Marianne Freiberger
Rachel Thomas

Dans le secret des nombres

Traduit de l'anglais
par Martine Lemonnier

EKHO

L'édition originale de cet ouvrage a été publiée en anglais
en 2014 par Quercus Editions Ltd (UK) sous le titre
Numericon.

Numericon, first edition was originally published in English
in 2014 by Quercus Editions Ldt (UK).

Couverture : Delphine Dupuy

11 rue Paul Bert 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-078168-3

Prologue

L'humanité ne peut s'empêcher d'explorer. Nous nous demandons sans cesse ce qu'il y a au coin de la rue, de l'autre côté de la colline ou au-delà de l'horizon. C'est vrai pour les grands aventuriers, mais aussi pour tout un chacun lorsqu'il découvre un lieu nouveau. Dans cet esprit d'exploration, nous aimerions vous convier à un voyage vers une contrée passionnante, bien connue de certains mais étrangère à beaucoup. Nous vous montrerons nos endroits préférés, des paysages spectaculaires, des panoramas magnifiques et des trésors précieux. Nous vous raconterons des histoires de vaillants héros, de mystères déconcertants et de brillantes conquêtes. En route pour une visite guidée à travers le monde des maths !

Il peut sembler difficile d'y pénétrer, mais ne soyez pas intimidé : symboles et équations ne sont qu'un autre langage, un code traduisant de belles idées qui, bien souvent, trouvent d'étonnantes applications dans notre monde ordinaire. Nous le traduirons pour vous tout en vous guidant vers de grands monuments mathématiques, mais aussi vers quelques criques isolées et quelques plages exotiques que nous avons découvertes lors de nos propres voyages. Nous aurons pour guides ces aimables ambassadeurs des maths que nous fréquentons chaque jour : les nombres. Chaque nombre nous invitera à faire halte, profiter du paysage et explorer les environs sur des chemins que nous avons eu plaisir nous-mêmes à découvrir.

De même qu'on peut aimer un endroit pour de multiples raisons – les paysages, la météo, les gens, la cuisine, la culture –, de même les maths peuvent nous attirer par toutes sortes d'aspects. Beaucoup les aiment pour leur beauté. De fait, de nombreux mathématiciens ne se satisfont pleinement de leur travail que lorsqu'il est empreint d'une certaine élégance, de grâce et de simplicité. D'autres apprécient ce que le physicien Eugene Wigner a appelé leur « déraisonnable efficacité » – leur pouvoir étonnant d'expliquer le monde dans lequel nous vivons. Cela peut survenir longtemps après qu'un résultat mathématique a été découvert, et c'est souvent bien caché. Les maths sont le langage que parlent toutes les sciences, et elles nous mènent jusqu'aux frontières de la connaissance, du fonctionnement de l'Univers à celui de notre esprit, qui leur a d'ailleurs donné naissance…

En tant que rédactrices en chef de *Plus* (www.plus.maths.org), un magazine en ligne dont le but est d'offrir une ouverture vers le monde des maths, nous avons eu le privilège d'explorer largement ce monde et de rencontrer quelques-uns des étonnants (et parfois excentriques) personnages qui le construisent. Nous allons donc vous faire visiter nos lieux mathématiques favoris mais aussi vous raconter l'histoire des personnes et des cultures qui les ont créés. Drôles, bizarres, dramatiques, ces histoires valent qu'on les connaisse pour elles-mêmes. Et de même que l'on apprécie mieux un illustre monument si l'on sait quel architecte l'a bâti et pourquoi, ces histoires nous aideront à bien mieux comprendre les nobles édifices mathématiques que nous allons découvrir.

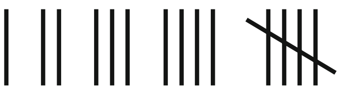
Notre but dans ce livre est de faire ce que nous aimons le plus : vous montrer la beauté des maths dans toute leur gloire, tout en vous racontant les histoires qui les sous-tendent. Vous avez probablement entendu parler de la plupart de nos destinations, mais certaines seront peut-être nouvelles et il se peut que nous vous surprenions çà et là. Bon voyage…

0

Partir de rien pour arriver à quelque chose

Au début il n'y avait rien. Ou plutôt si, au début il y a toujours eu quelque chose : des haricots, du gibier abondant, des batailles victorieuses… Pendant des millénaires l'humanité a utilisé les maths pour décrire des choses – en les comptant, les mesurant, les partageant. On était encore loin du symbole mathématique pour « rien », le zéro.

Des choses qui comptent

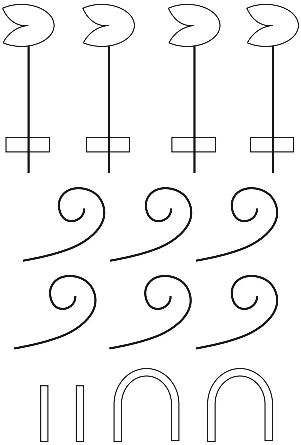


Il est très probable que les premiers hommes comptaient sur leurs doigts, comme nous le faisons tous en apprenant à compter. (C'est bien pratique d'avoir ces trucs au bout des bras, bien au chaud sous votre peau de bête.) Parmi les premières preuves de notre usage des nombres sont les *os d'Ishango*, découverts en République démocratique du Congo (ex-Zaïre) et vieux de 20 000 ans. On pense qu'il s'agit de bâtons de comptage. C'est très astucieux de dessiner des bâtons pour tenir le compte de quantités qui augmentent, que ce soit le score d'un jeu ou les jours de captivité qu'un prisonnier grave sur le mur de sa cellule. Notre façon actuelle de procéder est très proche de celle des premiers hommes – des bâtons regroupés par cinq, comme les doigts de la main. On trace les quatre premiers individuellement et on les barre avec le cinquième, ce qui fait un ensemble. Un ensemble facile à manipuler, qui évoque les cinq doigts d'une main.

