

FINANCE

Les titres financiers

Équilibre du marché
et méthodes
d'évaluation

Bernard Dumas
Blaise Allaz

puf

2176743

65

N. 0

Les titres financiers

Les titres financiers

EQUILIBRE DU MARCHÉ

ET MÉTHODES D'ÉVALUATION

BERNARD DUMAS

BLAISE ALLAIZ

8° v

110735

«FINANCE»

COLLECTION DIRIGÉE

PAR BERTRAND JACQUILLAT

ET MICHEL LEVASSEUR

Les titres financiers

ÉQUILIBRE DU MARCHÉ
ET MÉTHODES D'ÉVALUATION

BERNARD DUMAS

BLAISE ALLAZ



PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

DL- 13 11 1995 35334

A mes parents, B.D.

A Fiorenza et Paul, B.A.

ISBN 2 13 046644 3

ISSN 0982-3344

Dépôt légal — 1^{re} édition : 1995, octobre

© Presses Universitaires de France, 1995
108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris



Sommaire

AVANT-PROPOS	9
<i>Référence</i>	11
INTRODUCTION, NOTIONS DE BASE ET RAPPELS	13
1. La notion de titre financier	13
2. Le marché financier	14
3. Les choix effectués par les investisseurs	16
4. L'équilibre	17
5. Rappels sommaires de probabilités et de statistiques	19
6. Rappel d'optimisation	25
<i>Conclusion</i>	28
<i>Bibliographie</i>	28

PREMIÈRE PARTIE

L'ÉQUILIBRE SUR LE MARCHÉ DES ACTIONS

CHAPITRE PREMIER — L'ATTITUDE D'UN INDIVIDU RATIONNEL VIS-À-VIS DU RISQUE	31
1. La théorie de von Neumann, Morgenstern et Savage	32
2. L'aversion au risque de Arrow-Pratt (1964-1965)	42
3. Une panoplie de fonctions d'utilité	45
4. Développements récents	49
<i>Conclusion</i>	53
<i>Annexe : ébauche de preuve du théorème de l'espérance de l'utilité</i>	53
<i>Bibliographie</i>	55
CHAPITRE II. — LES CHOIX DE PORTEFEUILLE	57
1. Exemple numérique avec deux titres financiers	58
2. La réduction des risques. L'effet de la corrélation entre les titres	61
3. La condition d'optimalité du portefeuille dans le cas général de n titres ..	64
3.1. Calcul de la rentabilité d'un portefeuille de n titres	64
3.2. Optimisation de la composition du portefeuille	65
3.3. Le choix de portefeuille d'un investisseur d'aversion au risque donnée	68
4. La frontière efficiente et les théorèmes de séparation	69
4.1. La frontière de Markowitz	70
4.2. Théorème de séparation de Black	71
4.3. Le théorème de séparation de Tobin	72
5. Mise en œuvre	74
<i>Conclusion</i>	75
<i>Annexe 1 : Propriété du système (3.6a, 3.6c) et théorème de Black</i>	75
<i>Annexe 2 : Introduction à des considérations bayésiennes</i>	77
<i>Bibliographie</i>	79

CHAPITRE III. — LE MODÈLE D'ÉVALUATION DES ACTIFS FINANCIERS : ÉNONCÉ ET UTILISATION	81
1. Présentation du modèle d'évaluation des actifs financiers	82
1.1. Définition du portefeuille de marché	82
1.2. Démonstration et énoncé du MEDAF	82
1.3. Autre formation du MEDAF : mesure du risque par le coefficient bêta	84
1.4. Calcul du bêta et dernière interprétation du MEDAF	85
2. Le contexte macroéconomique	87
2.1. Le cas de l'offre infiniment élastique de titres	88
2.2. Le cas de l'offre infiniment inélastique de titres par les firmes	89
3. Le repérage des titres sur- ou sous-évalués	91
4. La mesure de performance des gestionnaires de portefeuille	97
5. Le choix des projets d'investissement	101
6. Développements récents	105
<i>Conclusion</i>	110
<i>Annexe : justification de l'α de Jensen</i>	110
<i>Bibliographie</i>	111
CHAPITRE IV. — CRITIQUE ET ÉVALUATION DU MEDAF	113
1. Le caractère statique du MEDAF	114
1.1. Modèle à une période, modèle à plusieurs périodes	114
1.2. Rentabilités IID ou non IID; variables d'information ou variables instrumentales	115
1.3. MEDAF conditionnel, MEDAF inconditionnel	117
2. Critiques d'ordre conceptuel	118
2.1. La critique de Roll	118
2.2. La critique de Hansen et Richard	120
2.3. Digression sur la mesure de performance	121
3. La stabilité des éléments du MEDAF	122
3.1. Stabilité des bêtas	123
3.2. Stabilité des espérances de rentabilité : celles des titres individuels et celle du marché; stabilité de la pente de la droite de marché	126
3.3. Les variables instrumentales utilisées dans le cas du MEDAF conditionnel	129
4. Tests empiriques du MEDAF	130
4.1. Les premières études : les travaux de Fama et MacBeth (1973)	131
4.2. La méthode multivariée illustrée par les travaux de Gibbons (1982) et Gibbons, Ross et Shanken (1989)	133
4.3. La méthode GMM illustrée par les travaux de Harvey (1989)	135
4.4. Autres modèles statistiques	138
5. Anomalies	142
<i>Conclusion</i>	145
<i>Bibliographie</i>	145

