

Dans la même série

GROSBRAS J. M., *Méthodes statistiques des sondages.*

GUILLOCHON B., *La France contemporaine : une approche d'économie descriptive.*

LECOUTRE J. P. et TASSI Ph., *Statistique non paramétrique et robustesse.*

TASSI Ph., *Méthodes statistiques, 2<sup>e</sup> édition.*

fi  
COLLECTION « ÉCONOMIE ET STATISTIQUES AVANCÉES »

Série : Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique  
Division des Cadres de Gestion Statistique et des Attachés

Julien AMEGANDJIN

31

# DEMOGRAPHIE MATHÉMATIQUE

732736



ECONOMICA

49, rue Héricart, 75015 Paris

8° R

97668

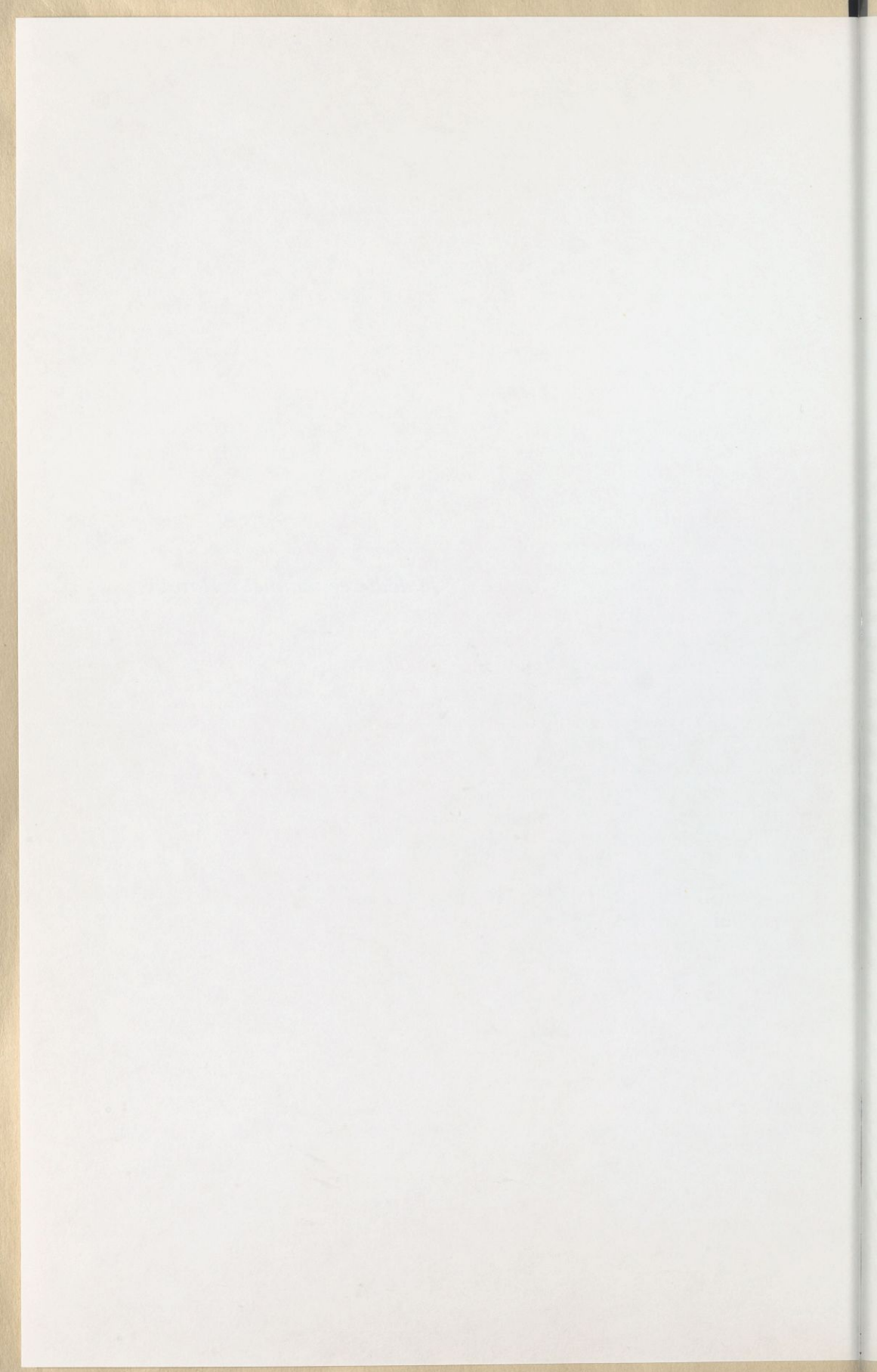
DL-08 091989-21217



© Ed. ÉCONOMICA, 1989

Tous droits de reproduction, de traduction, d'adaptation et d'exécution  
réservés pour tous les pays.

*Je dédie ce manuel à Harold*



## Avant-propos

Le manuel « Démographie Mathématique » est le fruit de l'expérience d'un cours organisé pendant une douzaine d'années à l'Institut de Formation et de Recherche Démographiques (IFORD) de Yaoundé. Il est également le résultat d'une autre conception de l'enseignement de la démographie, qui considère que la présentation des phénomènes en continu, la justification des principaux résultats couramment utilisés et la connaissance de certaines techniques d'analyse, s'imposent pour une extension nécessaire du champ de l'analyse démographique classique.

Le manuel « Démographie Mathématique » s'adresse à des étudiants en démographie du niveau de la maîtrise. Son objet est de permettre à l'étudiant non mathématicien d'origine, de se familiariser avec les outils du continu en analyse démographique, et partant, de lui permettre d'avoir accès à des résultats fondamentaux de cette discipline, auxquels le mode de description en discret ne conduit pas toujours aisément.

En d'autres termes, le but qui est visé par ce manuel, c'est un approfondissement de l'analyse démographique telle qu'elle est enseignée dans les programmes classiques de maîtrise des centres de formation ou universités francophones ou anglophones.

L'ouvrage n'aborde pas l'étude des phénomènes démographiques pris individuellement, mais utilise essentiellement l'étude du phénomène de la mortalité pour mettre en évidence les concepts et les méthodes de l'analyse en continu.

Les principaux éléments du manuel sont constitués par des concepts nouveaux comme celui de la fonction de densité d'un phénomène, des outils d'analyse reposant essentiellement sur le Calcul différentiel et intégral et les Probabilités, des justifications de nombreux résultats, justifications auxquelles l'étudiant de maîtrise a rarement accès, et des développements nouveaux par rapport aux programmes classiques de maîtrise de démographie.

Compte tenu du but poursuivi, le manuel « Démographie Mathématique » réserve une place de choix aux concepts et aux méthodes.

Le chapitre 1 traite des modes de description des phénomènes en discret et en continu et introduit le concept de fonction de densité des phénomènes.

Le chapitre 2 présente la description de la mortalité en temps continu. Ce sont ce chapitre 2 et les chapitres 1 et 6 qui contiennent l'essentiel des outils de l'analyse en continu.

Le chapitre 3 traite des fondements de l'une des hypothèses les plus couramment utilisées en analyse démographique, à savoir l'uniforme répartition des événements dans un intervalle d'âge ou dans un intervalle de temps donné.

