

PHYSIQUE

Michel PEYRARD - Thierry DAUXOIS

• Physique •
des solitons



SAVOIRS ACTUELS

 CNRS EDITIONS


EDP
SCIENCES

Michel Peyrard et Thierry Dauxois

Physique des solitons

S A V O I R S A C T U E L S

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Illustration de couverture : Collision de deux solitons de faible amplitude photographiée sur une plage de l'état d'Oregon sur la côte ouest des États-Unis (Photographie Terry Toedtemeier, 1978).

© 2004, **EDP Sciences**, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A

et

CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

ISBN EDP Sciences 2-86883-732-8

ISBN CNRS ÉDITIONS 2-271-06267-5

Avant-propos

DEPUIS LA PREMIÈRE OBSERVATION d'un *soliton* par John Scott Russell en 1834, ces ondes solitaires à la stabilité exceptionnelle ont fasciné les scientifiques, d'abord en raison de leurs propriétés expérimentales très spectaculaires, de leur indéniable élégance, mais également à cause des propriétés mathématiques remarquables des systèmes intégrables ayant des solutions de type soliton. L'aspect mathématique a été privilégié dans la plupart des ouvrages consacrés aux solitons car il conduit à de très beaux développements théoriques comme par exemple la méthode d'inversion des données de diffusion qui permet de résoudre une équation *non linéaire* complexe par une série d'étapes qui sont toutes *linéaires* (cf. chap. 7).

Pourtant, au delà des aspects mathématiques, la *physique* des solitons est toute aussi intéressante et pertinente pour la recherche moderne. Ainsi, de nombreuses d'expériences sur la condensation de Bose-Einstein, objet du prix Nobel de Physique 2001, s'analysent à partir de l'équation de Schrödinger non linéaire, présentée au chapitre 3, qui est l'une des grandes équations de la théorie des solitons. Le prix Nobel de Chimie, attribué en 2000 à Heeger, MacDiarmid et Shirakawa doit encore plus aux solitons car les porteurs de charge dans les polymères conducteurs sont des solitons. Le chapitre 13 s'appuie sur un article de Su, Schrieffer et Heeger pour expliquer ces phénomènes.

Ainsi, la physique des solitons est un domaine actif de la recherche, auquel nous avons contribué, mais ce livre n'est cependant pas un ouvrage de recherche. Il se propose de présenter la physique des solitons de manière pédagogique, abordable par un étudiant en fin de licence ou début de master ayant seulement des connaissances de base en physique générale, en mécanique analytique et en mécanique quantique. Il est issu d'un cours donné d'abord par Michel Peyrard à l'université de Dijon puis sous une forme plus complète dans le cadre du DEA de Physique statistique et Phénomènes non linéaires de l'École Normale Supérieure de Lyon, et poursuivi maintenant par Thierry Dauxois dans le Master de Sciences de la matière de l'École Normale Supérieure de Lyon.

L'ouvrage n'a pas la prétention d'être exhaustif mais il est conçu de façon à donner néanmoins une vision assez complète du sujet. Les fondements sont introduits dans la partie I qui présente les grandes équations à solitons à

partir d'exemples de la physique macroscopique. Les méthodes théoriques sont présentées dans la partie II. Le choix des développements dans ce domaine a été effectué en pensant aux situations physiques comme le montrent les applications présentées dans les parties III et IV consacrées à des problèmes de la physique des solides ou des macromolécules biologiques. La modélisation, qui est l'étape qui permet de passer du système physique aux équations non linéaires qui le décrivent, est illustrée tout au long de l'ouvrage, mais aussi discutée dans un chapitre spécifique (chap. 4) car c'est un point difficile et particulièrement important.

L'approche en terme de solitons permet de renouveler en profondeur le point de vue sur certains problèmes physiques. Nous montrons ainsi comment les solitons peuvent être utilisés pour traiter la physique statistique des ferro-électriques (chap. 10) ou d'un modèle pour l'ADN (chap. 15). La bibliographie contient de nombreuses références d'articles qui devraient permettre au lecteur qui le souhaite d'aller plus loin et de trouver les éléments pour aborder la recherche sur la physique des solitons. Enfin, nous avons souhaité inclure quelques éléments biographiques sur les principaux fondateurs de ce domaine car, comme le disait le philosophe Whitehead au début du XX^e siècle, « une science qui refuse de se souvenir de ses fondateurs est condamnée ».