Quant à savoir comment s'appelaient ces quantités, si tant est qu'elles aient eu un nom, c'est une autre histoire. Aujourd'hui encore, certaines cultures, comme les Pirahãs ou les Mundurukus en Amazonie, ont des noms pour les petites quantités mais disent seulement « beaucoup » pour les plus grandes.

Cependant, au fil des siècles, presque toutes les cultures ont inventé des noms et des symboles pour les chiffres, ainsi que des méthodes pour les combiner afin de pouvoir écrire n'importe quel nombre. Dans des tombeaux égyptiens remontant à plus de 5 000 ans (3000 av. J.-C.), on peut admirer de magnifiques hiéroglyphes en forme de rouleaux de corde, de fleurs de lotus et de grenouilles qui représentent les nombres 100, 1 000 et 100 000. Ces symboles sont répétés autant de fois que nécessaire pour représenter un nombre : certains nombres ont besoin de très nombreux symboles.

Les anciens Grecs construisaient les nombres de façon similaire, à partir de lettres de leur alphabet – par exemple α pour 1, β pour 2, γ pour 3, κ pour 20, τ pour 300. Les Romains écrivaient les leurs en combinant des symboles comme I pour 1, V pour 5, X pour 10, L pour 50, C pour 100, D pour 500 et M pour 1 000. En général, on obtenait les nombres en additionnant les valeurs des symboles ; par exemple XII valait 12. Mais on utilisait aussi la soustraction ; ainsi IV valait 5 – 1 = 4. On se sert toujours de ce système pour les noms de rois et de reines (Louis XIV,



Le nombre 4 622 en chiffres égyptiens

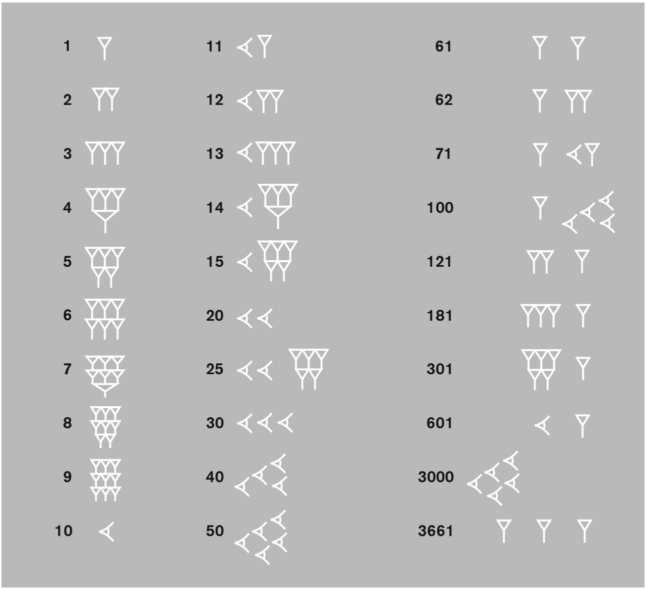
Élisabeth II), mais aussi pour les dates à la fin des génériques de films et de programmes télé.

Mais un nombre, quels que soient les chiffres servant à l'écrire, n'est qu'un nom, un symbole pour désigner une quantité d'objets. Le nombre 3 a toujours le même sens, qu'il soit écrit en bâtons, en hiéroglyphes ou encore en chiffres grecs ou romains. Parmi les premières abstractions mathématiques dont nous sommes capables intuitivement, il y a la compréhension que tout ensemble de un objet représente le nombre un, tout ensemble de deux objets représente le nombre deux, tout ensemble de trois objets représente le nombre trois. Le nombre des objets que nous comptons est indépendant de leur nature, qu'il s'agisse de chèvres ou de choux.

L'addition !

Aucun des systèmes que nous venons de voir n'avait de symbole pour l'ensemble ne contenant aucun objet – ce n'était tout simplement pas nécessaire. Et tous ces systèmes sont *additifs* : pour trouver la valeur d'un nombre, il suffit d'additionner les valeurs des symboles (ou des blocs de symboles). Il peut y avoir une convention pour l'ordre des symboles (par exemple du plus grand au plus petit de gauche à droite) mais, en général, il n'y a aucune ambiguïté car lire le nombre revient à additionner ses composants. (Par exemple, le nombre romain MCMLXXIV se compose de quatre blocs : M + CM + LXX + IV, c'est-à-dire 1 000 + 900 + 70 + 4 = 1 974.) Tout cela est bel et bon, mais bonjour les ennuis si vous avez affaire à de grands nombres ou que vous vous lancez dans des additions compliquées.