Le chapitre 4 tente d'approfondir le concept de l'espérance de vie, un concept souvent mal assimilé par les étudiants de maîtrise.

Les chapitres 5, 7, 8 et 9 sont consacrés à l'étude des modèles de population stationnaire, de population malthusienne et de population stable. L'étude du phénomène de la fécondité est largement abordée dans les chapitres 8 et 9, ce qui compense quelque peu l'importance donnée à l'étude de la mortalité au chapitre 2.

Enfin, le chapitre 10 traite des modèles stochastiques simples de croissance des populations humaines.

Comment le présent manuel se situe-t-il par rapport aux publications existantes ? Le manuel « Démographie Mathématique » constitue une introduction utile pour l'étude des manuels de démographie mathématique que sont les ouvrages de Nathan Keyfitz,

- Introduction to the Mathematics of Population,
- Applied Mathematical Demography

et celui de J. H. Pollard,

- Mathematical models for the growth of human populations.

A ce titre, il est davantage orienté vers une initiation aux outils de la démographie mathématique et utilise une démarche adaptée pour des étudiants.

A l'opposé, les manuels de Keyfitz et de Pollard s'attachent davantage à la présentation des résultats. Ils supposent en outre de solides connaissances en Mathématiques et en Probabilités que possèdent peu d'étudiants de maîtrise de démographie.

Enfin, le manuel « Démographie Mathématique » est destiné à combler un vide dans les publications de langue française.

Il est heureux de noter aujourd'hui que le cours de démographie mathématique, dans l'esprit du manuel « Démographie Mathématique », est désormais un enseignement obligatoire à l'Institut de Démographie de Paris, après avoir été pendant longtemps, un enseignement facultatif réservé à un petit groupe d'étudiants. L'Institut de Formation et Recherche Démographiques (IFORD) de Yaoundé avait fait de cet enseignement, un enseignement obligatoire depuis plusieurs années, et introduisit ainsi une innovation qui fut décriée par beaucoup.

Aujourd'hui, le mouvement semble irréversible et des éléments de démographie mathématique devront nécessairement trouver leur place désormais dans les programmes de formation démographique, sinon peu de démographes seront capables de comprendre les fondements théoriques de nombreux articles comme celui de Nicolas Brouard publié dans la revue *Population* n° 6 de novembre-décembre 1987 (Sida : durée d'incubation, taux de croissance, taux de reproduction nette).

Le manuel « Démographie Mathématique » est un ouvrage d'introduction idéal pour les étudiants des écoles de Statistique qui abordent l'étude de la démographie pour la première fois. Il leur permet une initiation à la démographie sous un tout autre angle. S'il est certain que ce sont les étudiants des écoles de Statistique ou des statisticiens inscrits dans un programme de maîtrise de démographie qui tireront le plus de profit de ce manuel, ce dernier de par son objet et sa conception, s'adresse cependant à des étudiants qui ont bien moins que le bagage mathématique d'un statisticien, Cadre de Gestion Statistique de l'ENSAE ou Ingénieur des Travaux Statistiques du CESD.

Le manuel « Démographie Mathématique » possède une petite histoire. Ce manuel n'aurait pas vu le jour si je n'avais pas été contraint durant presque toute l'année 1986, à un chômage forcé ou ce qu'un ami a appelé un congé sabbatique sans solde. C'est parce que j'ai disposé de beaucoup de temps au cours de cette période d'inactivité professionnelle que j'ai pu réaliser ce manuel, en donnant ainsi vie à un projet vieux de plusieurs années.

Et finalement, ce qui peut être considéré comme une situation difficile m'a permis de réaliser quelque chose dont je tire aujourd'hui beaucoup de satisfaction, un sentiment de satisfaction au moins aussi fort que le sentiment de difficulté que j'ai connu au cours de l'année 1986. C'est ici que la déclaration de Paul Twitchell, un des plus grands penseurs de notre temps, prend tout son relief. « Toutes les actions et réactions sont égales, mais de nature opposée. C'est le pouvoir gouvernant le royaume de l'esprit et de la matière »<sup>1</sup>.

1. L'Étranger au Bord de la Rivière.

De l'histoire qui est attachée à ce manuel, il ressort que toute situation difficile ou épreuve a toujours une contre partie heureuse vécue, soit avant, soit après. Le prix à payer pour ma satisfaction d'aujourd'hui n'est-elle pas l'expérience pénible du chômage forcé qui fut la mienne en 1986 ?

La deuxième leçon à tirer de cette histoire est que je n'aurais jamais pu trouver le temps pour mettre à exécution mon projet de manuel si je n'avais pas été contraint à l'inactivité professionnelle. Beaucoup de personnes se trouvent dans le même cas, tant les charges professionnelles administratives sont contraignantes aujourd'hui pour de nombreux enseignants ou chercheurs. Et il faut une bonne dose d'effort, de travail et de privation pour mener de front avec succès, des tâches professionnelles administratives et des activités de publication.

C'est pourquoi pour le monde francophone des enseignants et des chercheurs, je plaide pour des congés sabbatiques, à l'image de ce qui se fait chez les anglo-saxons, pour donner un peu plus d'essor aux publications scientifiques.

Mes remerciements vont en premier lieu à mon ancien professeur de Statistique, M. Gérard Calot. Ils vont ensuite à M. Antoine Houehougbé pour les nombreux encouragements et conseils qu'il m'a prodigués tout au long de mon entreprise. Ils vont également à MM. Nicolas Brouard, Francis Gendreau, Justin Paraïso et Dominique Waltisperger qui m'ont largement fait bénéficier de leurs observations et suggestions.

Enfin, mes remerciements vont aux étudiants des promotions de 1975 à 1986 de l'Institut de Formation et de Recherche Démographiques (IFORD) de Yaoundé, avec lesquels le contenu de ce manuel a été expérimenté, ainsi qu'aux membres de l'équipe de l'Unité de Recherche Démographique de l'Université Nationale du Togo, auprès desquels j'ai trouvé accueil et soutien tout au long de l'année 1986 au moment où le manuscrit de cet ouvrage a été rédigé.

Enfin, ce manuel est mon humble tribut à la démographie à laquelle je suis venu par hasard et qui m'a fait vivre pendant un peu plus d'une douzaine d'années.

## CHAPITRE 1

# Méthodes de description des phénomènes en temps continu

L'objet de ce chapitre introductif est de présenter quelques méthodes courantes utilisées dans la description des phénomènes en temps continu. L'utilité de ce chapitre s'explique par la place de choix accordée dans la plus grande partie de l'ouvrage au mode de description des phénomènes en temps continu.

Les outils d'analyse qui sont exposés ici portent sur les modes de description des phénomènes en temps discret et en temps continu ainsi que sur les fonctions de densité.

### **1. LES MODES DE DESCRIPTION DES PHÉNOMÈNES EN TEMPS DISCRET ET EN TEMPS CONTINU**

La variable temps étant l'une des principales variables servant de support à l'observation et à l'analyse des phénomènes, il est utile d'en préciser ici les deux modes de représentation discret et continu.

Dans le cas particulier des phénomènes démographiques étudiés dans cet ouvrage, l'âge constitue une deuxième variable fondamentale d'analyse. Et du fait qu'elle est de la même nature que la variable temps, la variable âge possède les deux mêmes modes de représentation discret et continu.

