANCK LALOË

PRÉFACE DE
PHILIPPE GRANGIER



CNRS ÉDITIONS

edp sciences

PHYSIQUE

# SYMÉTRIES CONTINUES

FRANCK LALOË

Les groupes de symétrie, ou groupes d'invariance, jouent un rôle important dans toute la physique. Les translations d'espace et de temps, les rotations d'espace et enfin les transformations de Galilée ou de Lorentz entre référentiels d'inertie définissent la structure de l'espace-temps. Les symétries correspondantes sont tout particulièrement importantes en mécanique quantique. En effet les opérateurs fondamentaux - énergie, position, impulsion, moment angulaire - ainsi que leurs relations de commutation, loin d'être arbitraires, sont déterminés par la géométrie de l'espace et celle de l'espace-temps.

Ces considérations de symétrie permettent de comprendre l'origine de la masse et du spin et d'établir des équations d'onde comme l'équation de Schrödinger ou celle de Dirac à partir du groupe d'invariance choisi : Galilée ou Lorentz. Ces équations permettent de décrire les particules de spin 1/2 et prédisent correctement leur moment magnétique anormal.

Cet ouvrage, issu d'un cours de DEA de Physique théorique de l'ENS, a à la fois un caractère fondamental et appliqué. L'utilisation des symétries, et en particulier de celle de rotation, est un outil pratique permettant une approche géométrique de problèmes comme le théorème de Wigner-Eckart ou les opérateurs tensoriels irréductibles. Enfin le livre discute de deux symétries discrètes, la parité et le renversement du temps.

***Franck Laloë** est directeur de recherche émérite au CNRS. Il travaille à l'École normale supérieure de Paris dans le laboratoire Kastler Brossel, à la pointe de la physique quantique. Avec Claude Cohen-Tannoudji et Bernard Diu, il est également co-auteur de l'ouvrage Mécanique Quantique (tomes I, II et III) disponible dans la collection Savoirs Actuels, devenu un classique dans les universités françaises et étrangères.*

Série Physique dirigée par Michèle LEDUC et Michel LE BELLAC

SAVOIRS ACTUELS

Collection dirigée par Michèle LEDUC

CNRS ÉDITIONS

www.cnrseditions.fr

edp sciences

www.edpsciences.org

Création graphique : Béatrice Couëdel

Ces ouvrages, écrits par des chercheurs, reflètent des enseignements dispensés dans le cadre de la formation à la recherche. Ils s'adressent donc aux étudiants avancés, aux chercheurs désireux de perfectionner leurs connaissances ainsi qu'à tout lecteur passionné par la science contemporaine.

9 782759 826315

ISBN EDP Sciences 978-2-7598-2631-5

ISBN CNRS ÉDITIONS 978-2-271-13957-3

Franck Laloë

# Symétries continues

SAVOIRS ACTUELS
EDP Sciences/CNRS Éditions

**Dans la même collection :**

*Plasmas créés par laser - Généralités et applications choisies*
Patrick Mora

*Physique de la turbulence - Des tourbillons aux ondes*
Sébastien Galtier

*Le temps dans la géolocalisation par satellites*
Pierre Spagnou et Sébastien Trilles

*Physique quantique, information et calcul - Des concepts aux applications*
Pascal Degiovanni, Natacha Portier, Clément Cabart, Alexandre Feller et Benjamin Roussel

*Théorie statistique des champs*
François David

*Mécanique quantique - Tomes I, II et III*
Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu et Franck Laloë

*Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique ? - 2e édition*
Franck Laloë

Retrouvez tous nos ouvrages et nos collections sur
http://laboutique.edpsciences.fr

Imprimé en France



EDP Sciences, ISBN (papier) : 978-2-7598-2631-5, ISBN (ebook) : 978-2-7598-2632-2
CNRS Éditions, ISBN : 978-2-271-13957-3

# Table des matières

La naissance de la mécanique quantique a souvent été comparée à celle de la relativité, initialement introduite en 1905 par Albert Einstein. La force du raisonnement d'Einstein a été de partir d'idées physiques fondées sur l'invariance de la vitesse de la lumière, d'en déduire un principe de symétrie très général (équivalence de tous les référentiels inertiels), puis de traduire ces idées en équations, pour enfin construire une théorie conséquence nécessaire de ces équations. Il est ainsi arrivé à la relativité, sous sa forme dite spéciale (ou restreinte). Cette construction déductive a donné aux théories de la relativité, tant spéciale que générale (elle aussi basée sur un principe physique, le principe d'équivalence), un caractère particulièrement convaincant. Par opposition en quelque sorte, la découverte de la mécanique quantique n'est pas issue d'un tel superbe raisonnement abstrait, mais plutôt d'une collection de mystères expérimentaux : comment calculer le rayonnement du corps noir, les spectres atomiques, ou l'effet photoélectrique ?

