PHYSIQUE

Michel PEYRARD - Thierry DAUXOIS

Physique des solitons

SAVOIRS ACTUELS

CNRS EDITIONS

EDP SCIENCES

Michel Peyrard et Thierry Dauxois

Physique des solitons

SAVOIRS ACTUELS

EDP Sciences/CNRS ÉDITIONS

Illustration de couverture : Collision de deux solitons de faible amplitude photographiée sur une plage de l'état d'Oregon sur la côte ouest des États-Unis (Photographie Terry Toedtemeier, 1978).

ISBN EDP Sciences 2-86883-732-8

ISBN CNRS Éditions 2-271-06267-5

Avant-propos

DEPUIS LA PREMIÈRE OBSERVATION d'un *soliton* par John Scott Russell en 1834, ces ondes solitaires à la stabilité exceptionnelle ont fasciné les scientifiques, d'abord en raison de leurs propriétés expérimentales très spectaculaires, de leur indéniable élégance, mais également à cause des propriétés mathématiques remarquables des systèmes intégrables ayant des solutions de type soliton. L'aspect mathématique a été privilégié dans la plupart des ouvrages consacrés aux solitons car il conduit à de très beaux développements théoriques comme par exemple la méthode d'inversion des données de diffusion qui permet de résoudre une équation *non linéaire* complexe par une série d'étapes qui sont toutes *linéaires* (cf. chap. 7).

Pourtant, au delà des aspects mathématiques, la *physique* des solitons est toute aussi intéressante et pertinente pour la recherche moderne. Ainsi, de nombreuses d'expériences sur la condensation de Bose-Einstein, objet du prix Nobel de Physique 2001, s'analysent à partir de l'équation de Schrödinger non linéaire, présentée au chapitre 3, qui est l'une des grandes équations de la théorie des solitons. Le prix Nobel de Chimie, attribué en 2000 à Heeger, MacDiarmid et Shirakawa doit encore plus aux solitons car les porteurs de charge dans les polymères conducteurs sont des solitons. Le chapitre 13 s'appuie sur un article de Su, Schrieffer et Heeger pour expliquer ces phénomènes.

Ainsi, la physique des solitons est un domaine actif de la recherche, auquel nous avons contribué, mais ce livre n'est cependant pas un ouvrage de recherche. Il se propose de présenter la physique des solitons de manière pédagogique, abordable par un étudiant en fin de licence ou début de master ayant seulement des connaissances de base en physique générale, en mécanique analytique et en mécanique quantique. Il est issu d'un cours donné d'abord par Michel Peyrard à l'université de Dijon puis sous une forme plus complète dans le cadre du DEA de Physique statistique et Phénomènes non linéaires de l'École Normale Supérieure de Lyon, et poursuivi maintenant par Thierry Dauxois dans le Master de Sciences de la matière de l'École Normale Supérieure de Lyon.

L'ouvrage n'a pas la prétention d'être exhaustif mais il est conçu de façon à donner néanmoins une vision assez complète du sujet. Les fondements sont introduits dans la partie I qui présente les grandes équations à solitons à partir d'exemples de la physique macroscopique. Les méthodes théoriques sont présentées dans la partie II. Le choix des développements dans ce domaine a été effectué en pensant aux situations physiques comme le montrent les applications présentées dans les parties III et IV consacrées à des problèmes de la physique des solides ou des macromolécules biologiques. La modélisation, qui est l'étape qui permet de passer du système physique aux équations non linéaires qui le décrivent, est illustrée tout au long de l'ouvrage, mais aussi discutée dans un chapitre spécifique (chap. 4) car c'est un point difficile et particulièrement important.

L'approche en terme de solitons permet de renouveler en profondeur le point de vue sur certains problèmes physiques. Nous montrons ainsi comment les solitons peuvent être utilisés pour traiter la physique statistique des ferroélectriques (chap. 10) ou d'un modèle pour l'ADN (chap. 15). La bibliographie contient de nombreuses références d'articles qui devraient permettre au lecteur qui le souhaite d'aller plus loin et de trouver les éléments pour aborder la recherche sur la physique des solitons. Enfin, nous avons souhaité inclure quelques éléments biographiques sur les principaux fondateurs de ce domaine car, comme le disait le philosophe Whitehead au début du XX^{e} siècle, « une science qui refuse de se souvenir de ses fondateurs est condamnée ».