En conséquence, la description des phénomènes démographiques en temps discret et en temps continu est entièrement déterminée par les modes de représentation discret et continu de la variable temps et de la variable âge.

#### **1.1. Représentation discrète du temps et de l'âge**

En représentation discrète, la variable temps prend seulement des valeurs entières quelle que soit l'unité de mesure choisie. Chaque valeur possible de la variable temps est donc un entier de fois l'unité de mesure. Il s'ensuit qu'aucune valeur possible du temps ne peut être égale à une fraction de l'unité. Plus généralement, la variable temps ne peut prendre une valeur de l'ensemble

$Q$  des rationnels qui ne soit pas une valeur entière. Les valeurs possibles de la variable temps en représentation discrète appartiennent donc à l'ensemble discret  $N = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$  quelle que soit l'unité de mesure retenue.

Lorsque l'on utilise la représentation discrète pour la variable temps, l'observation d'un phénomène se fait uniquement à des dates définies par des éléments de l'ensemble  $N$ . Entre deux dates consécutives définies par deux éléments consécutifs de l'ensemble  $N$ , l'observation du phénomène étudié n'est guère possible. L'observation d'un phénomène correspond ainsi à une succession d'images obtenues à des dates définies par des éléments de  $N$ .

Ce qui vient d'être dit de la variable temps s'applique également à la variable âge. En représentation discrète, la variable âge ne peut prendre que des valeurs entières quelle que soit l'unité de mesure retenue. Si l'unité de mesure est l'année, l'âge d'un individu est le nombre d'années révolues vécues par l'individu. Dans ce cas, l'âge d'un individu peut prendre les seules valeurs de l'ensemble discret  $D = \{0, 1, 2, \dots, w - 1\}$ , où  $w$  représente l'âge limite de la vie.

Ainsi, si un individu décède peu de temps avant le  $k^e$  anniversaire, il aura vécu  $k - 1$  années révolues. Il ne sera pas tenu compte du temps qu'il aura vécu entre les anniversaires des rangs  $k - 1$  et  $k$ , car ce qui se produit entre les deux anniversaires ne peut être observé mais seulement ce qui se produit aux dates constituées par les deux anniversaires.

En représentation discrète de la variable âge, l'observation des phénomènes est une succession d'images ponctuelles obtenues à des âges précis.

## 1.2. Représentation continue du temps et de l'âge

Contrairement à ce qui a lieu en représentation discrète, en représentation continue, la variable temps peut prendre toute valeur égale à une fraction de l'unité. Plus généralement, tout nombre réel positif, qu'il soit rationnel ou non, est une valeur possible du temps en représentation continue. L'ensemble de définition de la variable temps en représentation continue est donc la demi-droite positive  $[0, + \infty[$ .

En temps continu, un phénomène peut donc être observé à toute date  $t$  élément de l'ensemble  $[0, + \infty[$ . Dans ce cas, la succession d'images obtenues aux dates  $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$  en représentation discrète, fait place à une succession ininterrompue d'images.

L'observation d'un phénomène en temps continu est donc par rapport à l'observation en temps discret, ce que représente le cinéma par rapport à la photographie.

Ce qui vient d'être dit de la variable temps est également valable pour la variable âge. En représentation continue, l'âge d'un individu est un nombre réel quelconque positif, c'est-à-dire un élément de la demi-droite  $[0, +\infty[$ . Si  $X$  désigne l'âge d'un individu, l'ensemble  $D_X$  des valeurs possibles de  $X$  est donc défini par  $D_X = [0, +\infty[$ .

Toutefois, lorsque l'on prend en compte l'âge limite  $w$  de la vie, l'ensemble  $D_X$  des valeurs possibles de  $X$  est défini par  $D_X = [0, w[$ .

Si un individu décède peu de temps avant son  $k^e$  anniversaire, son âge au décès inclura tout le temps qu'il aura vécu entre les anniversaires des rangs  $k - 1$  et  $k$ . Aussi aucune perte d'information n'est-elle possible en représentation continue dans l'évaluation de l'âge d'un individu.

Si  $X_1$  désigne l'âge d'un individu en représentation discrète et  $X_2$  l'âge du même individu en représentation continue, les deux grandeurs sont liées par la relation  $X_1 = [X_2]$  où  $[X_2]$  désigne la partie entière de  $X_2$ .

### **1.3. Présentation des phénomènes en temps continu**

La description d'un phénomène se fait au moyen de grandeurs mesurables dont le but est de rendre compte du phénomène étudié dans ses aspects observables les plus importants. Ces grandeurs qui servent à caractériser les phénomènes se présentent souvent comme des fonctions de la variable temps ainsi que d'autres variables.

Dans le cas des phénomènes démographiques, ces grandeurs sont des fonctions, soit du temps, soit de l'âge, soit des deux variables âge et temps simultanément. Ces phénomènes seront dits décrits en temps continu ou simplement en continu si le temps et l'âge reçoivent une représentation continue et si les grandeurs caractérisant les phénomènes sont des fonctions remplissant certaines conditions.

La principale condition imposée à ces grandeurs est qu'elles doivent être des fonctions continûment dérivables dans l'ensemble de définition, c'est-à-dire des fonctions possédant leurs dérivées de tous les ordres dans l'ensemble de définition. Bien souvent, il pourra suffire que ces grandeurs soient des fonctions continûment dérivables par intervalles.

La dernière condition s'avère indispensable du fait que la description des phénomènes en continu fait un usage abondant de techniques du Calcul Différentiel et Intégral qui reposent sur cette condition.

D'autres conditions peuvent être imposées selon les besoins aux grandeurs retenues pour caractériser les phénomènes démographiques étudiés.

La fonction de survie  $l$  qui décrit le nombre de survivants d'une cohorte de  $l(0)$  individus nés tous à une même date est un exemple de ces grandeurs caractéristiques des phénomènes démographiques. Elle rend compte du phénomène de la mortalité au sein de la cohorte étudiée. La fonction de survie apparaît comme une application définie sur l'ensemble  $D = [0, w[$  et à valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{R}^+$ ; d'où

$$l: [0, w[ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$l(x)$  désigne l'effectif des survivants de la cohorte à l'âge  $x$ .

Nous verrons plus loin que pour avoir un modèle complet de description du phénomène de la mortalité dans la cohorte, nous devons supposer la fonction de survie  $l$  continûment dérivable ou tout au moins continûment dérivable par intervalles.

Considérons maintenant un autre exemple de grandeur caractéristique des phénomènes démographiques. Il s'agit de la répartition par âge d'une population. Elle sera vue comme une fonction à la fois de l'âge et du temps. Exprimée sous la forme d'une proportion, elle apparaît comme une fonction  $c$  de deux variables, définie sur l'ensemble  $[0, w[ \times [0, +\infty[$  et à valeurs dans l'ensemble  $[0, 1]$ . D'où

$$c: [0, w[ \times [0, +\infty[ \rightarrow [0, 1]$$

$c(x, t)$  désigne la valeur prise par la fonction  $c$  en tout point  $(x, t)$  correspondant à l'âge  $x$  et à la date d'observation  $t$ . La fonction de répartition par âge  $c$  devrait être prise pour une fonction de deux variables continûment dérivable pour pouvoir constituer un outil d'un usage plus facile.