Après 25 ans d'efforts, de 1900 à 1925, la solution est apparue, comme un algorithme presque magique, fournissant des résultats permettant d'expliquer toutes les expériences. En quelques années, il a aussi été démontré que ce formalisme était mathématiquement cohérent, même s'il pouvait être écrit sous différentes formes, soit en tant qu'équations d'onde, soit en tant que mécanique matricielle. Il s'agissait donc d'un succès fantastique pour la physique, assorti d'une énorme réserve : alors que les équations étaient cohérentes et claires, et les prédictions toujours vérifiées, les objets physiques eux-mêmes restaient mal définis. De nombreuses interprétations contradictoires ont donc été proposées, en tentant désespérément de reconstruire des objets et des propriétés à partir de ces extraordinaires équations. Le manque de succès de ces tentatives a pu conduire à la conclusion qu'elles étaient irrémédiablement vouées à l'échec et qu'il n'y avait rien, ou alors quelque chose vide de sens, entre les données expérimentales et le formalisme mathématique.

Alors que nous approchons du centenaire de la mécanique quantique, la situation est-elle toujours la même ? Ou est-il possible d'identifier quelques pierres blanches le long de ce chemin accidenté, qui pourraient finalement donner un sens à toute la construction ? Et il s'agirait ici de revenir à l'idée simple qui fonde la physique, en affirmant qu'elle décrit bien des objets et leurs propriétés, qui existent dans le monde réel.

À mon avis, ce livre est une telle pierre blanche sur le long chemin de la physique quantique. J'ai découvert ces idées en tant qu'étudiant au "DEA Brossel" au début des années 1980, en suivant le cours de Franck dont cet ouvrage est isssu, et elles m'ont immédiatement fasciné. Au lieu de règles de quantification canoniques mystérieuses et presque magiques, une grande partie du formalisme de la mécanique quantique était obtenue par une voie beaucoup plus terre à terre : en partant simplement des règles qui régissent le monde de la physique classique, intégrées dans des principes de symétrie. Ces règles incluent les transformations géométriques, translations dans l'espace et le temps, rotations, et peuvent être étendues aux changements de référentiel, qu'ils soient effectués en relativité galiléenne ou einsteinienne. En admettant que la description d'un système quantique requiert un espace de Hilbert (j'y reviendrai plus loin), on peut montrer que toutes ces transformations de symétrie continues doivent être représentées, au sens mathématique, par des transformations unitaires (ou antiunitaires) agissant dans l'espace de Hilbert. A partir de la structure même de ces transformations géométriques généralisées, et avec un petit (mais crucial !) détour par les algèbres de Lie pour écrire des relations de commutations entre générateurs infinitésimaux des opérations de symétrie, de nombreuses caractéristiques essentielles de la mécanique quantique apparaissent alors “spontanément” : l'équation de Schrödinger dans le cas de la relativité de Galilée, les équations de Klein-Gordon et de Dirac dans le cas de la relativité d'Einstein, et le spin (étonnamment !) dans les deux cas. Cet ouvrage présente ces reconstructions de manière particulièrement claire et convaincante.

À mon avis, cette connexion intime entre le classique et le quantique nous indique qu'il est également vain de tenter, soit de “rendre le quantique classique” avec des variables cachées ou idées similaires, soit de “rendre le classique quantique”, avec des approches de type émergence. En fait, et en accord avec une version rajeunie des idées de Bohr, les deux aspects classique et quantique sont simultanément nécessaires pour décrire notre monde physique, parce que la description des systèmes quantiques (idéalement isolés) n'a de sens que si elle est intégrée dans des contextes classiques (idéalement non bornés). Mais je parle là de mon point de vue personnel, et pas de celui exprimé par Franck dans ce livre, donc je dois ajouter qu'au-delà de ces questions fondamentales on y trouve aussi des réponses très pratiques – qui étaient en fait le véritable objectif du cours de DEA ! Il s'agit donc d'apprendre à connaître les opérateurs tensoriels irréductibles, le théorème de Wigner-Eckart, les coefficients de Clebsch-Gordan – des notions moins métaphysiques que les considérations précédentes, mais néanmoins d'une importance fondamentale, en particulier pour toute la théorie des spectres atomiques et moléculaires.

