PHYSIQUE CHIMIE

MP - MP*

MÉTHODES ET EXERCICES

OLIVIER FIAT

PHYSIQUE CHIMIE

MP - MP*

MÉTHODES ET EXERCICES

DUNOD

Avec la collaboration scientifique de Pierre-Emmanuel Leroy

Conception graphique de la couverture : Hokus Pokus Créations

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-077550-7

Table des matières

Avant-propos

Présentation générale.

Cet ouvrage de la collection Méthodes et exercices traite de l'intégralité du programme de physique et de chimie des filières MP et MP*. Chacun des 18 chapitres est divisé en quatre parties (le chapitre 19 est un formulaire de mathématiques).

Les méthodes à retenir : chaque chapitre commence par plusieurs fiches structurées avec des rappels de cours synthétiques, des méthodes de raisonnement ou de calcul, un exemple complet et un renvoi aux exercices concernés.

Énoncés des exercices : des énoncés d'exercices d'application du cours et de nombreux exercices inspirés d'écrits et d'oraux de concours sont proposés. Ils sont affectés d'un niveau de difficulté, de 1 à 4.

Du mal à démarrer ? : des indications de méthode ou de calcul sont données à l'image de celles qui seraient données en colle ou à l'oral des concours.

Corrigés des exercices : les solutions détaillées sont entièrement rédigées.

Conseils de travail.

Nous vous encourageons à adopter une discipline de travail rigoureuse. Vous ne devez jamais oublier que c'est en faisant qu'on apprend. Lire un énoncé puis son corrigé est absolument contre-productif, et même si vous avez l'impression de « tout comprendre » (ce qui est flatteur pour le rédacteur de la solution !) vous n'apprendrez presque rien, et surtout vous ne retiendrez rien. Un exercice est fait pour être cherché, longuement, avec application, puis rédigé complètement, applications numériques, commentaires et conclusions compris. Si vous ne trouvez pas la réponse, cherchez encore. Si vous ne trouvez toujours pas, reportez-vous à la fiche méthode et réessayez en profitant des rappels et conseils qui y sont donnés. Si vous ne trouvez toujours pas, reportez-vous à l'aide donnée dans la rubrique « Du mal à démarrer ? ». Si vous n'avez que partiellement trouvé, laissez-vous un peu de temps encore, une nuit de repos, et cherchez encore le lendemain, c'est souvent profitable. Enfin, vous pouvez consulter le corrigé, sans oublier qu'avoir réellement compris une solution, c'est être capable, une heure, une semaine ou un an après, de la restituer.

À propos du choix d'exercices.

Les exercices ont été choisis pour couvrir tout le programme et tous les styles : certains sont calculatoires, d'autres plus qualitatifs, d'autres encore à forte composante documentaire (c'est alors mentionné dans le titre) avec une volonté dans cet ouvrage de proposer beaucoup de lectures graphiques (schémas, diagrammes, cartes de champ, de potentiel). Certains exercices, qui demandent une initiative particulière de modélisation, de choix d'hypothèses, d'organisation du raisonnement, sont estampillés « résolution de problème ».

Quelques données plus techniques.	• Les grandeurs complexes sont soulignées, les grandeurs vectorielles surmontées d'une flèche, les vecteurs unitaires notés $\vec{u}$. • L'imaginaire pur est noté i en électromagnétisme dans l'étude des ondes et en physique qauntique, et j dans les chapitres d'électricité pour éviter la confusion avec l'intensité. • Nous avons délibérément omis de fournir les lois d'analyse vectorielle dans le corps des exercices, afin d'éviter de donner ainsi une indication trop précise. Nous avons ainsi respecté la convention de l'écrit des concours, où la liste des formules utiles est toujours donnée avant ou après l'énoncé. • Un formulaire de mathématiques utiles à la physique est proposé à la fin de l'ouvrage. • Il en est de même pour les formules de trigonométrie et les éléments différentiels de longueur, de surface et de volume pour les intégrales spatiales. • Un index complet est proposé à la toute fin de ce livre.
En guise de conclusion.	Nous espérons que cet ouvrage vous aidera à réussir le mieux possible les épreuves de physique des concours et nous vous souhaitons bon courage pour votre travail.

Première partie

Mécanique

CHAPITRE 1

Référentiels non galiléens

Thèmes abordés dans les exercices

- Référentiel galiléen.
- Composition des vitesses et des accélérations.
- Point coïncident.
- Vitesse d'entraînement, vitesse relative.
- Accélération d'entraînement, accélération relative, accélération de Coriolis.
- Loi de la quantité de mouvement en référentiel non galiléen.
- Force d'inertie d'entraînement (référentiel en translation).
- Force d'inertie d'entraînement (référentiel en rotation uniforme).
- Force d'inertie de Coriolis.
- Champ de pesanteur.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Exprimer et exploiter les lois de composition des vitesses et des accélérations.
- Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en translation.
- Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en rotation uniforme.
- Étudier le mouvement d'un point dans le référentiel terrestre.

Les méthodes à retenir

Exprimer et exploiter les lois de composition des vitesses et des accélérations.