#### 1.4. Le passage du discret au continu

L'observation des faits en continu étant pratiquement irréalisable, pour définir les grandeurs caractéristiques d'un phénomène en continu, l'on est bien souvent obligé de les construire à partir des données d'observation discrètes obtenues et de quelques hypothèses.

Examinons un exemple de telles constructions. Le tableau ci-après fournit la variation de la fonction de survie  $l$  pour une cohorte donnée, de l'âge de 50 ans à l'âge de 54 ans.

TABLEAU  
Variation de la fonction de survie  $l$  de 50 ans à 54 ans

| Age $x$ | $l(x)$ |
|---------|--------|
| 50      | 3 240  |
| 51      | 3 178  |
| 52      | 3 110  |
| 53      | 3 040  |
| 54      | 2 957  |

L'observation de l'effectif des survivants a été faite aux âges exacts de 50 ans à 54 ans. La fonction de survie  $l$  est donc une fonction discrète définie sur le domaine  $D = \{50, 51, 52, 53, 54\}$ .

Pour construire une fonction de survie  $l^*$  qui rende compte des observations du tableau ci-dessus et qui soit continue dans l'intervalle  $(50, 54)$ , nous allons définir  $l^*$  de telle sorte qu'elle remplisse les conditions suivantes :

- $l^*$  s'identifie à  $l$  sur l'ensemble discret  $D = \{50, 51, 52, 53, 54\}$  ;
- $l^*$  est une fonction affine dans tout intervalle défini par 2 points consécutifs de l'ensemble  $D$ .

Ainsi la fonction  $l^*$  dans l'intervalle  $(52, 53)$  par exemple se définit comme suit :

$$l^*(52) = l(52) = 3\ 110 \tag{1.1}$$

$$l^*(53) = l(53) = 3\ 040 \tag{1.2}$$

En outre, nous avons

$$l^*(x) = ax + b, x \in (52, 53) \tag{1.3}$$

La relation (1.3) exprime que  $l^*$  est affine dans l'intervalle  $(52, 53)$ . Il vient alors

$$l^*(52) = 52 a + b = 3\ 110 \tag{1.4}$$

$$l^*(53) = 53 a + b = 3\ 040 \tag{1.5}$$

Des relations (1.4) et (1.5), nous déduisons

$$a = - 70 \text{ et } b = 6\ 750.$$

$$\text{d'où } l^*(x) = - 70 x + 6\ 750, x \in (52, 53) \tag{1.6}$$

$l^*$  est une fonction continue dans l'intervalle  $(52, 53)$  y compris aux points 52 et 53.

Ainsi à la fonction  $l$  définie seulement aux extrémités de l'intervalle  $(52, 53)$ , on a substitué une fonction  $l^*$  continue dans l'intervalle fermé  $[52, 53]$ . En outre, la fonction  $l^*$  de par sa nature est continûment dérivable dans l'intervalle  $] 52, 53 [$  puisque  $\forall c \in ] 52, 53 [ , l'(x) = - 70$  et  $l^{(n)}(x) = 0$  pour  $n \geq 2$ .

La fonction  $l^*$  n'est dérivable en aucun des points 52 et 53. Il s'agit de 2 points anguleux du graphe de  $l^*$ , c'est-à-dire des points où les dérivées à gauche et à droite sont distinctes.

Cette méthode qui permet de construire des fonctions continues caractéristiques des phénomènes étudiés à partir de données d'observation, est l'un des outils d'analyse les plus couramment utilisés dans la description des phénomènes en continu. Elle est connue sous le nom de méthode d'interpolation linéaire.

## 2. LE CONCEPT DE FONCTION DE DENSITÉ

La description des phénomènes démographiques fait un grand usage de ce que nous appellerons des fonctions de densité et dont le but est de rendre compte de la répartition dans le temps ou selon l'âge des événements d'un phénomène. Le rôle des fonctions de densité est capital particulièrement dans la description des phénomènes en continu.

Nous parlerons de densité moyenne associée à un domaine d'observation et de densité ponctuelle ou instantanée associée à un point d'observation.

Avant d'examiner ces deux types de fonction de densité, définissons d'abord les notions de valeur moyenne et de valeur instantanée ou ponctuelle.

### 2.1. Valeur moyenne et valeur instantanée

Nous allons introduire les notions de valeur moyenne et de valeur instantanée à l'aide d'un exemple emprunté à la Mécanique et qui historiquement situe bien le concept de valeur instantanée. Cet exemple concerne la vitesse moyenne et la vitesse instantanée d'un mobile.

Considérons un point mobile de trajectoire rectiligne pour simplifier les choses. Désignons par  $X(t)$  la position du mobile à l'instant  $t$ , c'est-à-dire la distance séparant le point mobile à l'instant  $t$ , d'une position initiale donnée considérée comme origine de l'axe des abscisses sur la trajectoire du point.

La distance parcourue par le point mobile dans l'intervalle de temps  $(t, t + \Delta t)$  est égale à l'accroissement  $X(t + \Delta t) - X(t)$  de  $X(t)$  dans l'intervalle.

La grandeur  $V_m(t, \Delta t)$  définie par la relation

$$V_m(t, \Delta t) = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} \quad (1.7)$$

désigne la distance moyenne parcourue par unité de temps dans l'intervalle  $(t, t + \Delta t)$ . Cette grandeur est appelée vitesse moyenne du mobile dans l'intervalle  $(t, t + \Delta t)$ . Intéressons-nous au comportement asymptotique de  $V_m(t, \Delta t)$  quand  $\Delta t$ , la longueur de l'intervalle de temps  $(t, t + \Delta t)$ , tend vers 0.

La valeur limite si elle existe, de  $V_m(t, \Delta t)$  quand  $\Delta t$  tend vers 0, est une caractéristique de l'instant  $t$  appelée vitesse du point mobile à l'instant  $t$  ou vitesse instantanée<sup>1</sup> du point mobile en  $t$ .

Désignons par  $V(t)$  la vitesse instantanée du mobile en  $t$ . Il vient donc

$$V(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_m(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} \quad (1.8)$$

De la dernière relation de définition (1.8) on déduit

$$V(t) = \frac{dX(t)}{dt} = X'(t) \quad (1.9)$$

Ce qui distingue fondamentalement la vitesse moyenne  $V_m(t, \Delta t)$  de  $V(t)$ , la vitesse à l'instant  $t$ , est que  $V_m(t, \Delta t)$  est une fonction d'intervalle tandis que  $V(t)$  est une fonction ponctuelle. Pour cette raison, la vitesse instantanée en  $t$  peut être encore appelée vitesse ponctuelle en  $t$ .

Voyons maintenant comment s'interprète la vitesse instantanée en  $t$ . De la relation de définition (1.8), il vient d'après une propriété des limites

$$X(t + \Delta t) - X(t) = V(t) \Delta t + 0(\Delta t) \quad (1.10)$$

où  $0(\Delta t)$  est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à  $\Delta t$  et par conséquent une quantité qui tend vers 0 avec  $\Delta t$ .

La relation (1.10) exprime que les grandeurs  $X(t + \Delta t) - X(t)$  et  $V(t) \Delta t$  sont des infiniment petits équivalents, c'est-à-dire des grandeurs très voisines.