Dans une dernière partie de cette introduction, je ne peux m'empêcher de revenir sur une affirmation précédente, “admettre qu'un système quantique a besoin d'un espace de Hilbert... ” : mais pourquoi en est-il ainsi ? Cette question m'a préoccupé pendant de nombreuses années, mais je pense avoir une réponse maintenant, même si elle n'est pas (encore ?) partagée par Franck : ce qui doit venir avant le présent livre est simplement une forme de théorie non classique des probabilités, basée sur des projections (dans un espace de Hilbert) plutôt que sur des partitions (dans une tribu de Borel), comme ce serait le cas en physique classique. L'idée de base de cette nouvelle théorie des probabilités est d'associer des projecteurs mutuellement orthogonaux à des résultats de mesure mutuellement exclusifs. Ceci correspond à une propriété fondamentalement quantique, à savoir que les évènements mutuellement exclusifs correspondant à des résultats de mesure ne peuvent être subdivisés, et que pour un système donné, il n'y aura jamais plus de N résultats de mesure mutuellement exclusifs dans tout contexte de mesure réalisable. Cette idée de quantification contextuelle est extensible (avec quelques précautions mathématiques !) à N infini dénombrable, en utilisant des bases hilbertiennes et des distributions.

En admettant cette idée fondamentalement quantique, et quelques arguments simples, il n'y a en fait plus de choix : des théorèmes mathématiques très puissants permettent de montrer que la seule théorie possible est la mécanique quantique. Plus précisément, le théorème d'Uhlhorn, discuté dans un complément de ce livre, montre que les transformations unitaires entre projecteurs sont nécessaires pour conserver le caractère mutuellement exclusif des évènements dans chaque contexte ; et le théorème de Gleason montre que la loi de Born est nécessaire pour respecter la structure générale d'une loi de probabilité. Une fois ce cadre probabiliste établi, on parvient en fait au point de départ de cet ouvrage, et la vraie physique – celle des transformations de symétrie continues – peut entrer en action.

Je ne pense pas que Franck veuille se lancer sur cette voie aventureuse, bien qu'elle me soit apparue comme une conséquence des développements présentés ici ; mais que vous soyez d'accord ou pas, les idées présentées dans cet ouvrage sont passionnantes, découvrez-les (ou redécouvrez-les) !

Philippe Grangier
CNRS - Institut d'Optique Graduate School - Ecole Polytechnique.

Comme beaucoup d'ouvrages, celui-ci est issu d'un cours présenté devant des étudiants pendant plusieurs années, d'un polycopié rédigé à cette occasion, ainsi que d'exposés préparés par ces mêmes étudiants pour en illustrer certains aspects. Au tout début, il s'agissait d'un cours du DEA "Physique quantique" dispensé à la fin des années 1970 au laboratoire de physique de l'ENS. L'objectif principal était de familiariser de futurs doctorants avec les techniques de calcul basées sur l'invariance par rotation, les opérateurs tensoriels irréductibles, le théorème de Wigner-Eckart, etc. Ces techniques, souvent importées de la physique nucléaire, étaient en effet devenues un outil de base en optique quantique, théorie du pompage optique, relaxation, etc. Avec cet objectif, il m'avait cependant semblé utile de replacer l'exposé dans un contexte un peu plus général, et de reprendre les idées de Wigner sur le rôle essentiel des générateurs du groupe de Poincaré. L'expérience a rapidement montré que cet aspect intéressait particulièrement les étudiants (ainsi d'ailleurs que l'enseignant !), et ce qui était au départ un cours de deux heures s'est rapidement développé en plusieurs chapitres. Au bout de quelques années, cet aspect plus fondamental était devenu une bonne moitié du cours. Le contenu de cet ouvrage reflète tout naturellement cette dualité dans les objectifs d'enseignement.