Soit $\mathscr{R}_0$ un référentiel muni d'un point fixe O_0 (il sera galiléen dans l'étude mécanique des paragraphes suivants), $\mathscr{R}$ un référentiel en mouvement par rapport à $\mathscr{R}_0$ muni d'un point fixe O et M un point matériel. La **loi de composition des vitesses** donne la relation entre la vitesse absolue de M dans $\mathscr{R}_0$ et sa vitesse relative dans $\mathscr{R}$

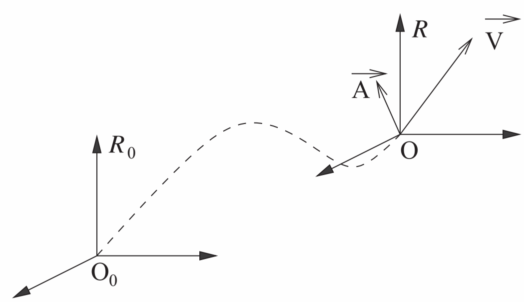
$$\vec{v}_a = \vec{v}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{M}) = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{O_0M}}}{dt}\right)_{\mathscr{R}_0} \quad \text{et } \vec{v}_r = \vec{v}_{\mathscr{R}}(\mathrm{M}) = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\right)_{\mathscr{R}}$$

La **loi de composition des accélérations** donne la relation entre l'accélération absolue de M dans $\mathscr{R}_0$ et son accélération relative dans $\mathscr{R}$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{M}) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{O_0M}}}{dt^2}\right)_{\mathscr{R}_0} \quad \text{et } \vec{a}_r = \vec{a}_{\mathscr{R}}(\mathrm{M}) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2}\right)_{\mathscr{R}}$$

Seuls deux cas précis sont au programme.

a) $\mathscr{R}$ est en **translation** par rapport à $\mathscr{R}_0$ à la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e = \vec{\mathrm{V}}$, vitesse de O dans $\mathscr{R}_0$ et d'accélération d'entraînement $\vec{a}_e = \vec{\mathrm{A}}$, accélération de O dans $\mathscr{R}_0$.

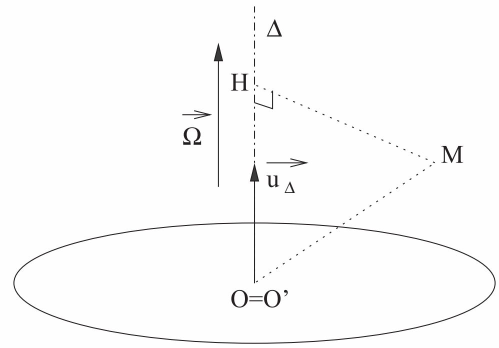


Les lois de composition s'écrivent alors

$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \\ \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \vec{v}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{M}) = \vec{\mathrm{V}} + \vec{v}_{\mathscr{R}}(\mathrm{M}) \\ \vec{a}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{M}) = \vec{\mathrm{A}} + \vec{a}_{\mathscr{R}}(\mathrm{M}) \end{cases}$$

Le sens physique de ces lois est assez simple. Quand on se déplace dans un train en translation, notre vitesse dans le référentiel terrestre est la somme de la vitesse du point du train où nous posons le pied, c'est-à-dire la vitesse du train car il est en translation, et de notre vitesse par rapport au train. Il en est de même pour les accélérations.

b) $\mathscr{R}$ est en **rotation uniforme autour d'un axe fixe** Δ **de** $\mathscr{R}_0$, à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_\Delta$. Le **point coïncident** de M à la date t est le point fixe P de $\mathscr{R}$ par lequel passe M. On note H le projeté orthogonal de M sur Δ.



$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{P}) + \vec{v}_r \\ \vec{a}_a = \vec{a}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{P}) + \vec{a}_\mathrm{C} + \vec{a}_r \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} \vec{v}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{M}) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \vec{v}_{\mathscr{R}}(\mathrm{M}) \\ \vec{a}_{\mathscr{R}_0}(\mathrm{M}) = -\Omega^2 \overrightarrow{\mathrm{HM}} + 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{HM}} + \vec{a}_{\mathscr{R}}(\mathrm{M}) \end{cases}$$

Le terme

$$\vec{a}_e = -\Omega^2 \overrightarrow{\mathrm{HM}}$$

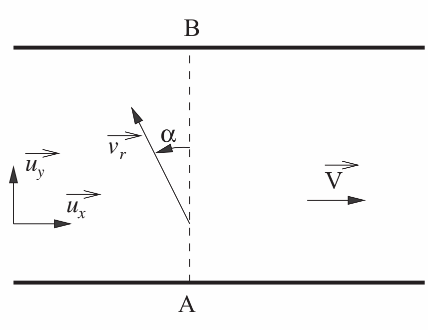
est l'accélération d'entraînement centripète de P, cohérente avec son mouvement circulaire uniforme autour de H. Le terme

$$\vec{a}_\mathrm{C} = 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{HM}}$$

est l'**accélération de Coriolis**, son sens physique est assez complexe et dans une approche pragmatique, on peut dire qu'il n'a pas d'intérêt immédiat pour la réussite aux concours.