La grandeur  $V(t) \Delta t$  désigne la distance qu'aurait parcourue le mobile dans l'intervalle de temps  $(t, t + \Delta t)$  s'il avait conservé dans cet intervalle, la vitesse  $V(t)$  atteinte à l'instant  $t$ ;  $V(t) \Delta t$  fournit une mesure approchée de la distance parcourue  $X(t + \Delta t) - X(t)$ .

En raison de la relation (1.9),  $V(t) \Delta t$  est en fait la différentielle de  $X(t)$  tandis que la grandeur  $X(t + \Delta t) - X(t)$  mesure l'accroissement de  $X(t)$  dans l'intervalle  $(t, t + \Delta t)$ . Un résultat du Calcul

---

1. Vitesse instantanée en  $t$  signifie vitesse de l'instant  $t$ . Le vocable instantané tire donc son origine du concept de vitesse instantanée.

Différentiel énonce que la différentielle<sup>1</sup> et l'accroissement sont deux infiniment petits équivalents, ce qui est exprimé par la relation (1.10).

Nous achevons d'interpréter la vitesse moyenne  $V_m(t, \Delta t)$  et la vitesse ponctuelle  $V(t)$  en observant que d'après les relations (1.7) et (1.10)

$$V_m(t, \Delta t) \Delta t = V(t) \Delta t + 0(\Delta t) \quad (1.11)$$

où  $0(\Delta t)$  est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à  $\Delta t$ .

Les grandeurs  $V_m(t, \Delta t) \Delta t$  et  $V(t) \Delta t$  sont donc des infiniment petits équivalents;  $V_m(t, \Delta t) \Delta t$  désigne la distance parcourue par le mobile dans l'intervalle de temps  $(t, t + \Delta t)$  et  $V(t) \Delta t$  est une mesure approchée de cette distance.

Il résulte de ce qui précède que  $V_m(t, \Delta t)$  et  $V(t)$  sont des grandeurs très voisines puisque  $V_m(t, \Delta t) \Delta t$  et  $V(t) \Delta t$  le sont.

Voilà précisées les notions de valeur moyenne et de valeur instantanée à partir des concepts de vitesse moyenne et de vitesse instantanée. Nous allons les utiliser maintenant pour définir les concepts de densité moyenne et de densité instantanée ou ponctuelle.

## 2.2. La fonction de densité de probabilité

La fonction de densité de probabilité fournit l'un des exemples les plus connus de la notion de fonction de densité. Nous allons la définir en distinguant la densité de probabilité moyenne et la densité de probabilité instantanée ou ponctuelle.

Considérons une variable aléatoire continue  $X$  dont l'ensemble de définition, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs possibles, est noté  $D_X$ . La loi de probabilité de la variable  $X$  exprime les poids relatifs des différents événements  $E_A$  définis par  $E_A = \{X \in A / A \subset D_X\}$ , c'est-à-dire leurs degrés relatifs de probabilité ou de vraisemblance.

La fonction de densité de probabilité constitue l'un des moyens par lesquels s'exprime la loi de probabilité d'une variable aléatoire. Elle rend compte de la manière dont une masse de probabilité unité est répartie sur un ensemble de définition  $D_X$ , c'est-à-dire la manière dont les poids relatifs des différents événements  $E_A$  sont définis.

1. L'existence de la vitesse instantanée  $V(t)$  implique que le chemin parcouru  $X(t)$  est une fonction dérivable. En outre, la différentielle  $dt$  de la variable indépendante  $t$  est égale à son accroissement  $\Delta t$ , ce qui permet d'affirmer que  $X'(t) \Delta t$  est identique à la différentielle  $X'(t) dt$  de  $X(t)$ .

Supposons l'ensemble de définition  $D_x$  de la variable  $X$  confondu avec la droite réelle  $R$ . Désignons par  $\text{Pr} \{x < X < x + \Delta x\}$  la probabilité que la variable  $X$  appartienne à l'intervalle  $(x, x + \Delta x)$ . Pour rendre compte de la densité de masse de probabilité contenue dans l'intervalle  $(x, x + \Delta x)$ , nous rapportons la probabilité  $\text{Pr} \{x < X < x + \Delta x\}$  attachée à l'intervalle  $(x, x + \Delta x)$  à la longueur  $\Delta x$  de cet intervalle. Nous définissons ainsi l'indice  $\text{Pr} \{x < X < x + \Delta x\} / \Delta x$  qui mesure la masse de probabilité moyenne par unité de longueur dans l'intervalle  $(x, x + \Delta x)$ . Cet indice est la densité moyenne de probabilité par unité de longueur dans l'intervalle  $(x, x + \Delta x)$ .

En faisant tendre  $\Delta x$  vers 0, la valeur limite de  $\text{Pr} \{x < X < x + \Delta x\} / \Delta x$  fournit la densité de probabilité ponctuelle ou instantanée au point  $x$ .

Si  $f(x)$  désigne la densité de probabilité ponctuelle de la variable  $X$  au point  $x$ , il vient alors

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Pr} \{x < X < x + \Delta x\}}{\Delta x} \quad (1.12)$$

La fonction  $f$  est appelée fonction de densité de probabilité de la variable  $X$ . Elle fournit pour tout point  $x$  de l'ensemble de définition de la variable, la densité de probabilité ponctuelle ou instantanée  $f(x)$ .

De la relation de définition (1.12) nous déduisons la relation

$$\text{Pr} \{x < X < x + \Delta x\} = f(x) \Delta x + o(\Delta x) \quad (1.13)$$

où  $o(\Delta x)$  est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à  $\Delta x$ ;  $o(\Delta x)$  tend donc vers 0 avec  $\Delta x$ .

La connaissance de la fonction de densité de probabilité  $f$  permet ainsi d'obtenir pour tout intervalle  $(x, x + \Delta x)$  une mesure approchée  $f(x) \Delta x$  de la masse de probabilité qu'il contient.

Ce premier exemple de fonction de densité paraît quelque peu abstrait. La fonction de densité de probabilité n'en a pas moins son utilité dans la description des phénomènes. La répartition des événements d'un phénomène dans un intervalle d'âge donné peut se faire au moyen d'une fonction de densité de probabilité comme nous le verrons dans les trois sous-paragrapes 3.1, 3.2 et 3.3.

### 2.3. La fonction de densité des naissances

Le deuxième exemple de fonction de densité nous est fourni par la fonction de densité des naissances.

Considérons le phénomène de la natalité dans une population donnée et à une époque donnée.

Désignons par  $\mathfrak{N}(t, \Delta t)$  le nombre des naissances qui surviennent dans la population étudiée dans l'intervalle de temps  $(t, t + \Delta t)$ . Nous pouvons rendre compte d'une certaine manière du phénomène de la natalité dans l'intervalle  $(t, t + \Delta t)$  en rapportant le nombre des naissances  $\mathfrak{N}(t, \Delta t)$  à la longueur  $\Delta t$  de l'intervalle. Nous construisons ainsi l'indice  $\mathfrak{N}(t, \Delta t) / \Delta t$  qui mesure le nombre moyen de naissances par unité de temps dans l'intervalle  $(t, t + \Delta t)$ . Cet indice est la densité moyenne des naissances par unité de temps dans l'intervalle  $(t, t + \Delta t)$ . C'est bien une fonction de l'intervalle  $(t, t + \Delta t)$ .