L'ouvrage a mûri au fil des années de cours et de travaux dirigés, mais il doit aussi beaucoup à tous ceux qui en ont fait une relecture critique, en particulier Geneviève Peyrard qui a fait de multiples remarques pertinentes. Plusieurs collègues, Mariette Barthès, Freddy Bouchet, Hervé Courtois, Jacques Dauxois, Sébastien Dusuel, Jean-Noël Gence, Ioannis Kourakis, Juan Mazo, Guy Millot, Jean-Pierre Nguenang, Sébastien Paulin, Hicham Qasmi, Florence Raynal, Yves-Henri Sanéjouand, ont examiné plus particulièrement les chapitres proches de leur domaine de recherche. Nous remercions également Larissa Brizhik, Lincoln D. Carr, Thierry Cretegny, Bernard Deconinck, Chris Eilbeck, Ying Li, Robert I. Odom, Sylvian R. Ray, Harvey Segur, Terry Toedtemeier, Nadezhda Tsyphkina, Kathleen T. Zanotti de nous avoir autorisés à utiliser certaines photographies ou pour des informations complémentaires. Nous tenons enfin à remercier tout spécialement Martin D. Kruskal et Norman J. Zabusky de nous avoir fourni des éléments sur les débuts de l'histoire des « solitons ».

Février 2004,

Michel Peyrard, Thierry Dauxois.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Avant-propos | v |
| Introduction | xv |
| I Les différentes classes de solitons | 1 |
| 1 L'équation de Korteweg-de Vries | 3 |
| 1.1 La découverte | 3 |
| 1.1.1 Les observations de John Scott Russell | 3 |
| 1.1.2 L'interprétation de Korteweg-de Vries | 8 |
| 1.1.3 Propriétés de l'équation de Korteweg-de Vries et de ses solutions | 9 |
| 1.2 Les solutions de l'équation de Korteweg-de Vries | 14 |
| 1.2.1 Solutions à profil constant | 14 |
| 1.2.2 Solutions multisolitons | 17 |
| 1.3 Relations de conservation | 20 |
| 1.4 Lignes électriques non-linéaires | 21 |
| 1.4.1 Description du problème physique | 21 |
| 1.4.2 Approximation linéaire. Relation de dispersion | 23 |
| 1.4.3 L'équation non-linéaire dans la limite des milieux continus | 24 |
| 1.4.4 Les solutions quasi-solitons de la chaîne électrique | 26 |
| 1.4.5 La limite Korteweg-de Vries pour la chaîne électrique | 27 |
| 1.5 Ondes de pression sanguine | 29 |
| 1.6 Ondes internes en océanographie | 35 |
| 1.7 La généralité de l'équation de Korteweg-de Vries | 37 |
| 2 L'équation de sine-Gordon | 39 |