Exemple :

Une rivière forme un référentiel $\mathscr{R}$ en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{\mathrm{V}} = \mathrm{V}\vec{u}_x$ dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}_0$. Un bateau à moteur M de vitesse maximale $v_{\max}$ veut traverser la rivière selon l'axe $\vec{u}_y$ perpendiculaire à la rivière dans le référentiel terrestre. Pour celà, il doit naviguer à une vitesse $\vec{v}_r$ dans le référentiel de la rivière faisant un angle α avec $\vec{u}_y$.



La loi de composition des vitesses donne

$$\vec{v}_a = \vec{V} + \vec{v}_r \text{ soit } v_a \vec{u}_y = V\vec{u}_x - v_r \sin\alpha \vec{u}_x + v_r \cos\alpha \vec{u}_y$$

$$\text{donc } \begin{cases} v_r \sin\alpha = V \\ v_a = v_r \cos\alpha \end{cases}$$

Le problème n'est donc possible que si $v_r > V$, donc $v_{\max} > V$. En effet, dans le cas contraire, même à pleine vitesse, le bateau ne peut remonter le courant et dérive par rapport à [AB]. Si cette condition est vérifiée, alors

$$v_r = \frac{V}{\sin\alpha} \text{ et } v_a = \frac{V}{\tan\alpha}$$

⟶ **Exercice 1.1.**

Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en translation.

Soit $\mathscr{R}_0$ un référentiel galiléen et $\mathscr{R}$ un référentiel en translation par rapport à $\mathscr{R}_0$ à la vitesse d'entraînement $\vec{V}$ et avec l'accélération d'entraînement $\vec{A}$ par rapport à $\mathscr{R}_0$. O est un point fixe de $\mathscr{R}$. Un point matériel M de masse m est étudié dans le référentiel $\mathscr{R}$, ses vecteurs position, vitesse relative et accélération relative sont

$$\overrightarrow{OM},\ \vec{v}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathscr{R}} \text{ et } \vec{a}_r = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\mathscr{R}}$$

La loi de la quantité de mouvement dans le référentiel non galiléen $\mathscr{R}$ est analogue à celle énoncée dans un référentiel galiléen, à condition d'ajouter au forces la **force d'inertie d'entraînement**

$$\sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} = m\vec{a}_r \text{ avec } \vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{A}$$

La confusion entre l'accélération du référentiel $\vec{A}$ et celle de M dans le référentiel est une faute rédhibitoire. Nous préconisons la méthode suivante pour l'étude rigoureuse d'un problème de mécanique du point dans un référentiel non galiléen en translation.

a) On définit le référentiel d'étude et on précise qu'il est « non galiléen en translation ».
b) On fait un schéma.
c) On définit le repère de projection cartésien ou cylindrique.
d) On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs de cinématique

$$\overrightarrow{OM},\ \vec{v}_r,\ \vec{a}_r \text{ et } \vec{A}$$

et on identifie les conditions initiales sur ces vecteurs.

e) On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs forces réelles et de la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{f} \text{ et } \vec{f}_{ie} = -m\vec{A}$$

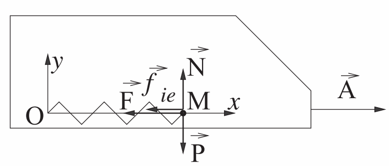
f) On en déduit par projections sur les axes du repère un ensemble d'équations différentielles dont la résolution est un problème de mathématiques.
La **loi du moment cinétique** est elle aussi inchangée, le moment en O de la force d'inertie d'entraînement est le même que pour toute autre force

$$\mathcal{M}_O(\vec{f}_{ie}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ie}$$

La **loi de l'énergie mécanique** peut être appliquée en définissant l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement (voir exercice 1.3) mais celle-ci n'est pas au programme.

Exemple :

Un pendule élastique est formé d'un ressort de constante de raideur k, de longueur à vide ℓ_0 et d'un point matériel M de masse m coulissant sur un axe (O, x) horizontal en étant soumis à un frottement visqueux $\vec{f}_v = -h\vec{v}$. Ce dispositif est embarqué dans un train en accélération uniforme horizontale constante $\overrightarrow{A} = A\vec{u}_x$. On note $x(t)$ l'abscisse de M.
a) Le référentiel d'étude est le référentiel non galiléen du train en translation.
b) Voici le schéma du dispositif et des forces (à l'exception de la force de frottement).