Par exemple, si vous additionnez MCMLXXIV et XXXIX vous trouverez MMXIII. Mais ce sera beaucoup plus laborieux que d'ajouter 1 974 et 39 (qui font 2 013) avec nos chiffres modernes. C'est là qu'échouent les systèmes basés sur un simple dénombrement. Pour vraiment maîtriser les grands nombres et simplifier les calculs, il faut écrire les nombres de façon plus astucieuse. La clé d'un tel système est le zéro.



Quelques nombres babyloniens

Une position qui a de la valeur

Les Babyloniens (tels que nous les désignons actuellement de façon assez vague) vivaient en Mésopotamie entre le Tigre et l'Euphrate. Les anciens habitants de la Mésopotamie, les Sumériens, utilisèrent dès 3000 av. J.-C. des tablettes d'argile tendre pour noter des nombres à l'aide de stylets taillés en pointe. Cette façon d'écrire les nombres a donné naissance à un système de numération utilisant deux symboles en forme de coin pour représenter tous les nombres de 1 à 59.

Mais au lieu de continuer ainsi, en inventant toujours de nouveaux symboles et de nouveaux arrangements, il y a environ 4 000 ans, les Babyloniens firent un progrès génial : ils inventèrent le concept de *valeur de position*, aboutissant à un système très proche du nôtre. Les chiffres sont écrits en ligne et la *valeur* de chacun dépend de sa *position* dans la ligne.

Illustrons cela avec notre propre système de numération. Dans le nombre 4 622, le chiffre 4 n'a plus rien à voir avec la valeur 4. Il nous indique que notre nombre contient exactement 4 multiples de 1 000. De même, le 6 nous dit qu'il y a 6 multiples de 100. Et les deux 2 représentent des valeurs différentes : celui de gauche indique qu'il y a 2 multiples de 10 et le dernier, qu'il y a 2 multiples de 1. Qu'y a-t-il de commun entre les valeurs de position 1 000, 100, 10 et 1 ? Ce sont toutes des puissances de 10, des nombres obtenus en multipliant 10 par lui-même un certain nombre de fois :

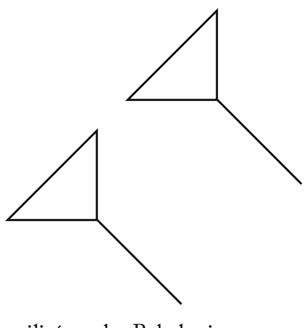
$$1\,000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$$
$$100 = 10 \times 10 = 10^2$$
$$10 = 10^1$$
$$1 = 10^0 \text{ (par convention)}$$

Le système babylonien fonctionnait de la même façon sauf que, au lieu de puissances de 10 il utilisait des puissances de 60. Dans un nombre, chaque chiffre indiquait par sa position le nombre de multiples de 1, 60, 60^2 (= 3 600), etc., que contenait le nombre.

Quelque chose pour rien

Le système de numération positionnel était une avancée énorme. Il devint possible d'écrire de très grands nombres sans avoir à inventer de nouveaux symboles à mesure que l'on progressait dans les ordres de grandeur. Les grandes additions se simplifièrent : du seul fait de la façon dont les nombres étaient écrits, une partie du travail était déjà effectuée. Si un nombre contenait 3 multiples de 60 et qu'un autre en contenait 4, leur somme en contiendrait forcément 7, et il ne restait plus qu'à inscrire ce chiffre à l'endroit des multiples de 60. Le seul problème surgissait lorsque les multiples de 60 dans la somme dépassaient 60^2. Pour le résoudre, il suffisait de reporter des chiffres vers la place située à gauche, comme nous le faisons avec nos retenues.

Mais il y avait un hic. Que faire lorsqu'un nombre ne possédait pas de multiple de 60, de 60^2 ou de toute autre puissance de 60 ? Par exemple, le nombre $3\,601 = 60^2 + 1$ n'a pas de multiple de 60 : que mettre à cet emplacement ? Au début, les Babyloniens laissaient un espace mais c'était bien trop ambigu : espace volontaire ou hoquet du copiste ? Il semble que les Babyloniens se soient accommodés de cette ambiguïté grâce à leur connaissance intuitive des ordres de grandeur des nombres qu'ils manipulaient. Mais ce qu'il leur fallait, c'était un *marqueur de position* pour séparer les puissances de 60.



Le symbole utilisé par les Babyloniens comme marqueur de position pour séparer les puissances de 60

Ce symbole, composé de deux coins inclinés, commença à apparaître vers 300 av. J.-C. À chaque fois qu'il apparaissait, on savait qu'à cet endroit il manquait une puissance de 60. Ce nouveau système plus sophistiqué permit aux mathématiques babyloniennes de prendre leur essor. On pouvait désormais faire des calculs complexes, ce qui permit d'établir des tables astronomiques extrêmement précises.

Le système positionnel fut réinventé au moins deux fois avant les prémices du nôtre : par les Chinois à partir d'environ 300 av. J.-C. et par les Mayas. La culture maya remonte à 2000 av. J.-C. mais son apogée se situe vers 500 de notre ère. Ces deux systèmes engendrèrent également un symbole marqueur de position. Le zéro avait commencé sa marche inexorable.