| 2.1 Un exemple mécanique simple : la chaîne de pendules couplés | 39 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.2 | Les solutions de l'équation de sine-Gordon | 41 |
| 2.2.1 | Topologie du paysage énergétique | 41 |
| 2.2.2 | Les solutions de faible amplitude : la limite linéaire | 43 |
| 2.2.3 | Solutions solitons | 44 |
| 2.2.4 | Énergie du soliton | 48 |
| 2.2.5 | Solutions multisolitons | 50 |
| 2.2.6 | La solution breather | 52 |
| 2.3 | Étude des jonctions Josephson longues | 56 |
| 2.3.1 | Équation dynamique de la jonction | 57 |
| 2.3.2 | Applications aux propriétés d'une jonction Josephson | 63 |
| 2.3.3 | Signification physique du soliton : fluxon | 65 |
| 2.4 | Autres exemples de solitons topologiques | 66 |
| 2.4.1 | Le modèle ϕ^4 | 67 |
| 2.4.2 | Le modèle double sine-Gordon (DSG) | 68 |
| 3 | L'équation de Schrödinger non-linéaire | 71 |
| 3.1 | Ondes non-linéaires dans la chaîne de pendules | 72 |
| 3.2 | Propriétés de l'équation de NLS | 76 |
| 3.2.1 | La solution soliton de l'équation de NLS | 77 |
| 3.2.2 | La localisation de l'énergie par instabilité modulationnelle | 80 |
| 3.2.3 | Relation entre le breather de SG et le soliton de NLS | 83 |
| 3.3 | Relations de conservation | 85 |
| 3.3.1 | Le lagrangien de NLS | 85 |
| 3.3.2 | L'hamiltonien de NLS | 86 |
| 3.4 | Théorème de Noether | 89 |
| 3.4.1 | Rappel du théorème | 89 |
| 3.4.2 | Application à l'équation NLS | 90 |
| 3.5 | Lignes électriques non-linéaires | 91 |
| 3.6 | Solitons dans les fibres optiques | 92 |
| 3.6.1 | Origine de la non-linéarité : polarisation non-linéaire | 92 |
| 3.6.2 | La structure du champ électrique dans la fibre | 95 |
| 3.6.3 | La propagation non-linéaire le long de la fibre | 98 |
| 3.6.4 | La confrontation avec l'expérience | 103 |
| 3.6.5 | Application aux communications par fibre optique | 105 |
| 3.7 | Auto-focalisation en optique | 106 |
| 3.8 | Conclusion | 111 |
| 4 | Modélisation : ondes dans un plasma | 113 |
| 4.1 | Introduction | 113 |
| 4.2 | Le plasma | 114 |
| 4.2.1 | Physique d'un plasma | 114 |
| 4.2.2 | Températures et équations d'état | 116 |
| 4.2.3 | Passage à des équations sans dimension | 118 |
| 4.3 | Étude de la dynamique linéaire | 119 |