Un premier point de vue est celui du lecteur désirant maîtriser le plus rapidement possible les outils techniques d'un tel cours. Après une introduction générale, il pourra directement passer aux chapitres VII et VIII qui exposent les résultats principaux concernant les symétries de rotation, ou au chapitre IX concernant les symétries d'échange entre particules. C'est également avec l'objectif de fournir des outils pratiques utiles que le complément $D_V$, ainsi que l'appendice, font des incursions dans le domaine des symétries discrètes : la parité d'espace et le renversement du temps. Au lieu de considérer cette dernière comme une symétrie à part, comme c'est souvent le cas, nous la placerons dans le cadre général des symétries d'espace-temps.

Un autre point de vue sera celui du lecteur qui, au contraire, désire privilégier les aspects fondamentaux. Il se dirigera alors plutôt vers les chapitres V et VI. La démarche qui y est présentée est celle de Wigner [4] dans le cadre de la relativité restreinte d'Einstein, et celle de Levy-Leblond [29, 30] dans le cadre galiléen. Elle permet de montrer comment "le quantique émerge du classique" à partir d'hypothèses très générales : d'une part on suppose que l'espace-temps classique reste en mécanique quantique le cadre général permettant de décrire l'évolution des systèmes physiques, et d'autre part on suppose que cette description se fait dans un espace des états linéaire (et complexe). Inutile alors d'utiliser des "règles de quantification", plus ou moins artificielles et parfois ambigües, afin de passer d'une description classique à une description quantique d'un système physique. Les seules propriétés de l'espace-temps classique permettent en effet de prévoir l'existence d'opérateurs quantiques linéaires agissant dans l'espace des états, et possèdant des propriétés de commutation bien précises ; à partir de là, on peut ensuite construire des espaces des états divers, plus ou moins simples. Ainsi, sans aucune hypothèse supplémentaire on démontre l'existence de plusieurs opérateurs, un de masse (diagonal), un autre d'impulsion, un autre de moment cinétique, etc. De plus, et même pour une particule ponctuelle, on voit apparaître un opérateur de spin associé à une rotation interne, ce qui est impossible en mécanique classique (un objet vraiment ponctuel ne peut tourner sur lui-même). En un sens on pourrait dire que, partant de considérations physiques (l'espace-temps a une structure classique donnée par la relativité restreinte) on arrive à des résultats mathématiques sur les descriptions quantiques possibles des objets les plus simples (représentations irréductibles). A partir de ces considérations, on peut construire diverses équations d'onde quantiques : équations de Schrödinger, Klein-Gordon, Dirac.

D'un point de vue pratique, nous avons utilisé la convention usuelle selon laquelle des passages pouvant être sautés en première lecture sont imprimés en plus petits caractères. Nous avons également conservé, dans toute la mesure du possible, les notations de la référence [10]. Après quelques hésitations, nous n'avons pas fait un usage généralisé des notations covariantes de la relativité. Ces notations sont certes presque indispensables en théorie des champs, et il est donc utile de familiariser le lecteur avec elles. On y gagne aussi en élégance, par exemple lorsque l'on traite les 6 générateurs du groupe de Lorentz propre comme les composantes d'un seul tenseur du second ordre, que l'on construit le générateur de Pauli-Lubanski, etc. Mais on perd ainsi un objectif constant de notre approche : mener des raisonnements parallèles pour les groupes de Galilée et de Poincaré, bien identifier les termes supplémentaires en $1/c$ qui apparaissent dans le second cas, et mettre ainsi en lumière l'origine des effets relativistes. Nous nous en sommes donc tenus à la notation la plus élémentaire qui, pour finir, n'impose pas de calculs plus longs si l'on veut détailler chaque étape du raisonnement.

Les diverses versions du polycopié initial, ainsi que du présent manuscrit, ont bénéficié des conseils de bien des collègues et étudiants ayant suivi ce cours. Ne pouvant tous les citer, je me limiterai à deux, qui depuis sont devenus des chercheurs réputés (et des amis) : Dominique Delande, un des premiers à avoir pris la peine de lire en détail le polycopié initial et proposé des corrections fort utiles ; Philippe Grangier qui, depuis toujours, s'est montré un partisan enthousiaste de ces méthodes de "construction" de la mécanique quantique à partir des symétries, et en a fait usage dans ses propres travaux. L'appendice sur le renversement du temps a grandement bénéficié des remarques très pertinentes de Guy Fishman. Un grand merci tout spécial à Michel Le Bellac qui, après une lecture soigneuse de plusieurs chapitres, a fait plusieurs suggestions très intéressantes, et m'a incité à compléter le texte sur certains points qui manquaient effectivement à l'exposé.