La notion de densité ponctuelle des naissances est obtenue par le passage à la limite de la densité moyenne  $\mathfrak{N}(t, \Delta t) / \Delta t$  quand  $\Delta t$  tend vers 0. Si cette limite existe et si elle est notée  $N(t)$ , il vient

$$N(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{N}(t, \Delta t)}{\Delta t} \quad (1.14)$$

La fonction  $N$  sera appelée fonction de densité instantanée des naissances et  $N(t)$  densité ponctuelle des naissances ou densité instantanée des naissances à la date  $t$ .

De la relation de définition (1.14) on déduit

$$\mathfrak{N}(t, \Delta t) = N(t) \Delta t + o(\Delta t) \quad (1.15)$$

où  $o(\Delta t)$  est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à  $\Delta t$ .

Comme dans l'exemple précédent, la connaissance de la fonction de densité des naissances permet d'obtenir pour tout intervalle  $(t, t + \Delta t)$  une mesure approchée  $N(t) \Delta t$  du nombre des naissances qu'il renferme.

### 3. ÉTUDE DE QUELQUES FONCTIONS DE DENSITÉ PARTICULIÈRES UTILISÉES EN DÉMOGRAPHIE

Nous allons examiner à présent quelques fonctions de densité particulières utilisées dans l'étude des phénomènes démographiques. La première de ces fonctions est la fonction de décès, une des caractéristiques de la table de mortalité. La deuxième fonction est la fonction de fécondité, et la troisième, la densité par âge ou répartition par âge.

#### 3.1. La fonction de décès

Considérons une cohorte d'individus nés tous à la même date et soustraits à la migration. Désignons par  $l$  la fonction de survie

de la table de mortalité associée. La grandeur  $l(x)$  exprime l'effectif des survivants de la cohorte à l'âge  $x$ .

Soit  $d(x, \Delta x)$  le nombre des décès observés au sein de la cohorte dans l'intervalle d'âge  $(x, x + \Delta x)$ . Pour rendre compte de l'importance relative des décès dans cet intervalle, rapportons le nombre des décès  $d(x, \Delta x)$  à la longueur  $\Delta x$  de l'intervalle. L'indice  $d(x, \Delta x) / \Delta x$  ainsi défini exprime la densité moyenne des décès par unité de temps dans l'intervalle d'âge  $(x, x + \Delta x)$ . Cet indice est essentiellement une fonction de l'intervalle  $(x, x + \Delta x)$ .

De cette fonction d'intervalle, on déduit la fonction de densité ponctuelle  $\delta$  associée définie par la relation

$$\delta(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{d(x, \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.15)$$

sous réserve de l'existence de la limite.

Dans la suite, nous supposons l'existence de cette limite pour tout  $x$  positif ou nul, ce qui implique que la fonction  $\delta$  est définie à tout âge  $x$ .

La fonction  $\delta$  est dite aussi fonction de densité instantanée des décès ou simplement fonction de décès ;  $\delta(x)$  désigne la densité ponctuelle des décès à l'âge  $x$  ou encore la densité instantanée des décès à l'âge  $x$ .

La fonction  $\delta$  définit le calendrier des décès de la cohorte, c'est-à-dire la répartition selon l'âge des décès observés dans la cohorte. On l'appelle fonction calendrier des décès.

En exprimant la répartition des décès selon l'âge, la fonction de décès  $\delta$  exprime bien une densité au sens premier du terme, c'est-à-dire le degré de concentration des décès selon l'âge.

De la relation de définition (1.15) on déduit

$$d(x, \Delta x) = \delta(x) \Delta x + o(\Delta x) \quad (1.16)$$

où  $o(\Delta x)$  est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à  $\Delta x$ .

La relation (1.16) exprime que les grandeurs  $d(x, \Delta x)$  et  $\delta(x) \Delta x$  sont deux infiniment petits équivalents, et ainsi  $\delta(x) \Delta x$  représente une valeur approchée du nombre des décès observés dans l'intervalle d'âge  $(x, x + \Delta x)$ .

Supposons la fonction de décès  $\delta$  continue pour tout  $x$  positif ou nul. Elle est alors intégrable sur tout segment  $[a, a + h]$ , ce qui signifie que l'intégrale définie  $\int_a^{a+h} \delta(x) dx$  existe pour tout  $a$  et pour tout  $h$ .

La grandeur  $\int_a^{a+h} \delta(x) dx$  mesure le nombre des décès observés dans l'intervalle d'âge  $(a, a + h)$ , et l'intégrale définie  $\int_0^x \delta(v) dv$ , la somme cumulée des décès de la cohorte à l'âge  $x$ .

La somme cumulée des décès à l'âge limite de la vie étant égale à  $l(0)$ , la racine de la table de mortalité, il vient

$$\int_0^{+\infty} \delta(x) dx = l(0) \quad (1.17)$$

A la fonction de densité des décès  $\delta$ , nous pouvons associer une nouvelle fonction  $\delta^*$  définie par la relation

$$\delta^*(x) = \frac{\delta(x)}{l(0)}, \quad \forall x \quad (1.18)$$

La fonction  $\delta^*$  ainsi définie exprime elle aussi la répartition des décès selon l'âge mais pour une cohorte d'effectif initial unité. Elle possède les 2 propriétés suivantes

$$(i) \quad \delta^*(x) \geq 0, \quad \forall x \quad (1.19)$$

$$(ii) \quad \int_0^{+\infty} \delta^*(x) dx = 1 \quad (1.20)$$

qui découlent des relations (1.17) et (1.18).

La fonction  $\delta^*$  apparaît donc comme une fonction de densité de probabilité, celle de la variable aléatoire  $X$ , durée de vie ou âge au décès d'un individu quelconque de la cohorte. Et il vient

$$\text{Pr} \{x < X < x + dx\} = \delta^*(x) dx + o(dx) \quad (1.21)$$

où  $o(dx)$  est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à  $dx$ .

La grandeur  $\delta^*(x) dx$  apparaît ainsi comme une valeur approchée de la probabilité, pour un individu de la cohorte, de décéder dans l'intervalle d'âge  $(x, x + dx)$ .

En exprimant la distribution de probabilité de l'âge au décès pour la cohorte étudiée, la fonction  $\delta^*$  exprime la densité ponctuelle des décès par âge pour une cohorte d'effectif initial unité. En d'autres termes, la fonction  $\delta^*$  exprime la densité des décès par âge en terme relatif pour l'ensemble de la cohorte.

D'un autre côté, la fonction de décès  $\delta$  exprime la densité des décès par âge en terme absolu, c'est-à-dire en terme d'effectif. Elle dépend de l'importance numérique de la cohorte en cause ; plus cette cohorte est nombreuse, plus la fonction de décès  $\delta$  est grande. Cela signifie, toutes choses égales par ailleurs, que la fonction  $\delta$  devient  $k$  fois plus grande si la racine de la table de mortalité est  $k$  fois plus grande.

### 3.2. La fonction de fécondité

La fonction de fécondité constitue un deuxième exemple de fonction de densité utilisée dans la description des phénomènes démographiques. Avant l'étude de cette fonction, nous allons d'abord présenter deux autres fonctions :

- la densité par âge des naissances dans une génération féminine ;
- la densité par âge des naissances chez une femme d'une génération féminine.