| | | |
|------------|---|------------|
| 4.4 | Étude non-linéaire | 120 |
| 4.4.1 | Le plasma peut être décrit par l'équation de KdV | 120 |
| 4.4.2 | La relation de dispersion | 123 |
| 4.5 | Obtention de l'équation de NLS | 123 |
| 4.6 | Observations expérimentales | 127 |
| 4.7 | Discussion | 129 |
| 4.7.1 | Les ondes hydrodynamiques | 130 |
| 4.7.2 | Les lignes électriques | 131 |
| | | |
| II | Méthodes mathématiques d'étude des solitons | 135 |
| | Avant-propos | 137 |
| 5 | Linéarisation autour du soliton | 139 |
| 5.1 | Spectre des excitations d'un soliton sine-Gordon | 139 |
| 5.2 | Application : perturbations du soliton | 142 |
| 5.2.1 | Présentation | 142 |
| 5.2.2 | Exemple : réponse du soliton à une force extérieure en présence de dissipation | 143 |
| 5.3 | Spectre des excitations d'un soliton ϕ^4 | 148 |
| 6 | Méthode des coordonnées collectives | 155 |
| 6.1 | La méthode du lagrangien effectif | 155 |
| 6.2 | Introduction d'une seconde coordonnée collective | 159 |
| 7 | La méthode inverse de diffusion | 165 |
| 7.1 | La méthode inverse pour l'équation de Korteweg-de Vries | 165 |
| 7.1.1 | Le principe de la méthode inverse | 165 |
| 7.1.2 | L'inversion des données de diffusion | 167 |
| 7.1.3 | L'évolution temporelle des données de diffusion | 169 |
| 7.1.4 | Exemples d'applications | 172 |
| 7.2 | « Analyse de Fourier non-linéaire » | 175 |
| 7.2.1 | Une étape de la généralisation : la méthode de Lax | 176 |
| 7.2.2 | La méthode (AKNS) Ablowitz-Kaup-Newell-Segur | 179 |
| 7.2.3 | La méthode inverse et la théorie des perturbations | 181 |
| | | |
| III | Exemples en physique des solides | 183 |
| | Avant-propos | 185 |
| 8 | Le problème de Fermi-Pasta-Ulam | 187 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 9 | Un modèle simple de dislocation | 197 |
| 9.1 | Déformations plastiques des cristaux | 197 |
| 9.2 | Le modèle Frenkel-Kontorova | 200 |
| 9.3 | L'approximation des milieux continus | 202 |
| 9.4 | Les dislocations sont-elles des solitons? | 203 |
| 9.5 | Les applications | 207 |
| 10 | Parois de domaines ferroélectriques | 211 |
| 10.1 | Matériaux ferroélectriques | 211 |
| 10.1.1 | Ferroélectrique de type déplacement : titanate de baryum | 211 |
| 10.1.2 | Ferroélectrique de type ordre-désordre : nitrite de sodium | 212 |
| 10.1.3 | Les parois de domaines ferroélectriques | 214 |
| 10.2 | Modèle unidimensionnel de ferroélectrique | 215 |
| 10.3 | Structure des parois de domaines | 216 |
| 10.3.1 | Les solutions de faible amplitude : les phonons | 217 |
| 10.3.2 | Les solutions de grande amplitude : structure des parois de domaines ferroélectriques | 217 |
| 10.3.3 | Énergie de paroi | 219 |
| 10.4 | Réponse diélectrique d'un ferroélectrique | 220 |
| 10.5 | Thermodynamique d'un système non-linéaire | 222 |
| 10.5.1 | La fonction de corrélation | 222 |
| 10.5.2 | Le modèle du gaz de solitons | 223 |
| 10.5.3 | La méthode de l'intégrale de transfert | 225 |
| 10.5.4 | Détermination du spectre de l'opérateur de transfert | 229 |
| 10.5.5 | Conclusion | 233 |
| 11 | Les phases incommensurables | 235 |
| 11.1 | Exemples en physique des matériaux | 235 |
| 11.2 | Le modèle de Frenkel et Kontorova | 236 |
| 11.3 | Phases commensurables | 237 |
| 11.4 | La transition commensurable-incommensurable | 238 |
| 11.5 | Structure de la phase incommensurable | 239 |
| 11.6 | Calcul de δ_c | 241 |
| 11.7 | Diagramme de phases | 243 |
| 11.8 | Dynamique de la phase incommensurable | 245 |
| 11.9 | Formation des discommensurations | 248 |
| 11.10 | Conclusion | 251 |
| 12 | Solitons dans les systèmes magnétiques | 253 |
| 12.1 | Ferromagnétisme et antiferromagnétisme | 253 |