c) Le repère de projection est $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.
d) Les vecteurs cinématiques sont

$$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x \\ 0 \end{array}\right., \ \vec{v}_r\left|\begin{array}{l} \dot{x} \\ 0 \end{array}\right., \ \vec{a}_r\left|\begin{array}{l} \ddot{x} \\ 0 \end{array}\right. \text{ et } \vec{A}\left|\begin{array}{l} A \\ 0 \end{array}\right.$$

e) Les vecteurs forces sont

$$\vec{F}\left|\begin{array}{l} -k(x-\ell_0) \\ 0 \end{array}\right. \quad \vec{f}_f\left|\begin{array}{l} -h\dot{x} \\ 0 \end{array}\right. \quad \vec{f}_{ie}\left|\begin{array}{l} -mA \\ 0 \end{array}\right. \quad \vec{P}\left|\begin{array}{l} 0 \\ -mg \end{array}\right. \quad \vec{N}\left|\begin{array}{l} 0 \\ N \end{array}\right.$$

f) Voici les projections sur les deux axes

$$\begin{cases} -k(x-\ell_0) - h\dot{x} - m\mathrm{A} = m\ddot{x} \\ -mg + \mathrm{N} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = k\left(\ell_0 - \frac{m\mathrm{A}}{k}\right) \\ \mathrm{N} = mg \end{cases}$$

L'équation différentielle vérifiée par x est celle d'un oscillateur amorti, l'abscisse d'équilibre est $x_{\mathrm{eq}} = \ell_0 - \frac{m\mathrm{A}}{k}$, le régime (pseudo-périodique, critique, apériodique) dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation homogène $\Delta = h^2 - 4km$.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.2, 1.3, 1.4, 1.5.**

Étudier le mouvement d'un point dans un référentiel en rotation uniforme.

Soit $\mathscr{R}_0$ un référentiel galiléen et $\mathscr{R}$ un référentiel en rotation uniforme par rapport à un axe Δ fixe de $\mathscr{R}_0$ passant par O, à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_\Delta$. Un point matériel M de masse m est étudié dans le référentiel $\mathscr{R}$, ses vecteurs position, vitesse relative et accélération relative sont

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}},\ \vec{v}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}\right)_{\mathscr{R}} \text{ et } \vec{a}_r = \left(\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2}\right)_{\mathscr{R}}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe Δ. La loi de la quantité de mouvement dans le référentiel non galiléen $\mathscr{R}$ est analogue à celle énoncée dans un référentiel galiléen, à condition d'ajouter au forces la **force d'inertie d'entraînement** et la **force d'inertie de Coriolis**

$$\sum \vec{f} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m\vec{a}_r \text{ avec } \begin{cases} \vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\Omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}} \\ \vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_{\mathrm{C}} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r \end{cases}$$

La force d'inertie d'entraînement est dite **axifuge** (ce terme est préférable au terme usuel « centriguge ») car elle tend à faire fuir M de l'axe (et non pas du centre O). Nous préconisons la méthode suivante pour l'étude rigoureuse d'un problème de mécanique du point dans un référentiel non galiléen en rotation.

a) On définit le référentiel d'étude et on précise qu'il est « non galiléen en rotation ».

b) On fait un schéma.

c) On définit le repère de projection cartésien ou cylindrique.

d) On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs de cinématique $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$, $\vec{v}_r$, $\vec{a}_r$ et $\vec{\Omega}$ et on identifie les conditions initiales sur ces vecteurs.

e) On écrit dans la base choisie les composantes des vecteurs forces réelles, de la force d'inertie d'entraînement et de la force d'inertie de Coriolis.

$$\vec{f},\ \vec{f}_{ie} = m\Omega^2\overrightarrow{\mathrm{HM}}, \vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r$$

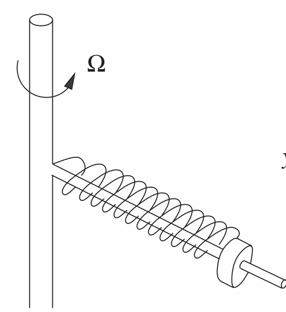
f) On en déduit par projections sur les axes du repère un ensemble d'équations différentielles dont la résolution est un problème de mathématiques.
La **loi du moment cinétique** est elle aussi inchangée, le moment en O des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont les mêmes que pour toute autre force

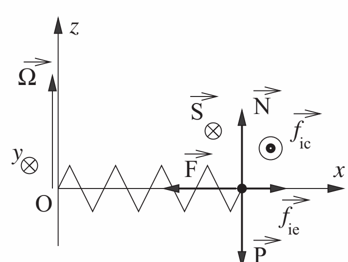
$$\mathcal{M}_O(\vec{f}_{ie}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ie} \text{ et } \mathcal{M}_O(\vec{f}_{ic}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_{ic}$$

La **loi de l'énergie mécanique** peut être appliquée en remarquant que la force d'inertie de Coriolis, orthogonale au vecteur vitesse relative, ne travaille pas et en définissant l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement (voir exercice 1.7) mais celle-ci n'est pas au programme.