# Chapitre I

# Transformations de symétrie



## A. Symétries fondamentales

### A-1. Définition

Considérons un système physique quelconque qui, à l'instant $t_0$, se trouve dans l'état $S(t_0)$. Pour un système classique constitué par exemple de $N$ particules, $S(t_0)$ désignera les $2N$ valeurs des positions et vitesses des particules à l'instant $t_0$. Après évolution, le système se trouve à l'instant $t$ dans l'état $S(t)$.

Introduisons maintenant une transformation $\mathcal{T}$ qui, au système dans un état $S$ quelconque, fasse correspondre un autre système dans un état $S'$ (figure 1). Les types de transformations $\mathcal{T}$ que l'on peut imaginer sont évidemment multiples : dilatation dans un facteur 2 des distances entre particules, rotation des positions et des vitesses d'un angle donné (fixe ou dépendant du temps), changement de signe des charges électriques, etc.

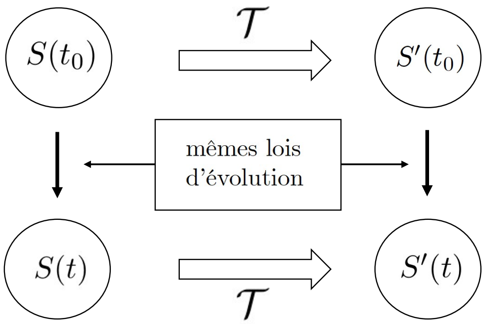


FIGURE *1 – On considère une transformation $\mathcal{T}$ qui, à tout état $S(t)$ d'un système physique, fait correspondre un autre état $S'(t)$. Si les mêmes lois d'évolution permettent de calculer la séquence des états $S(t)$ et celle des états $S'(t)$, on dit que $\mathcal{T}$ est une transformation de symétrie.*

L'application de la transformation à une suite quelconque d'états $S(t)$, décrivant un mouvement possible du système, donne une autre suite d'états $S'(t)$. Par définition, nous dirons que $\mathcal{T}$ est une transformation de symétrie si la suite des états $S'(t)$ décrit aussi un mouvement possible du système, c'est-à-dire un système régi par les mêmes lois d'évolution que le système initial ; cette condition doit être satisfaite quel que soit l'état initial $S(t_0)$ choisi.

*Une transformation $\mathcal{T}$ est dite de symétrie si les transformés par $\mathcal{T}$ de tous les mouvements possibles sont également des mouvements possibles.* Une autre façon de présenter les choses est de dire que, sur la figure 1, on peut à tout instant $t$ "refermer le carré" par une transformation $\mathcal{T}$, et ceci quel que soit le mouvement considéré.

La définition d'une transformation de symétrie $\mathcal{T}$ ne concerne donc pas seulement un état instantané $S(t)$ du système à un instant donné (par exemple lorsque l'on dit que telle figure géométrique est symétrique ou pas) mais l'ensemble des états par lesquels le système passe successivement lorsque le temps s'écoule. On peut d'ailleurs considérer des transformations $\mathcal{T}$ qui ne soient pas elles-mêmes instantanées (translations ou dilatations de l'échelle des temps, etc.)

### A-2. Exemples

Reprenons les quelques exemples de transformations cités plus haut. L'opération de dilatation d'espace dans un facteur 2 n'est pas en général une transformation de symétrie de la mécanique classique, pas plus que celle associée à une rotation du système d'un angle proportionnel au temps (passage dans un référentiel non galiléen, où les effets d'inertie se manifestent différemment). Par contre, et nous y reviendrons en détail, l'opération de translation ou de rotation d'une quantité fixe d'un système physique *isolé* est une opération de symétrie (homogénéité et isotropie de l'espace).

Citons un certain nombre de symétries, dites fondamentales :

- les translations dans l'espace ;
- les rotations dans l'espace ;
- les translations dans le temps ;
- les transformations "relativistes" de Lorentz (ou de Galilée) ;
- $P$ (parité, c'est-à-dire symétrie d'espace par rapport à l'origine), $C$ (conjugaison de charge) et $T$ (renversement du temps) ;
- l'échange entre particules identiques.

Parmi ces transformations, toutes sont actuellement considérées comme transformations de symétrie pour l'ensemble des lois physiques régissant les systèmes isolés [1], sauf $P$, $C$ et $T$. Ces dernières ne sont transformations de symétrie que si les interactions considérées dans le système sont d'origine électromagnétique (ou forte), mais pas si les interactions faibles jouent un rôle.