Rien, c'est quelque chose

Cependant, aucune de ces cultures ne semble avoir compris que son marqueur de position – son zéro – était aussi un nombre à part entière. C'est d'Inde que vint cette connaissance, avec le système que nous employons aujourd'hui. Dès 500, les Indiens utilisèrent ce système à base 10 et fondé sur les valeurs de position. En 499, dans son livre *Aryabhatiya*, le mathématicien et astronome Aryabhata en donnait cette belle définition :

> *D'une place à l'autre, chacun est dix fois le précédent.*

Les Indiens appelaient le zéro *s' ūnya*, ce qui en sanskrit signifie « vide ». En 870, on le vit pour la première fois représenté par un petit rond, qui évolua ensuite jusqu'à son aspect actuel.

Mais, surtout, les Indiens traitaient zéro comme un nombre à part entière, que l'on peut utiliser dans des calculs et qui peut même surgir comme résultat d'un problème.

Dans son livre *Brahmasphutasiddhanta*, publié vers 628, le mathématicien et astronome Brahmagupta énonça des règles d'arithmétique. Ce faisant, il cerna le « néant » qu'est zéro, du moins en arithmétique. Nous pouvons le formuler ainsi :

Quand zéro est ajouté à un nombre ou soustrait d'un nombre, ce nombre ne change pas :

$$b + 0 = 0 + b = b,\ b - 0 = b.$$

Cela rend zéro unique parmi les nombres : aucun autre nombre ne laisse ses partenaires en addition (ou en soustraction) aussi indifférents. En effet, supposons qu'un autre tel nombre existe et appelons-le u (pour « unique »).

Puisqu'on peut ajouter u à n'importe quel nombre sans le modifier, on a

$$0 = 0 + u.$$

Et comme on peut aussi ajouter 0 à n'importe quel nombre sans le modifier, on a d'autre part

$$0 + u = u.$$

Il s'ensuit que

$$0 = 0 + u = u.$$

u était donc égal à 0 depuis le début !

Remarquons que nous venons de faire notre première démonstration mathématique : un raisonnement qui montre, sans aucun doute possible, que quelque chose est vrai. Le concept de démonstration est aux mathématiques ce que les poissons sont à la mer : nous aurons encore bien des occasions de le rencontrer.

Une autre règle attribuée à Brahmagupta énonce le comportement de zéro lors d'une multiplication :

Zéro multiplié par n'importe quel nombre donne zéro.

Ce petit nombre, si discret dans l'addition, engloutit tout sur son passage si on le multiplie.

Et qu'en est-il de la division ? Qu'est-ce que 5 divisé par 0, ou 0 divisé par 0 ? Ces questions, bien plus complexes qu'il n'y paraît, firent germer de nouvelles mathématiques des siècles plus tard. Quant à Brahmagupta, s'il se montra circonspect sur la première question il affirma en revanche de façon catégorique que 0 divisé par 0 (donc $\frac{0}{0}$) était égal à 0. Bien sûr, nous savons qu'il avait tort. Mais un autre mathématicien indien, Bhaskara II, s'attaqua avec plus de succès à cette épineuse question.

Amour paternel

Bhaskara II, qui vécut au XII^e^ siècle, est considéré par beaucoup comme le plus grand mathématicien et astronome de l'Inde médiévale. Pourtant sa principale contribution aux maths semble découler de ce que nous considérons aujourd'hui comme l'âme damnée de l'astronomie : l'astrologie. Selon la légende, Bhaskara consulta l'horoscope de sa fille bien-aimée et découvrit avec horreur qu'elle resterait célibataire et sans enfant. Refusant de se plier à ce verdict, Bhaskara détermina un moment propice pour le mariage. Et pour être absolument certain de ne pas manquer ce moment, il construisit une horloge à eau. Mais la jeune fille, qui répondait au doux nom de Lilavati, ne put réfréner sa curiosité. Tandis qu'elle examinait l'horloge de près, une perle de sa robe de mariée y tomba. Elle bloqua le trou par lequel l'eau s'écoulait, empêchant le moment propice de jamais survenir. Plus de mariage ! Pour la consoler, son père désespéré lui promit d'écrire un livre qui porterait son nom, un livre qui durerait toujours. Heureusement pour elle, ce fut un livre de maths.

Le *Lilavati* n'est qu'une partie d'une œuvre plus vaste, appelée *Siddhānta*, ce qui en sanskrit veut dire « Diadème des traités ». Il traite de divers sujets mathématiques : on y trouve beaucoup d'arithmétique, mais aussi de la géométrie et de l'algèbre. Certaines questions s'adressent directement à Lilavati « aux yeux de faon », et beaucoup avec une poésie à rendre rêveurs nos auteurs de manuels :

> *D'un essaim d'abeilles la racine carrée de la moitié s'est envolée dans un buisson de jasmin. Les huit neuvièmes de l'essaim les ont rejointes, et une abeille femelle, restée en arrière, bourdonne autour d'un mâle qui bruisse dans une fleur de lotus. Durant la nuit, attiré par la suave odeur de la fleur, il s'est introduit en elle et maintenant il est piégé. Dites-moi, ravissante dame, quel est le nombre d'abeilles.*

Si vous n'arrivez pas à calculer la réponse, vous la trouverez page suivante.