Exemple :

Un point matériel coulisse sans frottement sur une tige horizontale (O, x) animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe vertical (O, z) à la vitesse angulaire Ω. Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k a une extrémité fixe en O et son autre extrémité reliée à M. On note $x(t)$ l'abscisse de M sur l'axe.
a) On travaille dans le référentiel non galiléen en rotation de la tige. Dans celui-ci, la masse a un mouvement rectiligne.
b) Voici le schéma du dispositif.





c) On travaille dans le repère cartésien (O, x, y, z).
d) Voici les composantes des vecteurs cinématiques.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{HM} = \left| \begin{array}{l} x \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad \vec{v}_r \left| \begin{array}{l} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad \vec{a}_r \left| \begin{array}{l} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad \vec{\Omega} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{array} \right.$$

e) Voici les composantes du poids et de la force de rappel du ressort.

$$\vec{P}\left|\begin{array}{l}0\\0\\-mg\end{array}\right. \qquad \vec{F}\left|\begin{array}{l}-k(x-\ell_0)\\0\\0\end{array}\right.$$

En l'absence de frottements, l'action de la tige sur M est orthogonale à la tige, c'est donc la somme d'une force normale verticale $\vec{N}$ qui compense le poids et d'une force normale horizontale $\vec{S}$ qui compense la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{N}\left|\begin{array}{l}0\\0\\N\end{array}\right. \qquad \vec{S}\left|\begin{array}{l}0\\S\\0\end{array}\right.$$

Les forces d'inertie s'écrivent

$$\vec{f}_{ie} = m\Omega^2\overrightarrow{HM} = m\Omega^2 x\vec{u}_x \text{ et}$$

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r = \left|\begin{array}{l}0\\-2m\Omega\dot{x}\\0\end{array}\right.$$

f) La loi de la quantité de mouvement s'écrit

$$\vec{P}+\vec{F}+\vec{N}+\vec{S}+\vec{f}_{ie}+\vec{f}_{ic} = m\vec{a}_r \text{ donc}$$

$$\left\{\begin{array}{l}-k(x-\ell_0)+m\Omega^2 x = m\ddot{x}\\ S-2m\Omega\dot{x}=0\\ N-mg=0\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l}\ddot{x}+\omega_0^2\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)x = \omega_0^2\ell_0\\ S=2m\Omega\dot{x}\\ N=mg\end{array}\right.$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, pulsation propre de l'oscillateur élastique en référentiel galiléen. Deux cas sont possibles.

• Si $\Omega < \omega_0$, le coefficient de x est positif et l'équation différentielle en x est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}$$

• Si $\Omega > \omega_0$, le coefficient de x est négatif et l'équation différentielle en x est celle d'un oscillateur hyperbolique, dont la solution diverge quand $t\to\infty$. La force d'inertie axifuge est trop forte pour être compensée par la force de rappel du ressort et la masse s'éloigne indéfiniment, jusqu'à la limite élastique du ressort.

$\hookrightarrow$ **Exercices 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13.**

Étudier le mouvement d'un point dans le référentiel terrestre.

Le **référentiel géocentrique** est galiléen en bonne approximation. Le **référentiel terrestre** est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles, à la vitesse angulaire

$$\Omega = \frac{2\pi}{T_s} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$T_s = 86\ 164$ s est le jour sidéral. Le référentiel terrestre n'est donc pas galiléen. On doit donc prendre en compte la force d'inertie d'entraînement axifuge et la force d'inertie de Coriolis pour les points matériels évoluant à proximité de la surface terrestre.

a) Le **poids** est la somme de la force de gravitation dirigée vers le centre de la Terre et de la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{P} = \vec{f}_g + \vec{f}_{ie} = -\frac{\mathcal{G} m_T m}{R_T^2}\vec{u}_r + m\Omega^2\overrightarrow{HM}$$

$$\text{soit } \vec{P} = m\vec{g} \text{ avec } \vec{g} = -\frac{\mathcal{G} m_T}{R_T^2}\vec{u}_r + \Omega^2\overrightarrow{HM}$$

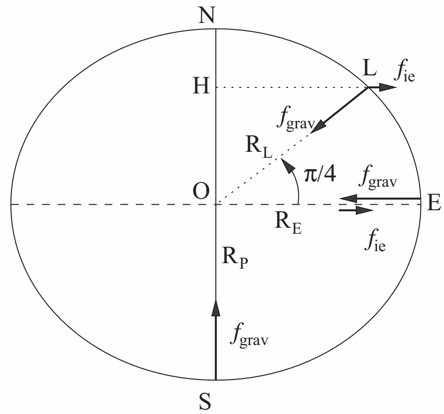
b) La force d'inertie de Coriolis n'a d'effet significatif que pour les objets dont la vitesse est grande (plus de 50 ou 100 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) ou sur des durées importantes (plus d'une heure)

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

où $\vec{v}_r$ est la vitesse relative, donc mesurée dans le référentiel terrestre. Comme les axes du repère d'étude sont en général définis par rapport à l'horizontale et à la verticale du lieu du laboratoire, il faut au préalable projeter le vecteur $\vec{\Omega}$ (qui est selon l'axe sud-nord des pôles) dans ce repère, en utilisant l'angle λ appelé latitude.

Exemple :

Le rayon terrestre au pôle sud est $R_P = 6\ 357$ km et en un point de l'équateur $R_E = 6\ 378$ km. La constante de gravitation est $\mathcal{G} = 6,674 \cdot 10^{-11}\ \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ et la masse de la Terre est $m_T = 5,972 \cdot 10^{24}$ kg. La ville de Limoges est presque sur le 45ième parallèle et le rayon terrestre y vaut $R_L = 6\,371$ km. Évaluons le champ de pesanteur en ces trois points.