| 12.2 | Dynamique d'une chaîne de spins | 255 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 12.3 | Magnons et solitons | 258 |
| 12.3.1 | Les magnons | 258 |
| 12.3.2 | Les solitons | 260 |
| 12.4 | Validité de l'approximation de sine-Gordon | 262 |
| 12.4.1 | Ordres de grandeur | 262 |
| 12.4.2 | Simulations numériques | 264 |
| 12.4.3 | Observations expérimentales | 266 |
| 12.5 | Chaînes de spins antiferromagnétiques | 268 |
| 13 | Polymères conducteurs | 271 |
| 13.1 | Les matériaux | 271 |
| 13.1.1 | Le polyacétylène | 271 |
| 13.1.2 | Les autres polymères conducteurs | 273 |
| 13.2 | Le modèle physique du polyacétylène | 274 |
| 13.2.1 | La dynamique des atomes | 275 |
| 13.2.2 | L'hamiltonien électronique | 275 |
| 13.3 | L'état fondamental du polyacétylène | 276 |
| 13.3.1 | Rappel de théorie des bandes | 277 |
| 13.3.2 | La structure de bandes du polyacétylène | 282 |
| 13.4 | L'état excité du polyacétylène | 285 |
| 13.4.1 | La méthode | 285 |
| 13.4.2 | La solution soliton | 287 |
| 13.5 | Le mécanisme de la conduction électrique | 289 |
| 13.5.1 | Le principe | 289 |
| 13.5.2 | La dynamique du soliton chargé | 292 |
| 13.6 | Vérification expérimentale | 294 |
| 13.6.1 | Le mode d'oscillation de la pente du soliton | 294 |
| 13.6.2 | La solution linéarisée | 295 |
| 13.6.3 | L'observation du mode interne du soliton | 296 |
| 13.7 | Autres excitations non-linéaires | 297 |
| IV | Excitations non-linéaires dans les molécules biologiques | 299 |
| | Avant-propos | 301 |
| 14 | Localisation d'énergie dans les protéines | 305 |
| 14.1 | Le mécanisme proposé par Davydov | 305 |
| 14.1.1 | L'hamiltonien de Davydov | 307 |
| 14.1.2 | La méthode variationnelle de l'ansatz D_2 | 310 |
| 14.1.3 | Les équations d'évolution des $\beta_n(t)$ | 313 |
| 14.1.4 | Les équations d'évolution des $a_n(t)$ | 314 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 14.2 | Étude des équations de Davydov | 320 |
| 14.3 | Le soliton de Davydov existe-t-il? | 323 |
| 14.4 | Le cristal d'acétanilide | 324 |
| 15 | Dynamique non-linéaire de l'ADN | 331 |
| 15.1 | Un modèle simple pour l'ADN | 332 |
| 15.1.1 | Structure statique de l'ADN | 332 |
| 15.1.2 | Les différents processus dynamiques | 333 |
| 15.1.3 | Le modèle | 338 |
| 15.2 | Dynamique non-linéaire de l'ADN | 343 |
| 15.2.1 | Équations adimensionnées | 343 |
| 15.2.2 | Solution non-linéaire des équations du mouvement | 344 |
| 15.2.3 | Dynamique du modèle en contact avec un bain thermique | 347 |
| 15.3 | Physique statistique de la dénaturation | 351 |
| 15.3.1 | Étude qualitative de la transition de phase | 352 |
| 15.3.2 | Le problème associé de l'oscillateur de Morse | 355 |
| 15.3.3 | Le paramètre d'ordre pour l'ADN | 356 |
| 15.4 | Une autre approche de la dénaturation | 358 |
| 15.4.1 | La paroi de domaine | 358 |
| 15.4.2 | Fluctuations autour de la paroi de domaine | 360 |
| 15.4.3 | Énergie libre de la paroi de domaine | 362 |
| 15.4.4 | Discussion | 365 |
| | Conclusion : Les solitons existent-ils? | 369 |
| | Appendices | 373 |
| A | Ondes hydrodynamiques | 375 |
| A.1 | Équations de base et conditions aux limites | 375 |
| A.1.1 | Condition à la limite cinématique | 376 |
| A.1.2 | Condition à la limite physique | 377 |
| A.2 | Formulation mathématique du problème | 377 |
| A.2.1 | Les équations de définition du problème | 378 |
| A.2.2 | Pression statique et pression dynamique | 379 |
| A.2.3 | Équations sans dimension | 379 |
| A.2.4 | Hypothèses d'échelle | 380 |
| A.2.5 | Le potentiel des vitesses | 381 |
| A.3 | Étude de la limite linéaire | 382 |
| A.4 | L'équation non-linéaire en eau peu profonde | 383 |
| B | Mécanique d'un système continu | 387 |
| B.1 | Formulation lagrangienne | 387 |
| B.2 | Formulation hamiltonienne | 389 |