#### 3.2.1. La densité par âge des naissances pour une génération féminine

Considérons une génération de filles nées à la même date et d'effectif  $l(0)$ . Cette génération est supposée fermée et soustraite à la mortalité. Intéressons-nous aux naissances vivantes engendrées par cette génération aux différents âges de la période génésique.

Désignons par  $n(x, \Delta x)$  le nombre des naissances engendrées dans l'intervalle d'âge  $(x, x + \Delta x)$  par l'ensemble de la génération. La fonction  $n(x, \Delta x)$  est de par son expression, supposée indépendante du temps ou de l'époque de l'observation.

Considérons le nombre moyen des naissances par unité de temps dans l'intervalle  $(x, x + \Delta x)$  mesuré par  $n(x, \Delta x) / \Delta x$ . Cet indice exprime la densité moyenne par unité de temps des naissances engendrées dans l'intervalle d'âge  $(x, x + \Delta x)$ . La fonction de densité ponctuelle  $N$  associée à cette fonction de densité moyenne est définie par la relation

$$N(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{n(x, \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.22)$$

sous réserve de l'existence de la limite.

Si nous supposons l'existence de cette limite à tout âge de l'intervalle génésique, alors la fonction  $N$  est définie partout dans cet intervalle. La fonction  $N$  est appelée fonction de densité ponctuelle par âge des naissances ou fonction de densité instantanée par âge des naissances pour l'ensemble de la génération. La grandeur  $N(x)$  désigne la densité ponctuelle ou la densité instantanée des naissances à l'âge  $x$  pour l'ensemble de la génération.

De la relation de définition (1.22), on déduit la relation

$$n(x, \Delta x) = N(x) \Delta x + o(\Delta x) \quad (1.23)$$

où  $o(\Delta x)$  est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à  $\Delta x$ .

La relation (1.23) exprime que les grandeurs  $n(x, \Delta x)$  et  $N(x) \Delta x$  mesurent de façon approchée, le nombre des naissances engendrées par la génération dans l'intervalle  $(x, x + \Delta x)$  ou plus généralement dans tout intervalle de longueur  $\Delta x$  pris dans un voisinage de  $x$ .

La fonction de densité ponctuelle par âge des naissances dans la génération définit en terme absolu, c'est-à-dire en terme d'effectif, la répartition des naissances selon l'âge. Il s'agit de la fonction calendrier pour les naissances issues de la génération.

### 3.2.2. La densité par âge des naissances chez une femme d'une génération

La fonction de densité par âge des naissances pour une génération féminine, peut être définie autrement si l'on s'intéresse à la répartition selon l'âge des seules naissances engendrées par une femme de la génération.

Désignons par  $f$  la fonction de densité ponctuelle par âge des naissances issues d'une femme de la génération. Les fonctions  $f$  et  $N$  sont alors liées par la relation

$$f(x) = \frac{N(x)}{l(0)}, \quad \forall x \quad (1.24)$$

du fait que la génération étudiée est supposée soustraite à la mortalité et que son effectif reste constant et égal à sa valeur initiale  $l(0)$ .

Il résulte des relations (1.23) et (1.24) la relation

$$\frac{n(x, \Delta x)}{l(0)} = f(x) \Delta x + o(\Delta x) \quad (1.25)$$

où  $o(\Delta x)$  est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à  $\Delta x$ .

Ainsi la grandeur  $f(x) \Delta x$  apparaît comme une valeur approchée du nombre des naissances engendrées par une femme de la génération dans l'intervalle d'âge  $(x, x + \Delta x)$ , d'où la relation

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{n(x, \Delta x)}{l(0) \Delta x} \quad (1.26)$$

On remarque que  $\frac{n(x, \Delta x)}{l(0) \Delta x}$  n'est autre que le taux de fécondité générale à l'âge  $x$  relativement à l'intervalle  $(x, x + \Delta x)$  pour la génération étudiée. Il s'ensuit donc que  $f(x)$  est le taux instantané de fécondité générale à l'âge  $x$  pour la génération. De par sa définition,  $f(x)$  est un taux à dimension unitaire.

### 3.2.3. Définition et propriétés de la fonction de fécondité

La fonction  $f$  définie plus haut est ce qui est généralement appelé fonction de fécondité;  $f(x)$  est alors la fécondité à l'âge  $x$  pour une femme de la génération. On dit aussi que  $f(x)$  est la fécondité ponctuelle ou fécondité instantanée à l'âge  $x$  pour une femme de la génération.

La grandeur  $f(x)$  exprime sur une base unitaire qui est souvent une base annuelle, le nombre des naissances engendrées par une femme de la génération à l'âge  $x$ .

La fonction de fécondité  $f$  désigne la fécondité brute, c'est-à-dire la fécondité en l'absence de mortalité, la génération féminine étudiée étant supposée soustraite à la mortalité.

Examinons maintenant quelques propriétés de la fonction de fécondité.

Si  $(\alpha, \beta)$  désigne l'intervalle génésique de la femme, il vient

$$f(x) = 0, \quad \forall x \notin (\alpha, \beta) \quad (1.27)$$

ce qui exprime qu'une femme ne peut procréer en dehors de l'intervalle d'âge  $(\alpha, \beta)$ .

Si la fonction de fécondité  $f$  est continue, elle est alors intégrable sur tout segment de la demi-droite réelle positive. Ainsi pour deux réels positifs ou nuls quelconques  $a$  et  $h$ , l'intégrale définie  $\int_a^{a+h} f(x) dx$  existe; elle représente le nombre d'enfants mis au monde par une femme de la génération dans l'intervalle d'âge  $(a, a + h)$ .

Intéressons-nous plus particulièrement à la catégorie de telles intégrales définies caractérisée par la relation

$$D(x) = \int_{\alpha}^x f(v) dv, \quad \forall x \quad (1.28)$$

La fonction  $D$  est définie comme une fonction de la borne supérieure d'intégration de l'intégrale définie  $\int_{\alpha}^x f(v) dv$ . D'après un résultat d'Analyse Mathématique,  $D$  est alors une fonction dérivable vérifiant la relation

$$\frac{dD(x)}{dx} = D'(x) = f(x), \quad \forall x \quad (1.29)$$

En outre,  $D$  est une fonction non décroissante et jouit des propriétés suivantes

$$(i) \quad D(x) = 0, \quad \forall x \leq \alpha \quad (1.30)$$

$$(ii) \quad D(x) = D(\beta), \quad \forall x \geq \beta \quad (1.31)$$

$$(iii) \int_x^{x+h} f(v) dv = D(x+h) - D(x) \quad (1.32)$$

Les propriétés (i) et (ii) résultent de la relation (1.27) et la propriété (iii), de la propriété d'additivité de l'intégrale définie. La non décroissance de  $D$  résulte elle de la propriété (iii) et de ce que  $f$  est une fonction positive ou nulle.

Maintenant, cherchons à normer la fonction de fécondité  $f$ . Nous associons à cet effet à la fonction  $f$ , une fonction  $f^*$  définie par la relation

$$f^*(x) = \frac{f(x)}{D(\beta)} \quad , \quad \forall x \quad (1.33)$$

Il vient

$$(i) \quad f^*(x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \quad (1.34)$$

$$(ii) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f^*(x) dx = 1 \quad (1.35)$$

Ainsi la fonction  $f^*$  associée à la fonction de fécondité  $f$  apparaît comme une fonction de densité de probabilité. Elle exprime la répartition par âge d'une descendance finale unité. La grandeur  $f^*(x) dx$  désigne une valeur approchée de la probabilité pour une femme de la génération, de procréer dans l'intervalle d'âge  $(x, x + dx)$ . Si  $X$  désigne l'âge à la procréation pour une femme de la génération, il vient donc

$$\text{Pr} \{x < X < x + dx\} = f^*(x) dx + o(dx) \quad (1.36)$$

où  $o(dx)$  est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à  $x$ .