• Au pôle sud, on est sur l'axe de rotation, donc la force d'inertie d'entraînement axifuge est nulle et le poids est égal à la force de gravitation, soit

$$g_S = \frac{\mathcal{G} m_T}{R_P^2} = 9,863 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

• Sur l'équateur, la force d'inertie d'entraînement axifuge est verticale vers le haut donc

$$g_E = \frac{\mathcal{G} m_T}{R_E^2} - \Omega^2 R_E = 9,798 - 0,034 = 9,755 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

• À Limoges, la force de gravitation est dirigée vers le centre de la Terre et a pour norme $f_{grav} = \frac{\mathcal{G} m_T m}{R_L^2} = 9,8195 \cdot m$. Le rayon du cercle décrit par Limoges lorsque la Terre tourne est $HL = R_L \cos\frac{\pi}{4} = 4\,504$ km. La force d'inertie d'entraînement axifuge a donc pour norme

$$f_{ie} = m\Omega^2 HL = 0,024 \cdot m$$

La somme vectorielle des deux vecteurs donne un vecteur qui est dirigé vers un point de l'axe des pôles un peu plus au sud que le centre de la Terre. On en déduit la norme

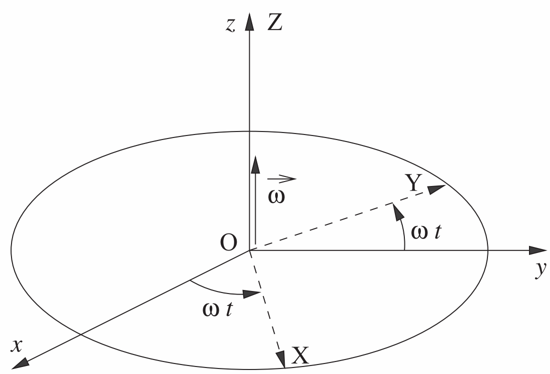
$$g_L = \sqrt{\left(9,8195 - 0,024\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(0,024\sin\frac{\pi}{4}\right)^2} = 9,803 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

↪ **Exercices 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, 1.20.**

Énoncés des exercices

1.1 Composition des vitesses, des accélérations

Un manège est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$. À la date $t = 0$, $\theta = 0$ et l'axe (O,X) dessiné sur le plateau coïncide avec l'axe (O, x) du sol, l'axe (O,Y) dessiné sur le plateau coïncide avec l'axe (O, y) du sol, et les axes verticaux (O,Z) et (O, z) sont confondus.



Un promeneur, initialement en O, marche sur le plateau du manège à la vitesse relative constante $\vec{v}_r = v_0 \vec{u}_X$ dans le référentiel du manège. On exprimera tous les vecteurs dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

a) Déterminer les coordonnées de ses vecteurs vitesse relative et d'entraînement à la date t. En déduire celles du vecteur vitesse absolue.

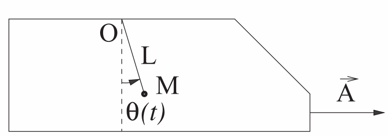
b) Déterminer les coordonnées de ses vecteurs accélération relative, d'entraînement et de Coriolis à la date t.

c) Établir les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement du promeneur.

d) Vérifier les lois cinématiques de composition des vitesses et des accélérations en retrouvant les coordonnées de $\vec{v}_a$ et $\vec{a}_a$.

1.2 Étude d'un pendule simple dans un référentiel en translation

Un pendule simple est formé d'un fil inextensible de masse nulle et de longueur L, et d'un point matériel M de masse m. Son extrémité O est accrochée au plafond d'un train en accélération uniforme horizontale constante $\vec{A} = A\vec{u}_x$. L'angle d'inclinaison du fil est notée $\theta(t)$.



a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant la loi de la quantité de mouvement.

b) Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant la loi du moment cinétique en O.

c) Déterminer l'angle d'équilibre θ_{eq}.

d) On étudie les petites oscillations autour de la position d'équilibre en posant

$$\theta(t) = \theta_{eq} + \varepsilon(t) \text{ avec } \varepsilon(t) \ll 1$$

Établir l'équation différentielle vérifiée par $\varepsilon(t)$ et en déduire la période T des petites oscillations.

1.3 Introduction à l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement

Un référentiel $\mathscr{R}$ est en translation rectiligne d'accélération constante $\vec{A} = A\vec{u}_x$ par rapport à un référentiel galiléen $\mathscr{R}_0$. Un point matériel de masse m est répéré par $\vec{OM} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ dans $\mathscr{R}$.

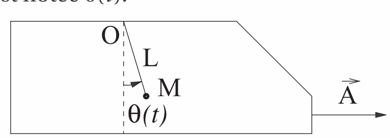
a) Donner l'expression de la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie}$ subie par M dans $\mathscr{R}$.

b) Cette force dérive de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement Ep_{ie} avec

$$\vec{f}_{ie} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, Ep_{ie} = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial Ep_{ie}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Ep_{ie}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Ep_{ie}}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Déterminer l'expression de Ep_{ie} en prenant la référence en $x = 0$.

c) Un pendule simple est formé d'un fil inextensible de masse nulle et de longueur L, et d'un point matériel M de masse m. Son extrémité O est accrochée au plafond d'un train en accélération uniforme horizontale constante $\vec{A} = A\vec{u}_x$. L'angle d'inclinaison du fil est notée $\theta(t)$.