| | |
|--|------------|
| <i>Table des matières</i> | xiii |
| C États cohérents de l'oscillateur harmonique | 391 |
| Table des portraits | 395 |
| Bibliographie | 397 |
| Index | 407 |

Introduction

LE XIX^e SIÈCLE et la première moitié du XX^e siècle ont marqué le triomphe de la *physique linéaire*, d'abord à travers les équations de Maxwell, puis avec la mécanique quantique dont tout le formalisme repose sur la linéarité associée au principe de superposition. Les outils mathématiques de la physique étaient eux-mêmes fondamentalement des outils linéaires comme la transformée de Fourier, la théorie de la réponse linéaire, les approches perturbatives, etc.

Bien entendu, les physiciens avaient identifié l'importance des phénomènes non linéaires qui apparaissaient dans les équations de Navier-Stokes de l'hydrodynamique, la théorie de la gravitation, les effets collectifs associés aux interactions entre particules en physique des solides, etc. Mais, dans la plupart des cas, on cherchait à éviter les non linéarités ou à les traiter comme des perturbations des théories linéaires.

En revanche, pendant les quarante dernières années, l'importance du *traitement intrinsèque* des non linéarités a été de mieux en mieux perçue et a conduit à deux concepts réellement révolutionnaires par rapport aux idées antérieures, l'attracteur étrange et le soliton.

Ces deux concepts correspondent à deux propriétés étonnantes des systèmes non linéaires, qui semblent contradictoires. L'attracteur étrange est associé à la notion de *chaos* dans un système régi par des équations déterministes. On le rencontre même dans des systèmes à faible nombre de degrés de liberté, que l'on aurait pu croire « simples ». Au contraire, le soliton concerne des systèmes à grand nombre de degrés de liberté. *A priori* il semble que l'addition de nouveaux degrés de liberté devrait compliquer le comportement, et pourtant ce n'est pas toujours le cas. Des *structures spatiales cohérentes* peuvent apparaître grâce à des effets collectifs et conduire au contraire à une *auto organisation*. La compréhension de la coexistence entre structures cohérentes et chaos dans les systèmes non linéaires est encore une question ouverte.

Le soliton est une *onde solitaire* c'est-à-dire localisée spatialement, dont les propriétés de stabilité sont spectaculaires. Dès sa première observation [135] en 1834 par un ingénieur hydrodynamicien, John Scott Russell, il a suscité passion et débats. J.S. Russell a été tellement fasciné par cette observation inattendue qu'il a consacré dix années de sa vie à étudier le phénomène, tandis

que les théories, fondées sur des approches linéarisées, montraient ... que le soliton ne pouvait pas exister. Le soliton a une histoire à éclipses puisqu'après l'observation de 1834, il a fallu attendre 1895 pour qu'une théorie [85] puisse en rendre compte grâce à l'équation obtenue par Korteweg et de Vries. Puis le phénomène a été oublié jusqu'à ce qu'une expérience numérique [55], faite par Fermi, Pasta et Ulam en 1953 sur un des premiers ordinateurs à Los Alamos, révèle un phénomène étonnant. Un réseau unidimensionnel de particules couplées par un potentiel non linéaire n'atteignait pas toujours l'équilibre thermodynamique comme on le pensait. L'énergie injectée initialement dans un mode commençait, comme prévu, à se distribuer vers les autres modes, mais elle revenait ensuite pratiquement intégralement vers le mode excité initialement. Ce n'est que dix ans plus tard que l'explication a été donnée par Zabusky et Kruskal [160] ; elle fait intervenir les solitons comme nous le verrons dans ce livre. C'est ce travail qui, en 1965, a introduit le terme de *soliton*. Ce n'est pas un hasard si ce nom fait penser à celui d'une particule. Le soliton est une onde, mais il correspond aussi à un maximum localisé dans la densité d'énergie du système, qui se propage en conservant sa forme et sa vitesse, comme le ferait une particule. On dispose ainsi d'une solution d'une équation de champ *classique* qui possède à la fois les propriétés d'une quasi-particule et celles d'une onde. On trouve là des caractéristiques que l'on n'attend que dans les systèmes quantiques. L'analogie peut être poussée plus loin puisqu'on peut même mettre en évidence un effet tunnel pour les solitons [114].

Le travail de Zabusky et Kruskal a constitué un véritable tournant dans l'histoire des solitons qui, à partir de cette date, sont restés sur le devant de la scène et ont donné lieu à d'innombrables travaux, aussi bien sur le plan mathématique que sur le plan physique.

Les équations à solitons, au sens mathématique du terme, fournissent des exemples remarquables de systèmes totalement intégrables possédant un nombre infini de degrés de liberté. C'est la raison pour laquelle elles ont tant intéressé les mathématiciens, au point que beaucoup d'ouvrages sur les solitons sont fortement orientés vers les aspects mathématiques de la théorie.