On peut associer à la fonction  $f^*$  elle-même, une fonction  $D^*$  définie par la relation

$$D^*(x) = \frac{D(x)}{D(\beta)} \quad , \quad \forall x \quad (1.37)$$

La fonction  $D^*$  possède les mêmes propriétés que la fonction  $D$ .

En réalité, la fonction  $D^*$  n'est autre que la fonction de répartition de probabilité de la variable aléatoire  $X$ , âge à la procréation pour la génération étudiée. En effet

$$D^*(x) = \int_{\alpha}^x f^*(v) dv \quad , \quad \forall x \quad (1.38)$$

ce qui résulte de la relation

$$D^*(x) = \frac{\int_{\alpha}^x f(v) dv}{D(\beta)}$$

On constate que la fonction calendrier des naissances pour une génération féminine peut être exprimée en terme absolu, c'est-à-dire en terme d'effectif, de deux manières : soit au moyen de la fonction de densité N pour l'ensemble de la génération, soit au moyen de la fonction de fécondité f pour une femme de la génération. Mais les expressions en terme relatif, de l'une ou l'autre de ces deux fonctions de densité se confondent avec la fonction de densité de probabilité f\* qui leur est associée.

**3.3. La répartition par âge ou densité par âge d'une population**

La répartition par âge d'une population est un autre exemple de fonction de densité utilisée pour décrire les phénomènes démographiques. C'est à l'étude de cette fonction que nous allons consacrer ce paragraphe.

Considérons une population à une date d'observation fixe t. Les fonctions qui vont être définies ici, bien qu'étant des fonctions de l'âge x et de la date d'observation t, seront considérées comme des fonctions de la seule variable x, la valeur de la variable t étant fixée.

Désignons par Q<sub>t</sub>(x, Δx) l'effectif des individus de la population dont l'âge est compris entre x et x + Δx à la date d'observation t. La grandeur Q<sub>t</sub>(x, Δx) / Δx représente le nombre moyen d'individus de la population par unité de temps dans l'intervalle d'âge (x, x + Δx) à la date d'observation t. Elle exprime ce que nous allons appeler la densité moyenne absolue unitaire par âge de la population dans l'intervalle d'âge (x, x + Δx), à la date d'observation t.

A cette fonction de densité moyenne, associons la fonction de densité ponctuelle K définie par la relation

$$K(x, t) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{Q_t(x, dx)}{dx} \tag{1.39}$$

K(x, t) désigne la densité ponctuelle absolue de population à l'âge x et à la date d'observation t.

Pour la valeur fixée de t, nous postulons l'existence de la limite de la relation (1.39) pour tout x positif ou nul.

De la relation (1.39) on déduit la relation

$$Q_t(x, dx) = K(x, t) dx + o(dx) \tag{1.40}$$

## Bibliographie

- AMEGANDJIN, Julien (1970), L'admissibilité des estimateurs et la statistique d'ordre dans la théorie de l'échantillonnage sur des populations finies, thèse de Statistique Mathématique (3<sup>e</sup> cycle), Faculté des Sciences de Paris.
- AMEGANDJIN, Julien (1976), Éléments de Théorie des Probabilités, Cours photocopié, IFORD, Yaoundé, Cameroun.
- AMEGANDJIN, Julien (1977), Les convergences stochastiques, Cours photocopié, IFORD, Yaoundé, Cameroun.
- AMEGANDJIN, Julien (1982), Description de la mortalité en temps continu, Cours photocopié, IFORD, Yaoundé, Cameroun.
- BOURGEOIS-PICHAT, Jean (1979), Populations stables, semi-stables et quasi-stables, traduction en français réalisée par Rémy Clairin, Études et Documents n° 1, Groupe de Démographie Africaine, Paris.
- BROUARD, Nicolas (1985), Mouvements et modèles de population, Cours photocopié, IFORD, Yaoundé, Cameroun.
- CALOT, Gérard (1967), Cours de Calcul des Probabilités, 2<sup>e</sup> édition, Dunod, Paris.
- CLAIRIN, Rémy et CONDE, Julien (1986), Manuel sur les méthodes d'estimation des statistiques démographiques imparfaites dans les pays en développement, OCDE, Paris.
- DISAINE, Bruno (1982), Analyse de la mortalité, Cours photocopié, IFORD, Yaoundé, Cameroun.
- FARGUES, Philippe (1975), Analyse de la fécondité, Cours photocopié, IFORD, Yaoundé, Cameroun.
- GBENYON, Kuakuvi (1985), Pour une mesure indirecte de la mortalité : la méthode de Courbage-Fargues ; adéquation ou inadéquation au cas du Togo en 1971, article publié dans Études Togolaises de Population n° 9, Unité de Recherche Démographique, Lomé, Togo.
- GENDREAU, Francis (1976), Mouvements et modèles de population, Cours photocopié, IFORD, Yaoundé, Cameroun.
- GENDREAU, Francis (1978), Mouvements et modèles de population, Exercices et problèmes, Cours photocopié, IFORD, Yaoundé, Cameroun.
- GROSS, Alan et CLARK, Virginia (1975), Survival distributions : reliability applications in biomedical sciences, John Wiley and Sons.

- KEYFITZ, Nathan (1968), *Introduction to the Mathematics of Population*, Addison-Wesley.
- KEYFITZ, Nathan (1977), *Applied Mathematical Demography*, John Wiley and Sons.
- KEYFITZ, Nathan et BECKMAN, John, A. (1984), *Demography through problems*, Springer-Verlag.
- HILLION, Alain (1986), *Les théories mathématiques des populations*, Presses Universitaires de France, Collection « Que sais-je » n° 2258, Paris.
- LESIEUR, Léonce et LEFEBVRE, Jean (1967), *Mathématiques, tome 2, Analyse*, Armand Colin, Paris.
- LOCOH, Thérèse (1984), *Fécondité et famille en Afrique de l'Ouest: le Togo méridional contemporain*, Travaux et Documents de l'INED, Cahier n° 107, Presses Universitaires de France, Paris.
- MARTIN, J. (1967), *Cours de Mathématiques*, Dunod, Paris.
- POLLARD, J. H. (1973), *Mathematical models for the growth of human populations*, Cambridge at the University.
- PRESSAT, Roland (1983), *L'analyse démographique*, 4<sup>e</sup> édition, Presses Universitaires de France, Paris.
- PRESSAT, Roland (1986), *Les méthodes en démographie*, 2<sup>e</sup> édition, Presses Universitaires de France, Paris.
- ROGERS, Andrei (1975), *Introduction to multiregional mathematical demography*, John Wiley and Sons.
- TASSI, Philippe (1988), *Méthodes statistiques*, 2<sup>e</sup> édition, Economica, Paris.
- WALTISPERGER, Dominique et ROGER, Gilles (1986), *Populations stables et populations déstabilisées*, OCDE, Paris.