Solution du problème des abeilles dans le *Lilavati*

Soit x le nombre d'abeilles. On a $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x$, ce qui après quelques manipulations donne $\frac{1}{81}x^2 - \frac{17}{18}x + 4 = 0$ et finalement $x = 72$.

Dans le *Lilavati*, Bhaskara donne des règles de calcul avec zéro, dont une qui semble affirmer, pour tout nombre a, $\frac{a \times 0}{0} = \frac{0}{0} = a$.

Cela semble suggérer que $\frac{0}{0}$ peut être n'importe quoi – n'importe quel nombre a, au choix. Nous y reviendrons. Mais la grande idée de Bhaskara apparaît dans un de ses livres moins connus, le *Vija-Ganita*, où il s'intéresse à $\frac{a}{0}$:

> *D'autant que le diviseur est diminué, le quotient est accru. Quand le diviseur est réduit à l'extrême (c'est-à-dire zéro), le quotient est aussi accru à l'extrême (infini). Effectuons le quotient qu'est la fraction $\frac{3}{0}$. Cette fraction dont le dénominateur est [zéro] s'appelle une quantité infinie. Dans cette quantité (…) il n'y a aucune altération, nonobstant que beaucoup puissent y être insérées ou extraites ; de même aucun changement n'a lieu dans le Dieu infini et immuable.*

Donc, d'après lui, le résultat de la division par zéro est l'infini, un nombre qu'il identifie à un Dieu immuable, puisque l'infini reste inchangé, quoi qu'on lui ajoute ou qu'on lui retranche. Les mathématiciens modernes ne sont pas d'accord avec cette idée, mais il est facile de comprendre comment Bhaskara y est parvenu. Si vous divisez un segment en tronçons de plus en plus petits, le nombre de tronçons devient de plus en plus grand. Plus la longueur des tronçons approche de zéro, plus leur nombre approche, eh bien, de… l'infini.

Tout en haut ou tout en bas ?

En temps normal, la division se comporte de façon sagement continue. Si je divise 1 par une succession de nombres de plus en plus proches de 2, le résultat sera de plus en plus proche de $\frac{1}{2} = 0,5$:

$$\frac{1}{1,9} = 0,5263\ldots$$

$$\frac{1}{1{,}99} = 0{,}5025\ldots$$

$$\frac{1}{1{,}999} = 0{,}5003\ldots$$

et ainsi de suite. De même, si nous divisons 1 par des quantités qui s'approchent de plus en plus de zéro, nous obtenons :

$$\frac{1}{0{,}001} = 1\,000$$

$$\frac{1}{0{,}0001} = 10\,000$$

$$\frac{1}{0{,}00001} = 100\,000$$

$$\frac{1}{0{,}000001} = 1\,000\,000.$$

Cela semble augmenter continûment et s'approcher, *tendre* vers l'infini, ce qui suggère bien que n'importe quel nombre divisé par 0 donne l'infini.

Hélas, ce n'est pas si simple. Imaginez le nombre 0 tel qu'il apparaît sur un thermomètre, avec au-dessus les températures positives et au-dessous les négatives. Si nous y marquons les nombres successifs par lesquels nous venons de diviser 1, nous les verrons descendre de plus en plus près du zéro, par le côté positif. Mais nous aurions tout aussi bien pu diviser 1 par des nombres négatifs de plus en plus proches de zéro, montant vers zéro par le côté négatif, par exemple – 0,001, – 0,0001, – 0,00001, – 0,000001 et ainsi de suite. Diviser un nombre positif (ici 1) par un nombre négatif donne un résultat négatif ; nous obtenons donc maintenant :

$$\frac{1}{-0{,}001} = -1\,000$$

$$\frac{1}{-0{,}0001} = -10\,000$$

$$\frac{1}{-0{,}00001} = -100\,000$$

$$\frac{1}{-0{,}000001} = -1\,000\,000.$$

Nous nous approchons à nouveau de l'infini, mais de l'autre côté ! Au lieu de grimper le long du thermomètre, nous dégringolons de plus en plus bas. Moins l'infini, cela existe-t-il ? Et dans ce cas, est-ce différent de plus l'infini ? Voilà des questions complexes. Contentons-nous de dire que les mathématiciens modernes ne se prononcent pas sur la division d'un nombre par 0 : ils se bornent à dire du résultat qu'il est *indéterminé*.

Vers la limite

Et maintenant qu'en est-il de 0 divisé par 0 ? Rien divisé par quelque chose, c'est toujours rien. Tout le monde est d'accord là-dessus, y compris Brahmagupta. Donc, en divisant zéro par une succession de nombres de plus en plus proches de lui, on obtiendra toujours 0 :

$$\frac{0}{0{,}1} = 0$$

$$\frac{0}{0{,}01} = 0$$

$$\frac{0}{0{,}001} = 0.$$

Il en sera de même si on le divise par les mêmes quantités, mais négatives cette fois :

$$\frac{0}{-0{,}1} = 0$$

$$\frac{0}{-0{,}01} = 0$$

$$\frac{0}{-0{,}001} = 0$$

et ainsi de suite. Donc, en accord avec Brahmagupta, nous pourrions être tentés de conclure que $\frac{0}{0} = 0$.