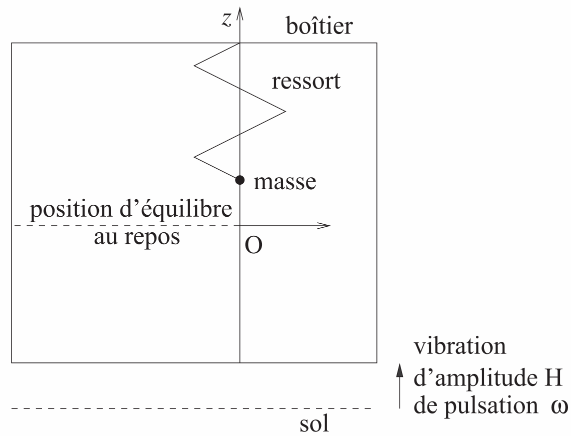
i) Donner l'expression de l'énergie potentielle résultante des différentes forces conservatives en fonction de θ.

ii) Déterminer la valeur de l'angle d'équilibre θ_{eq} grâce à l'étude de l'énergie potentielle.

iii) Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en écrivant la conservation de l'énergie mécanique.

1.4 Sismographe

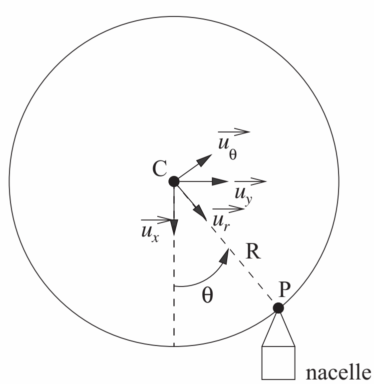
Un sismographe est constitué d'un boîtier parallélépipédique posé à même le sol, et qui bouge avec lui. Un ressort de masse négligeable, de longueur à vide ℓ_0, de constante de raideur k, est accroché au couvercle supérieur. Un mobile ponctuel M, de masse m, y est accroché et coulisse sur un axe vertical en subissant une force de frottement fluide linéaire, de coefficient λ. On repère la position de M par sa cote mesurée sur un axe vertical (O, z) dirigé vers le haut, l'origine O étant un point fixe du boîtier correspondant à la position d'équilibre au repos du mobile. Lors d'un séisme, le sol a un mouvement d'oscillation verticale dans le référentiel terrestre supposé galiléen : le boîtier a un mouvement sinusoïdal d'amplitude H et de pulsation ω.

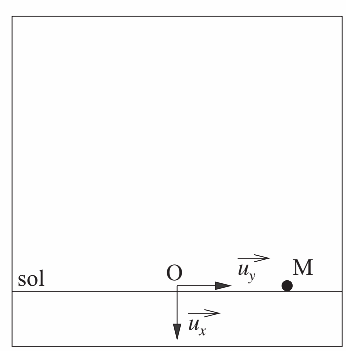


Établir l'équation différentielle vérifiée par z et en déduire l'amplitude des oscillations de la masse en fonction de ω. Conclure sur la fonction du sismographe.

1.5 Mouvement dans une nacelle de grande roue

Une nacelle dans une grande roue est une cabine restant toujours horizontale, dont l'extrémité supérieure P est animée d'un mouvement circulaire uniforme de centre C, de rayon R à la vitesse angulaire Ω. On repère la position de la capsule par l'angle $\theta = \Omega t$ entre la verticale et $\overrightarrow{CP}$.





nacelle
(vue agrandie)

On travaillera successivement dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et on donne

$$\vec{u}_r = \cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y \text{ et } \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y$$

a) Le vecteur position de P dans le référentiel terrestre galiléen $\mathscr{R}_0$ est $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$. Déterminer son vecteur vitesse $\vec{\mathrm{V}}$ et son vecteur accélération $\vec{\mathrm{A}}$ dans $\mathscr{R}_0$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ puis dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ en fonction de t (on rappelle que $\theta = \Omega t$ où Ω est une constante).

b) Le référentiel $\mathscr{R}$ de la nacelle est-il galiléen ou pas ?

c) Est-il en rotation ou en translation ?

d) Un mobile M de masse m est posé sur le sol de la nacelle où il glisse. Sa position est donc repérée par $\vec{\mathrm{OM}} = y\vec{u}_y$. Écrire la loi de la quantité de mouvement appliquée à M dans le référentiel $\mathscr{R}$ en supposant qu'en plus des forces réelles et d'inertie, il subit une force de frottement $-\alpha\vec{v}$.

e) À quelle condition sur R, Ω et g M ne décolle-t-il jamais ?

f) Écrire dans ce cas l'équation différentielle vérifiée par y.

g) Donner l'expression de l'amplitude Y_0 des oscillations de M en régime sinusoïdal forcé.