L'ouvrage a mûri au fil des années de cours et de travaux dirigés, mais il doit aussi beaucoup à tous ceux qui en ont fait une relecture critique, en particulier Geneviève Peyrard qui a fait de multiples remarques pertinentes. Plusieurs collègues, Mariette Barthès, Freddy Bouchet, Hervé Courtois, Jacques Dauxois, Sébastien Dusuel, Jean-Noël Gence, Ioannis Kourakis, Juan Mazo, Guy Millot, Jean-Pierre Nguenang, Sébastien Paulin, Hicham Qasmi, Florence Raynal, Yves-Henri Sanéjouand, ont examiné plus particulièrement les chapitres proches de leur domaine de recherche. Nous remercions également Larissa Brizhik, Lincoln D. Carr, Thierry Cretegny, Bernard Deconinck, Chris Eilbeck, Ying Li, Robert I. Odom, Sylvian R. Ray, Harvey Segur, Terry Toedtemeier, Nadezhda Tsypkina, Kathleen T. Zanotti de nous avoir autorisés à utiliser certaines photographies ou pour des informations complémentaires. Nous tenons enfin à remercier tout spécialement Martin D. Kruskal et Norman J. Zabusky de nous avoir fourni des éléments sur les débuts de l'histoire des « solitons ».

Février 2004,

Michel Peyrard, Thierry Dauxois.

Table des matières

Introduction

Le XIX^e SIÈCLE et la première moitié du XX^e siècle ont marqué le triomphe de la *physique linéaire*, d'abord à travers les équations de Maxwell, puis avec la mécanique quantique dont tout le formalisme repose sur la linéarité associée au principe de superposition. Les outils mathématiques de la physique étaient eux-mêmes fondamentalement des outils linéaires comme la transformée de Fourier, la théorie de la réponse linéaire, les approches perturbatives, etc.

Bien entendu, les physiciens avaient identifié l'importance des phénomènes non linéaires qui apparaissaient dans les équations de Navier-Stokes de l'hydrodynamique, la théorie de la gravitation, les effets collectifs associés aux interactions entre particules en physique des solides, etc. Mais, dans la plupart des cas, on cherchait à éviter les non linéarités ou à les traiter comme des perturbations des théories linéaires.

En revanche, pendant les quarante dernières années, l'importance du *traitement intrinsèque* des non linéarités a été de mieux en mieux perçue et a conduit à deux concepts réellement révolutionnaires par rapport aux idées antérieures, l'attracteur étrange et le soliton.

Ces deux concepts correspondent à deux propriétés étonnantes des systèmes non linéaires, qui semblent contradictoires. L'attracteur étrange est associé à la notion de *chaos* dans un système régi par des équations déterministes. On le rencontre même dans des systèmes à faible nombre de degrés de liberté, que l'on aurait pu croire « simples ». Au contraire, le soliton concerne des systèmes à grand nombre de degrés de liberté. *A priori* il semble que l'addition de nouveaux degrés de liberté devrait compliquer le comportement, et pourtant ce n'est pas toujours le cas. Des *structures spatiales cohérentes* peuvent apparaître grâce à des effets collectifs et conduire au contraire à une *auto organisation*. La compréhension de la coexistence entre structures cohérentes et chaos dans les systèmes non linéaires est encore une question ouverte.