Mais, là encore, il y a un hic. Prenons deux suites de nombres, toutes deux s'approchant de plus en plus de zéro, par exemple

$$0{,}01 ; 0{,}001 ; 0{,}0001\ldots$$

et

$$0{,}02 ; 0{,}002 ; 0{,}0002\ldots$$

et divisons-les terme à terme. Nous obtenons :

$$\frac{0{,}02}{0{,}01} = 2$$

$$\frac{0{,}002}{0{,}001} = 2$$

$$\frac{0{,}0002}{0{,}0001} = 2$$

$$\frac{0{,}00002}{0{,}00001} = 2$$

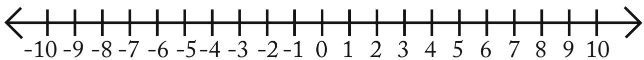
et ainsi de suite. Mais comme les deux suites de nombres, celle qui nous donne les nombres du haut et celle qui nous donne ceux du bas, tendent toutes deux vers 0, cela semble indiquer que $\frac{0}{0}$ doit être égal à 2. De la même façon, si j'avais divisé les nombres de la première suite par ceux de la seconde, j'aboutirais à la conclusion que $\frac{0}{0}$ vaut $\frac{1}{2}$! En fait, en choisissant bien les deux suites de nombres, on peut parvenir à la conclusion que n'importe quelle valeur est égale à $\frac{0}{0}$. C'est pourquoi les mathématiciens préfèrent ne pas se prononcer là-dessus non plus : la valeur de $\frac{0}{0}$ est officiellement indéterminée. Rien divisé par rien n'est pas de ce monde !

En dépit de ces difficultés, et grâce aux efforts de Bhaskara et de ses contemporains, nous trouvons tout naturel aujourd'hui d'utiliser zéro à la fois comme marqueur de position et comme un nombre en soi. Qui plus est, 0 est devenu encore plus précieux dans notre monde numérique. Mais pour découvrir le secret de l'information, il nous faut maintenant conjuguer les pouvoirs de zéro avec ceux du nombre 1.

1

Un, ça suffit

Reprenons : au début, il y avait 1. Et 1, ça suffit. Pensez à n'importe quel nombre qui vous sert à compter : 1, 2, 3, etc. Vous pouvez l'atteindre en additionnant des 1. Par exemple, 2 = 1 + 1, 4 = 1 + 1 + 1 + 1, 7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. C'est fastidieux mais facile. Imaginez que, pour chaque 1 ajouté, vous faites un pas le long d'une ligne droite. Alors les nombres naturels s'alignent sagement, régulièrement espacés d'un intervalle de longueur 1.



Ce concept de droite numérique est incroyablement utile. L'addition revient à avancer : pour ajouter 4 à 6 on part de 6 et on avance de 4 pas. Cela reviendrait au même de partir de 4 et de faire 6 pas, ce qui tombe bien car l'ordre importe peu pour l'addition – elle est *commutative*.

Soustraire, c'est reculer. 6 – 4 : reculez de 4 pas à partir de 6. Fastoche ! Et ça marche aussi avec les nombres négatifs. Reculer de 6 pas à partir de 0 donne – 6, et reculer de 8 pas à partir de 4 donne – 4. Donc 4 – 8 = – 4. Il revient au même d'avancer de 4 pas à partir de – 8, ce qui montre que 4 – 8 = – 8 + 4 = – 4. La soustraction, si on la considère comme une addition mettant en jeu un nombre négatif, est commutative elle aussi.

Même la multiplication s'incline devant les pouvoirs du 1 : 2×4 c'est, en partant de 0, avancer de quatre pas, deux fois, ou encore avancer de deux pas, quatre fois (la multiplication, comme l'addition, est bien élevée : elle est commutative). L'opération 2×-4 consiste à reculer de quatre pas, deux fois, ce qui donne -8, ou bien de deux pas, quatre fois, ce qui donne le même résultat. Donc $2 \times -4 = -2 \times 4 = -8$. Comme vous l'avez appris à l'école, « plus par plus donne plus » et « plus par moins donne moins ».

Il ne reste plus qu'un seul cas épineux : que donne « moins par moins » ? Cela donne plus, comme n'importe quel manuel de maths vous le dira, mais pourquoi ? Les profs disent souvent que c'est comme ça, une convention adoptée pour des questions de cohérence. Mais la droite numérique permet de mieux comprendre pourquoi ça marche. Le signe moins indique une inversion du sens. -2×3 signifie « reculer de 2 pas, trois fois », mais on peut aussi l'interpréter comme « faire 3 pas, deux fois, mais les faire vers l'arrière plutôt que vers l'avant ». Plus généralement, $-2 \times$ *n'importe quel nombre n* peut s'interpréter comme « faire *n* pas, deux fois, mais dans le sens opposé à celui qu'indique *n* ». Donc si le nombre *n* est négatif, par exemple dans le calcul de -2×-3, cela revient à faire 6 pas vers l'avant : $-2 \times -3 = 6$.

Allumé ou éteint ?

Donc nous pouvons vous emmener n'importe où avec les nombres entiers et leur arithmétique. Mais la vraie vie est un peu plus compliquée. Dans la vraie vie, il faut faire des choix et il y a toujours au moins deux options : gauche ou droite, thé ou café, chien ou chat… Pour les machines, il y a un choix particulièrement significatif : allumé ou éteint, que nous pouvons symboliser par 0 (éteint) et 1 (allumé). Or, il se trouve que ce choix, certes crucial, est le seul à faire : c'est un monde *binaire* qui régente nos vies numériques.