Pourtant les solitons concernent aussi les physiciens et ils sont même devenus indispensables pour décrire des phénomènes tels que la propagation de certaines ondes en hydrodynamique, les ondes localisées dans les plasmas astrophysiques, la propagation de signaux dans les fibres optiques, ou des aspects beaucoup plus microscopiques comme les phénomènes de transport de charge dans les polymères conducteurs, les modes localisés dans des cristaux magnétiques, la dynamique de macromolécules biologiques comme l'ADN et les protéines par exemple. Bien entendu, tous ces systèmes ne sont décrits qu'approximativement par les équations de la théorie des solitons. On parle alors de quasi-solitons. Mais la caractéristique remarquable des solitons est qu'ils sont exceptionnellement stables vis-à-vis des perturbations. Ils sont en outre capables de se former spontanément dans un système physique auquel on fournit de l'énergie, par exemple sous forme thermique, par une onde

électromagnétique ou une action mécanique, même si l'excitation initiale ne correspond pas exactement à un soliton. C'est cette propriété qui fait tout l'intérêt des solitons en physique car, si un système possède des caractéristiques permettant l'existence de solitons, et nous verrons que c'est le cas pour beaucoup d'entre eux, il existe alors une très forte chance qu'une excitation intense conduise à leur formation.

Les solitons fournissent souvent une approche fructueuse pour décrire la physique d'un système non linéaire. Au lieu de faire une approximation linéaire, puis de traiter les non linéarités comme une perturbation, il peut être beaucoup plus efficace de décrire approximativement la physique du système par une équation à solitons puis, si nécessaire, de tenir compte des contributions qui perturbent les solitons.

L'objet de cet ouvrage est de traiter la *physique des solitons* en montrant comment ce concept intervient dans de nombreux domaines grâce à un parcours en trois étapes.

La première partie présente les grandes classes d'équations à solitons à partir de situations tirées de la physique macroscopique. Dans chaque cas nous partons d'un exemple où l'observation directe des solitons est facile et nous montrons comment les équations physiques conduisent à des équations de champ non linéaires ayant des solutions solitons. Cette partie permet de comprendre les principales propriétés des solitons et les caractéristiques qu'un système physique doit présenter pour permettre leur existence. Le dernier chapitre de cette première étape discute plus en détails la modélisation en termes de solitons en s'appuyant sur la physique des plasmas. Il montre en particulier comment *un* système donné peut être décrit par *plusieurs* types d'équations à solitons, selon les conditions dans lesquelles on le place.

La deuxième partie introduit quelques méthodes mathématiques pour l'étude des solitons. Bien que les aspects mathématiques ne soient pas l'objectif principal de l'ouvrage, ces méthodes sont importantes pour les applications physiques car le système auquel on s'intéresse n'est jamais décrit exactement par une équation à solitons. Il faut donc pouvoir évaluer et étudier l'influence des termes que l'on a négligés quand on a proposé une description par une équation à solitons. Cette partie présente des techniques qui sont rarement introduites dans les ouvrages traitant de la théorie mathématique des solitons car elles concernent justement des systèmes qui ne sont pas exactement décrits par une équation à solitons. Le physicien a aussi besoin de savoir comment évolue dans le temps une condition initiale appliquée à un système. Pour répondre à cette question on peut faire appel à une méthode mathématique très élégante, la méthode d'inversion des données de diffusion, qui parvient à réduire la recherche de la solution d'une équation non linéaire à une séquence d'opérations linéaires. Nous présentons une introduction à cette méthode.