Le soliton est une *onde solitaire* c'est-à-dire localisée spatialement, dont les propriétés de stabilité sont spectaculaires. Dès sa première observation [135] en 1834 par un ingénieur hydrodynamicien, John Scott Russell, il a suscité passion et débats. J.S. Russell a été tellement fasciné par cette observation inattendue qu'il a consacré dix années de sa vie à étudier le phénomène, tandis que les théories, fondées sur des approches linéarisées, montraient ... que le soliton ne pouvait pas exister. Le soliton a une histoire à éclipses puisqu'après l'observation de 1834, il a fallu attendre 1895 pour qu'une théorie [85] puisse en rendre compte grâce à l'équation obtenue par Korteweg et de Vries. Puis le phénomène a été oublié jusqu'à ce qu'une expérience numérique [55], faite par Fermi, Pasta et Ulam en 1953 sur un des premiers ordinateurs à Los Alamos, révèle un phénomène étonnant. Un réseau unidimensionnel de particules couplées par un potentiel non linéaire n'atteignait pas toujours l'équilibre thermodynamique comme on le pensait. L'énergie injectée initialement dans un mode commençait, comme prévu, à se distribuer vers les autres modes, mais elle revenait ensuite pratiquement intégralement vers le mode excité initialement. Ce n'est que dix ans plus tard que l'explication a été donnée par Zabusky et Kruskal [160] ; elle fait intervenir les solitons comme nous le verrons dans ce livre. C'est ce travail qui, en 1965, a introduit le terme de *soliton*. Ce n'est pas un hasard si ce nom fait penser à celui d'une particule. Le soliton est une onde, mais il correspond aussi à un maximum localisé dans la densité d'énergie du système, qui se propage en conservant sa forme et sa vitesse, comme le ferait une particule. On dispose ainsi d'une solution d'une équation de champ *classique* qui possède à la fois les propriétés d'une quasi-particule et celles d'une onde. On trouve là des caractéristiques que l'on n'attend que dans les systèmes quantiques. L'analogie peut être poussée plus loin puisqu'on peut même mettre en évidence un effet tunnel pour les solitons [114].

Le travail de Zabusky et Kruskal a constitué un véritable tournant dans l'histoire des solitons qui, à partir de cette date, sont restés sur le devant de la scène et ont donné lieu à d'innombrables travaux, aussi bien sur le plan mathématique que sur le plan physique.

Les équations à solitons, au sens mathématique du terme, fournissent des exemples remarquables de systèmes totalement intégrables possédant un nombre infini de degrés de liberté. C'est la raison pour laquelle elles ont tant intéressé les mathématiciens, au point que beaucoup d'ouvrages sur les solitons sont fortement orientés vers les aspects mathématiques de la théorie.

Pourtant les solitons concernent aussi les physiciens et ils sont même devenus indispensables pour décrire des phénomènes tels que la propagation de certaines ondes en hydrodynamique, les ondes localisées dans les plasmas astrophysiques, la propagation de signaux dans les fibres optiques, ou des aspects beaucoup plus microscopiques comme les phénomènes de transport de charge dans les polymères conducteurs, les modes localisés dans des cristaux magnétiques, la dynamique de macromolécules biologiques comme l'ADN et les protéines par exemple. Bien entendu, tous ces systèmes ne sont décrits qu'approximativement par les équations de la théorie des solitons. On parle alors de quasi-solitons. Mais la caractéristique remarquable des solitons est qu'ils sont exceptionnellement stables vis-à-vis des perturbations. Ils sont en outre capables de se former spontanément dans un système physique auquel on fournit de l'énergie, par exemple sous forme thermique, par une onde électromagnétique ou une action mécanique, même si l'excitation initiale ne correspond pas exactement à un soliton. C'est cette propriété qui fait tout l'intérêt des solitons en physique car, si un système possède des caractéristiques permettant l'existence de solitons, et nous verrons que c'est le cas pour beaucoup d'entre eux, il existe alors une très forte chance qu'une excitation intense conduise à leur formation.

Les solitons fournissent souvent une approche fructueuse pour décrire la physique d'un système non linéaire. Au lieu de faire une approximation linéaire, puis de traiter les non linéarités comme une perturbation, il peut être beaucoup plus efficace de décrire approximativement la physique du système par une équation à solitons puis, si nécessaire, de tenir compte des contributions qui perturbent les solitons.

L'objet de cet ouvrage est de traiter la *physique des solitons* en montrant comment ce concept intervient dans de nombreux domaines grâce à un parcours en trois étapes.