Pour voir comment, commençons par les nombres. Comme vous l'avez vu au chapitre 0, notre façon d'écrire les nombres se fonde sur deux ingrédients : les dix symboles de 0 à 9 et leur position dans le nombre, qui indique ce qu'ils signifient. Le 7 dans 7 325 signifie 7 × 1 000, le 3 représente 3 × 100, le 2, 2 × 10 et le 5, 5 × 1. Qu'ont donc de si particulier les nombres 10, 100, 1 000 et ainsi de suite ? Ce sont tous des puissances de 10 : $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1\,000 = 10^3$. Même 1, nous l'avons vu, est une puissance de 10 par convention : $1 = 10^0$. Notre système numérique est positionnel et *décimal*, sa base étant le nombre 10.

Mais ce choix du nombre 10 est arbitraire. Nous aurions pu tout aussi bien nous débrouiller avec deux symboles, 0 et 1, et travailler avec les puissances de 2. Le nombre 2, qui est égal à $1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, devient 10 en *notation binaire*. Le nombre 3, égal à $1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, s'écrit 11. Quant à 4, égal à $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, c'est 100 en binaire. Voici la transcription en binaire des nombres de zéro à dix :

0	zéro
1	un
10	deux
11	trois
100	quatre
101	cinq

110	six
111	sept
1000	huit
1001	neuf
1010	dix

On peut ainsi représenter tout nombre entier positif par une chaîne binaire de 0 et de 1. Et, pour les nombres négatifs, il suffit d'ajouter en tête de la chaîne un chiffre supplémentaire (cela peut se faire de différentes façons). Pour les nombres qui ne sont pas entiers, le jeu est le même mais en utilisant des puissances de $\frac{1}{2}$. Par exemple l'expression binaire 0,111 signifie $1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}875$ en décimal. Et l'expression binaire 11,01 signifie

$$1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 2 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + 1 + \frac{1}{4},$$

ce qui est équivalent à 3,25 en décimal.

N'importe quel nombre pouvant s'écrire sous forme décimale peut s'exprimer en utilisant uniquement des 0 et des 1. C'est d'ailleurs ainsi que les ordinateurs représentent les nombres.

Vrai ou faux ?

Mais si les ordinateurs ne s'occupaient que de nombres, ils ne seraient que des calculettes améliorées. Leur intérêt, c'est qu'ils sont capables d'accomplir des tâches complexes, vous permettant par exemple de réserver vos vacances – ou de faire en douce une partie de cartes sur votre smartphone pendant une réunion ennuyeuse. Et pourquoi savent-ils faire tout cela ? Parce qu'ils partent du principe que tout est toujours vrai ou faux. Dans la vie réelle, cela ne marche pas vraiment mais en maths, si (en général). C'est sur ce principe que le mathématicien anglais George Boole (1815-1864) a échafaudé tout un système de logique.

La *logique booléenne* repose sur l'idée que des énoncés (ou propositions) peuvent s'enchaîner les uns aux autres grâce à des opérateurs, des mots comme ET et OU. La véracité ou non d'un énoncé ainsi construit dépend de celle de ses composants. Par exemple, vous savez que l'énoncé « Jean marche vers moi » est vrai. Cela entraîne-t-il que l'énoncé « Jean marche vers moi ET Jean est mort » est vrai ? Non, évidemment. (Sauf, bien sûr, si Jean est un zombie. Dans ce cas, sauve qui peut !) Un énoncé *P* ET *Q* ne peut être vrai que si ses deux composants le sont. Un seul énoncé vrai ne suffit pas, et bien sûr les deux faux rendent l'énoncé global faux.

Cela se schématise à l'aide d'une *table de vérité* pour l'opérateur ET. Elle passe en revue toutes les combinaisons possibles de « Vrai » et de « Faux » pour les deux énoncés *P* et *Q*, et en déduit le résultat correspondant pour *P* ET *Q*.

P	***Q***	***P* ET *Q***
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Faux
Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

L'opérateur OU est beaucoup plus permissif. La proposition *P* OU *Q*, par exemple « Jean marche vers moi OU Jean est mort », est vraie dès que l'une des deux propositions qui la composent est vraie.

P	***Q***	***P* OU *Q***
Vrai	Vrai	Vrai
Vrai	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Faux

En plus de ET et OU, Boole avait aussi un opérateur NON, qui s'applique à un seul énoncé.

P	**NON *P***
Vrai	Faux
Faux	Vrai

Si la proposition « Jean marche vers moi » est vraie, il est clair que « Jean ne marche pas vers moi » est fausse. L'opérateur NON inverse simplement la valeur de vérité d'un énoncé.

Armé de ET, OU et NON, vous pouvez construire toutes sortes de propositions complexes, dont vous déterminerez la véracité en construisant patiemment leurs tables de vérité.

Les sommes logiques

Toutes ces histoires de tables de vérité sont bien compliquées et bien mornes. Heureusement, nous pouvons les simplifier en les transformant en problèmes de maths. Boole remarqua très astucieusement que les opérations de logique binaire ressemblent à s'y méprendre à de bonnes vieilles opérations arithmétiques, à quelques détails près.