On peut remarquer que l'invariance par translation de l'évolution d'un système isolé serait une notion difficile à abandonner complètement ; elle constitue presque la définition de ce que l'on entend par "système physique isolé". Pour les translations dans le temps, si elles n'étaient pas, au moins de façon approchée [2], transformations de symétrie par les systèmes isolés, les fondements de la physique ou même de la méthode scientifique elle-même seraient bouleversés : la même expérience faite aujourd'hui ou demain donnerait des résultats différents.

Dans la mesure où, à l'heure actuelle, ces symétries sont considérées comme devant être satisfaites par toutes les lois physiques quelles qu'elles soient, connues ou à découvrir, on peut dire qu'elles fournissent des "*superlois*" (Wigner) de caractère particulièrement fondamental. On comprend donc l'importance qui s'attache à leur étude.

1. Bien sûr, il faut aussi exclure les transformations de Galilée, puisqu'elles ne sont transformations de symétrie que dans la mesure où elles constituent des approximations des transformations de Lorentz, c'est-à-dire à la limite dite "non relativiste" (toutes les vitesses considérées $\ll$ vitesse de la lumière $c$, toutes les distances considérées $\Delta x \ll c \times \Delta t$).

2. Il existe certaines théories cosmologiques où des constantes physiques "fondamentales" changent (Dirac) au fur et à mesure de la dilatation de l'Univers, ce qui change le groupe de transformations laissant invariantes les lois physiques.

***Remarques :***

(i) Si deux transformations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont de symétrie, leur produit $\mathcal{T}'\mathcal{T}$ a la même propriété : on s'attend à voir apparaître la structure de groupe pour les ensembles de transformations de symétrie.

(ii) Dans le cas de la symétrie de renversement du temps, il faut en réalité changer sur la figure 1 $S'(t)$ en $S'(-t)$ et renverser le sens de la flèche verticale de droite qui symbolise l'évolution du système (*cf.* appendice I et sa figure 2).

(iii) Nous avons dit que l'ensemble des translations et rotations était constitué de transformations de symétrie pour un système physique isolé. Pour un système physique soumis à l'action d'un potentiel extérieur (donc non isolé), certaines de ces transformations peuvent éventuellement garder leur propriété de symétrie. C'est par exemple le cas des rotations autour de l'origine O pour un système soumis à l'action d'un potentiel central autour de O.

### A-3. Points de vue actif et passif

Pour définir une transformation $\mathcal{T}$, deux points de vue sont possibles. Le premier est le point de vue d'un seul observateur, lié à un référentiel donné. A tout mouvement du système physique $S$, il fait correspondre par $\mathcal{T}$ un autre mouvement, obtenu à partir du premier par une transformation qui peut être une translation, une rotation, un décalage dans le temps, etc. Comme nous l'avons vu, la transformation est dite de symétrie si les deux mouvements peuvent être décrits par l'observateur par les mêmes équations dynamiques ; les deux mouvements ne diffèrent alors que par des conditions initiales différentes. Ce point de vue est dit "actif", puisqu'il attribue à l'observateur le rôle d'appliquer la transformation.

Mais on peut aussi se placer d'un second point de vue, dit passif, où un seul mouvement du système est décrit par deux observateurs, chacun utilisant son référentiel propre. De ce fait, les deux observateurs attribuent au système physique par exemple une position, ou une orientation, ou une vitesse, etc. qui n'est pas la même, de sorte qu'ils le décrivent mathématiquement de façon différente. La transformation est alors dite de symétrie si ces descriptions dans deux référentiels différents sont solutions des mêmes équations dynamiques.

De façon concise, dans le point de vue actif, c'est le système qui change, alors que dans le point de vue passif c'est le référentiel (les axes). Selon les cas, l'un ou l'autre de ces points de vue est le plus naturel : pour une translation dans le temps par exemple, on visualise facilement deux mouvements différents décalés dans le temps, ce qui privilégie le point de vue actif ; mais, dans le cadre de la relativité où les observateurs attachés à divers référentiels galiléens jouent un grand rôle, le point de vue passif est souvent commode.