La première partie présente les grandes classes d'équations à solitons à partir de situations tirées de la physique macroscopique. Dans chaque cas nous partons d'un exemple où l'observation directe des solitons est facile et nous montrons comment les équations physiques conduisent à des équations de champ non linéaires ayant des solutions solitons. Cette partie permet de comprendre les principales propriétés des solitons et les caractéristiques qu'un système physique doit présenter pour permettre leur existence. Le dernier chapitre de cette première étape discute plus en détails la modélisation en termes de solitons en s'appuyant sur la physique des plasmas. Il montre en particulier comment *un* système donné peut être décrit par *plusieurs* types d'équations à solitons, selon les conditions dans lesquelles on le place.

La deuxième partie introduit quelques méthodes mathématiques pour l'étude des solitons. Bien que les aspects mathématiques ne soient pas l'objectif principal de l'ouvrage, ces méthodes sont importantes pour les applications physiques car le système auquel on s'intéresse n'est jamais décrit exactement par une équation à solitons. Il faut donc pouvoir évaluer et étudier l'influence des termes que l'on a négligés quand on a proposé une description par une équation à solitons. Cette partie présente des techniques qui sont rarement introduites dans les ouvrages traitant de la théorie mathématique des solitons car elles concernent justement des systèmes qui ne sont pas exactement décrits par une équation à solitons. Le physicien a aussi besoin de savoir comment évolue dans le temps une condition initiale appliquée à un système. Pour répondre à cette question on peut faire appel à une méthode mathématique très élégante, la méthode d'inversion des données de diffusion, qui parvient à réduire la recherche de la solution d'une équation non linéaire à une séquence d'opérations linéaires. Nous présentons une introduction à cette méthode.

La dernière étape, constituée des troisième et quatrième parties de l'ouvrage, est consacrée à la physique microscopique – physique des solides ou physique des molécules biologiques – où les descriptions en termes de solitons ont permis de traiter de nombreux problèmes. À cette échelle on ne « voit » plus directement les solitons, mais on les détecte par leur influence sur les propriétés du système. Outre le passage des équations physiques aux équations à solitons, comme dans la première partie, il faut donc aussi discuter les méthodes d'observation des solitons. De plus, à ce niveau, les fluctuations thermiques ne sont plus négligeables. Elles peuvent interagir avec les solitons dont il faut étudier la dynamique dans un système qui n'est plus au repos. Par ailleurs, les solitons eux-mêmes interviennent directement dans les propriétés thermodynamiques du système que leur présence peut modifier. Nous verrons aussi, par exemple dans les ferroélectriques ou dans le cas de l'ADN, que le concept de soliton est très puissant pour étudier théoriquement la thermodynamique de certains systèmes.

La beauté de la science du non linéaire se situe sans doute dans les liens qu'elle tisse entre différents domaines qui partagent une description mathématique commune. Cette généralité n'est pas sans rappeler celle de la thermodynamique puisque dans les deux cas c'est la structure mathématique abstraite (qui dérive bien sûr des symétries et des lois de la physique) qui est cruciale. Cet ouvrage montre comment quelques équations fondamentales permettent de traiter des systèmes physiques extrêmement variés, du macroscopique au microscopique, unifiant ainsi des domaines que l'on considère souvent comme totalement différents tels que l'hydrodynamique et la dynamique des macromolécules biologiques.

Bien entendu, il reste encore de nombreuses questions ouvertes dans la physique des systèmes non linéaires et les concepts que nous introduisons ici sont en train de pénétrer dans des domaines très différents tels que la biologie, la sociologie, l'économie, l'épidémiologie, l'écologie, etc. Nous espérons que cet ouvrage donnera au lecteur l'envie de s'aventurer dans l'exploration de ces questions ouvertes, en gardant à l'esprit l'étonnante capacité de nombreux systèmes à créer des structures spatiales cohérentes d'une remarquable stabilité qui peuvent influencer profondément leurs propriétés.

Première partie

Les différentes classes de solitons