La dernière étape, constituée des troisième et quatrième parties de l'ouvrage, est consacrée à la physique microscopique – physique des solides ou physique des molécules biologiques – où les descriptions en termes de solitons ont permis de traiter de nombreux problèmes. À cette échelle on ne « voit » plus directement les solitons, mais on les détecte par leur influence sur les propriétés du système. Outre le passage des équations physiques aux équations à solitons, comme dans la première partie, il faut donc aussi discuter les méthodes d'observation des solitons. De plus, à ce niveau, les fluctuations thermiques ne sont plus négligeables. Elles peuvent interagir avec les solitons dont il faut étudier la dynamique dans un système qui n'est plus au repos. Par ailleurs, les solitons eux-mêmes interviennent directement dans les propriétés thermodynamiques du système que leur présence peut modifier. Nous verrons aussi, par exemple dans les ferroélectriques ou dans le cas de l'ADN, que le concept de soliton est très puissant pour étudier théoriquement la thermodynamique de certains systèmes.

La beauté de la science du non linéaire se situe sans doute dans les liens qu'elle tisse entre différents domaines qui partagent une description mathématique commune. Cette généralité n'est pas sans rappeler celle de la thermodynamique puisque dans les deux cas c'est la structure mathématique abstraite (qui dérive bien sûr des symétries et des lois de la physique) qui est cruciale. Cet ouvrage montre comment quelques équations fondamentales permettent de traiter des systèmes physiques extrêmement variés, du macroscopique au microscopique, unifiant ainsi des domaines que l'on considère souvent comme totalement différents tels que l'hydrodynamique et la dynamique des macromolécules biologiques.

Bien entendu, il reste encore de nombreuses questions ouvertes dans la physique des systèmes non linéaires et les concepts que nous introduisons ici sont en train de pénétrer dans des domaines très différents tels que la biologie, la sociologie, l'économie, l'épidémiologie, l'écologie, etc. Nous espérons que cet ouvrage donnera au lecteur l'envie de s'aventurer dans l'exploration de ces questions ouvertes, en gardant à l'esprit l'étonnante capacité de nombreux systèmes à créer des structures spatiales cohérentes d'une remarquable stabilité qui peuvent influencer profondément leurs propriétés.

Première partie

Les différentes classes
de solitons

I

instabilité modulationnelle, 80, 131
 intégrale de transfert, 225, 351
 internes (onde), 35, 176
 invariance de Lorentz, 44, 46, 54, 66, 218
 inversion des données de diffusion, 165

J

jonctions Josephson, 56, 143

K

kink, 46, 49, 67, 150, 208, 262, 265, 288
 Klein, 56
 Kontorova, 202
 Kruskal, 195

L

lignes électriques, 21, 91, 129, 131

M

magnon, 256, 258, 259
 masse du soliton, 21, 50, 157, 220, 288, 293
 multisolitons, 47, 50, 68, 173

P

Pasta, 188
 Peierls-Nabarro
 barrière, 205
 fréquence, 247
 potentiel, 207, 248, 268
 phase (vitesse de), 10, 24, 33, 43, 57, 84, 120, 217
 phase incommensurable, 235
 phonon, 54, 83, 206, 217, 232, 289, 307
 plasma, 114
 onde, 113
 polaron, 297
 polyacétylène, 271
 polymères, 271
 pression sanguine (onde), 29
 problème/paradoxe
 de Fermi-Pasta-Ulam, viii, 187
 protéine, 301, 305

R

relation de dispersion, 10, 23, 33, 37, 43, 74, 81, 91, 101, 103, 120, 123, 128, 130, 139, 175, 207, 217, 260, 327, 344, 361
 réplication de l'ADN, 334
 Russell, 5

S

sech, 8
 self-trapping, 77, 329
 simulation numérique, 12, 26, 70, 158, 187, 264, 297, 322, 347
 soliton
 dark soliton, 106
 enveloppe, 71
 non topologique, 5
 pulse, 9–12, 19
 topologique, 39
 spectre
 continu, 142, 163, 166, 170, 181
 discret, 142, 163, 355
 spins, 254, 290

T

température, 56, 116, 211, 222, 232, 255, 285, 322, 335, 347
 théorème de Noether, 89
 théorie des bandes, 277
 thermodynamique, 222, 351
 transcription de l'ADN, 334
 transitions de phase, 232, 342, 352, 365
 tsunami, 13

U

Ulam, 189

V

variationnel(le), 85, 155, 286, 310, 320

Z

Zabusky, 195