***Remarques :***

(i) Dans la mesure où la définition même d'une translation, rotation, etc. est basée sur un changement des coordonnées d'espace (ou de temps) du système physique, et où ces coordonnées définissent les positions relatives de $S$ et du système de référence, il est clair que points de vue actif et passif sont en fait équivalents. Mathématiquement, les opérations à effectuer sur les équations pour traduire l'effet de la transformation $\mathcal{T}$ sont exactement les mêmes dans les deux cas. Physiquement, on peut partir d'une transformation dans le point de vue passif où le mouvement de $S$ est unique, mais vu dans deux référentiels différents ; rien n'empêche cependant de passer au point de vue actif en introduisant un nouveau mouvement qui, dans le premier référentiel, est vu comme le mouvement initial dans le second.

(ii) En fait, la distinction physique entre ces deux points de vue ne prend vraiment son sens que si l'un des référentiels est privilégié par rapport à l'autre. C'est par exemple le cas si l'on a supposé (comme on le fait souvent implicitement) l'existence d'un troisième référentiel, indépendant à la fois de $Oxyz$ et du système étudié, par exemple le référentiel du laboratoire ($Oxyz$ peut alors être un référentiel lié à des instruments de mesure qui, comme le système étudié, sont mobiles par rapport au laboratoire). La différence entre les deux points de vue est alors claire : on "fait bouger", soit le système, soit les appareils de mesure.

Un autre cas où points de vue actif et passif diffèrent est celui où $Oxyz$ est un référentiel d'inertie mais où la transformation $\mathcal{T}$ considérée dépend du temps de telle sorte que ce ne soit plus le cas de $O'x'y'z'$ (par exemple $\mathcal{T}$ est une rotation de vitesse angulaire constante). Dans un cas de cette sorte, le point de vue passif est mieux adapté en mécanique quantique[3]. C'est en fait celui que nous prendrons souvent.

3. Un exemple simple permet de comprendre les difficultés du point de vue actif dans ce cas. On sait que la circulation de la "vitesse" (courant de probabilité) d'un électron dans un potentiel central est quantifiée. Une augmentation de sa vitesse angulaire d'une quantité quelconque n'est donc pas possible en mécanique quantique.

## B. Symétries en mécanique classique

En mécanique classique, nous allons voir que les symétries imposent certaines formes aux lois physiques et, de plus, donnent des constantes du mouvement. Commençons par un exemple particulièrement simple, traité dans le cadre des équations de Newton ($\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{\gamma}$).

### B-1. Equations de Newton

Considérons deux particules de masses $m_1$ et $m_2$, de positions $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$, interagissant par un potentiel $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\,; t)$. Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1\, \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{f}_1\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\,; t\right) = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}_1}\, U\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\,; t\right) \\ m_2\, \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{f}_2\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\,; t\right) = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}_2}\, U\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\,; t\right) \end{cases} \tag{I-1}$$

où $\ddot{\boldsymbol{r}}_1$ désigne la dérivée seconde de $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}_1}$ le gradient par rapport aux coordonnées $\boldsymbol{r}_1$.

• **Invariance par translation**

Soit $\boldsymbol{a}$ un vecteur constant quelconque. Supposons que, dans toute transformation :

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_1 \stackrel{\mathcal{T}}{\Longrightarrow} \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{r}_2 \stackrel{\mathcal{T}}{\Longrightarrow} \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a} \end{cases} \tag{I-2}$$

on obtienne à partir d'un mouvement possible un autre mouvement possible (avec le même potentiel $U$). Comme la transformation ne change pas les accélérations c'est que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1\left(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}\,; t\right) = \boldsymbol{f}_1\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\,; t\right) \\ \boldsymbol{f}_2\left(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}\,; t\right) = \boldsymbol{f}_2\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\,; t\right) \end{cases} \tag{I-3}$$

Ainsi les gradients de la fonction potentiel $U$ par rapport aux deux variables sont invariants lorsque les deux variables vectorielles subissent un accroissement de $\boldsymbol{a}$. Il s'ensuit que, dans cette transformation des variables, $U$ n'est changé que d'une constante. Cette constante peut dépendre du temps, mais reste sans conséquence sur le mouvement des particules puisqu'elle est indépendante des positions. Si de plus l'on impose à $U$ de s'annuler à l'infini, cette constante est nécessairement nulle, ce qui implique que le potentiel reste invariant dans la transformation des variables. Il s'ensuit que $U$ est alors une fonction de $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ seulement :

$$U\left(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}\,; t\right) \equiv U\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\,; t\right) \tag{I-4}$$