1.6

Expulsion centrifuge

Sur une tige rectiligne horizontale OE de longueur L, définissant l'axe (O, x), un point matériel M de masse m coulisse sans frottement. Cette tige est reliée à un arbre vertical (O, z) qui l'entraîne dans un mouvement de rotation uniforme de vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

b) Résoudre cette équation en prenant comme condition initiale à $t = 0$: $x = 0$ et $\dot{x} = v_0$.

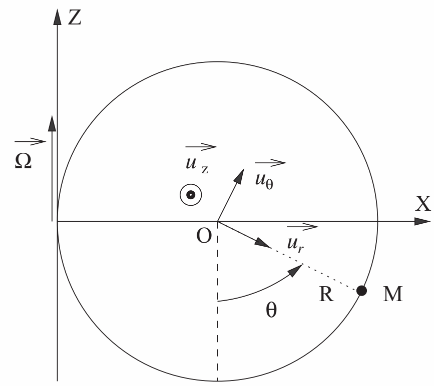
c) En déduire la date t_f à laquelle M quitte la tige en $x = \mathrm{L}$ (on pourra utiliser l'inconnue auxiliaire $\mathrm{E} = e^{\Omega t}$) et la vitesse $\dot{x}$ à cette date.

1.7

Bague coulissant sur un cerceau en rotation

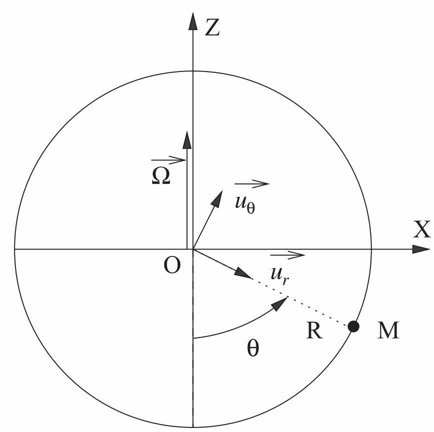
Un point matériel M de masse m s'apparente à une bague qui coulisse sans frottement sur le pourtour d'un cerceau de centre O et de rayon R.

a) Le cerceau tourne autour d'une de ses tangentes verticales formant l'axe Z, à la vitesse angulaire Ω. On pose $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$ et on travaille dans le référentiel non galiléen en rotation du cerceau.



Établir l'équation différentielle vérifiée par θ : $R\ddot{\theta} = -g\sin\theta + R\Omega^2(1+\sin\theta)\cos\theta$. Décrire comment on pourraît déterminer la ou les position(s) d'équilibre puis étudier les petites oscillations autour de celle(s)-ci.

b) Le cerceau tourne autour d'un de ses diamètres verticaux formant l'axe (O,Z), à la vitesse angulaire Ω. On pose $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$ et on travaille dans le référentiel non galiléen en rotation du cerceau.



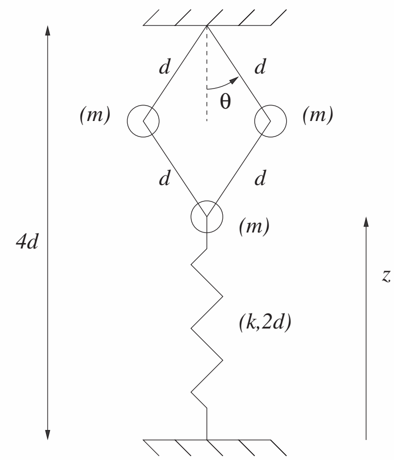
i) Dans le référentiel en rotation, on note H le projeté orthogonal de M et on pose $\overrightarrow{HM} = \rho\vec{u}_\rho$. Donner l'expression de la force d'inertie d'entraînement subie par M.

ii) Cette force dérive de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement Ep_{ie} avec $\vec{f}_{ie} = -\frac{dEp_{ie}}{d\rho}\vec{u}_\rho$. En déduire Ep_{ie} en prenant la référence sur l'axe en $\rho = 0$.

iii) Déterminer les angles correspondant à l'équilibre et discuter leur stabilité selon la valeur de Ω.

1.8 Régulateur à boules

Dans le dispositif suivant, les diverses tiges ont une longueur d et une masse négligeable. Les trois billes ont une masse m. Le resort a une constante de raideur k et une longueur à vide $2d$. Le système tourne à vitesse angulaire constante Ω.



On admet l'expression de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement :

$$\mathrm{E}p_{ie} = -\frac{1}{2} m\Omega^2 \mathrm{HM}^2$$

où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe. Déterminer la ou les valeurs de θ à l'équilibre.

1.9 Oscillations en étoile

Un mobile M de masse m est accroché au bout d'un fil inextensible de longueur L et dont l'extrémité supérieure est fixe en haut d'un mât, lui-même solidaire d'un plateau tournant à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$. Les oscillations du pendule sont de très petite amplitude et on peut supposer que M reste dans le plan horizontal (H, x, y) ; on travaillera donc dans la base cylindrique $(\mathrm{H}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ dans le référentiel en rotation.