Tout d'abord, les variables de notre nouvelle arithmétique (appelée *algèbre de Boole* ou *calcul booléen*) sont des énoncés, des propositions logiques (en gros, des phrases pouvant être vraies ou fausses, comme « Jean est un zombie »). Comme elles ne peuvent prendre que deux valeurs, nous pouvons attribuer la valeur 0 à une proposition dont nous savons qu'elle est fausse et la valeur 1 dans le cas contraire. Nous pouvons alors récrire OU sous la forme d'une addition ne comprenant que des 0 et des 1 :

$0 + 0 = 0$ (puisque « faux OU faux » est faux)

$1 + 0 = 0 + 1 = 1$ (puisque « vrai OU faux » et « faux OU vrai » sont tous deux vrais)

$1 + 1 = 1$ (puisque « vrai OU vrai » est vrai)

et nous pouvons récrire ET sous la forme d'une multiplication :

$0 \times 1 = 1 \times 0 = 0$ (puisque « faux ET vrai » et « vrai ET faux » sont tous deux faux)

$0 \times 0 = 0$ (puisque « faux ET faux » est faux)

$1 \times 1 = 1$ (puisque « vrai ET vrai » est vrai).

Comme les variables ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1, nous définirons l'opération NON comme un *complément*, transformant un nombre en son opposé :

Si $A = 1$, alors NON A (que nous noterons désormais A') = 0

Si $A = 0$, alors $A' = 1$

$A + A' = 1$ (puisque « vrai OU faux » est vrai)

$A \times A' = 0$ (puisque « vrai ET faux » est faux).

Cette nouvelle version de nos opérations logiques ressemble beaucoup à nos habituelles additions et multiplications, mais il y a tout de même quelques différences importantes. En algèbre de Boole, on peut faire disparaître certaines parties des équations, ce qui est bien pratique. Par exemple, la variable B dans

$$A + A \times B$$

ne compte pas, quelle que soit sa valeur de vérité et quel que soit l'énoncé qu'elle représente. Pourquoi ? Parce que si A est vrai ($A = 1$), alors A OU (A ET B) est vrai, que l'énoncé B soit vrai ou faux. Et si A est faux ($A = 0$), alors (A ET B) est faux, quelle que soit la valeur de B, et donc A OU (A ET B) est faux. Le calcul booléen nous permet de faire un peu de magie : l'expression $A + A \times B$ se réduit à un simple petit A :

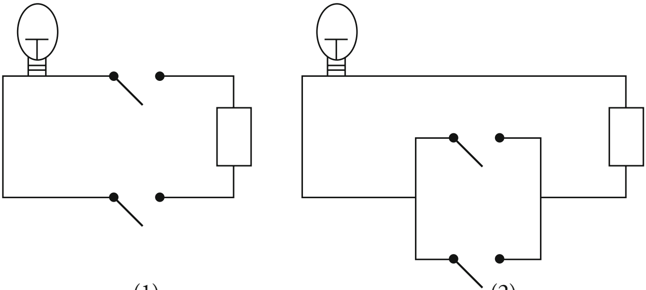
$$A + A \times B = A.$$

Que la lumière soit !

C'est à ce pouvoir de simplification que s'intéressa Claude Shannon (1916-2001), un étudiant de 20 ans qui, en 1936, rédigeait son mémoire de master au Massachusetts Institute of Technology.

Shannon avait étudié à la fois les maths et l'électronique. Dans son mémoire, il considérait des circuits complexes faits de relais et d'interrupteurs, tels qu'on en trouve par exemple dans les centraux téléphoniques. Grâce à son bagage mathématique, il se rendit compte que ces circuits pouvaient servir à représenter physiquement les opérations logiques de Boole.

Imaginez un circuit électrique avec un interrupteur dont dépend une ampoule. Celle-ci s'allume lorsqu'on allume l'interrupteur, ce qui ferme le circuit. Si l'on éteint l'interrupteur, le circuit s'ouvre et l'ampoule s'éteint. Supposez maintenant que le circuit comporte deux interrupteurs en série (comme dans la figure de gauche, ci-après). Pour que l'ampoule s'allume, il faut que les deux interrupteurs soient allumés. Si en revanche les interrupteurs sont en parallèle (figure de droite, 2), un seul interrupteur allumé suffit pour que l'ampoule s'allume.



Circuits avec interrupteurs en série (1) et en parallèle (2)

Nous pouvons résumer cela sous forme de tableaux :

Interrupteur 1	**Interrupteur 2**	**Ampoule**	**Interrupteur 1**	**Interrupteur 2**	**Ampoule**
Allumé	Allumé	Allumée	Allumé	Allumé	Allumée
Allumé	Éteint	Éteinte	Allumé	Éteint	Allumée
Éteint	Allumé	Éteinte	Éteint	Allumé	Allumée
Éteint	Éteint	Éteinte	Éteint	Éteint	Éteinte
Circuit 1 : interrupteurs en série			Circuit 2 : interrupteurs en parallèle		

Ça vous rappelle quelque chose ? Remplacez « Allumé » par « Vrai » et « Éteint » par « Faux » dans le circuit 1 : vous obtenez la table de vérité de l'opérateur ET. De la même façon, le circuit 2 donne la table de vérité de OU. Il est aussi possible de construire un circuit représentant