DEUXIÈME PARTIE

OPTIONS ET ARBITRAGE

CHAPITRE V. — L'ÉVALUATION DES OPTIONS PAR LA MÉTHODE D'ARBITRAGE	153
1. Options : définitions et gains	153
2. Principes de l'évaluation des options : temps discret	157
2.1. Option de date d'échéance immédiate	157
2.2. Les probabilités « neutres au risque »	160
2.3. Option de date d'échéance quelconque : technique binomiale	161
3. Le temps continu : formule de Black et Scholes	163
4. Mise en œuvre	168
4.1. Le processus aléatoire du sous-jacent	168

4.2. L'hypothèse de constance de la volatilité	170
4.3. L'hypothèse de constance du taux d'intérêt	172
4.4. L'exercice avant l'échéance et les dividendes payés sur le sous-jacent . .	174
4.5. L'estimation du paramètre de volatilité σ	177
5. Tests empiriques	179
6. Autres titres secondaires et autres applications du principe d'arbitrage . . .	181
6.1. Les contrats de futures sur titres financiers	181
6.2. Les options sur indice	183
6.3. Les options sur futures de titres financiers	184
6.4. Les options sur devises	185
6.5. Options d'échange	185
6.6. Les primes	186
6.7. L'assurance de portefeuille	187
<i>Conclusion</i>	188
<i>Annexe : la limite de la valeur obtenue par la méthode binomiale est la formule de Black et Scholes (Cox, Ross and Rubinstein (1979))</i>	189
<i>Bibliographie</i>	191
CHAPITRE VI. — L'ÉVALUATION DES OPTIONS EN TEMPS CONTINU	195
1. Notions de calcul différentiel aléatoire (ou stochastique)	196
1.1. Le mouvement brownien	196
1.2. Le mouvement brownien comme limite d'une marche au hasard	197
1.3. Equations différentielles stochastiques, processus d'Itô et processus de diffusion	200
1.4. Le lemme d'Itô ou formule de changement de variable	203
2. L'évaluation des options en temps continu	205
2.1. L'équation aux dérivées partielles de Black et Scholes	206
2.2. Solution de l'e.d.p. de Black et Scholes	209
3. Options sur des titres payant un dividende continu	211
4. Options de type américain	212
4.1. Dividende discret et certain	212
4.2. Conditions aux bornes applicables aux options américaines sur des titres payant un dividende en continu («smooth pasting»)	214
4.3. Méthodes approximatives de résolution	216
5. Introduction aux méthodes numériques	219
5.1. La méthode des différences finies	220
5.2. Autre méthode numérique : la stimulation de Monte-Carlo	223
<i>Conclusion</i>	224
<i>Annexe 1. — Les variations du mouvement brownien</i>	225
<i>Annexe 2. — L'intégrale stochastique par rapport au brownien</i>	227
<i>Bibliographie</i>	230
CHAPITRE VII. — ÉVALUATION DES PASSIFS ET DES ACTIFS D'UNE SOCIÉTÉ ANONYME, INGÉNIERIE FINANCIÈRE	233
1. Evaluation de la dette ordinaire	234
1.1. Dette unique, sans coupon, payable in fine	234
1.2. Paiements au profit des actionnaires effectués au cours de la vie de la dette	237
1.3. Paiement intermédiaire au profit des porteurs de dette	239
1.4. Dette non prioritaire	240
2. Les coûts des sources de fonds	244
3. Evaluation des obligations convertibles	247
3.1. Un cas d'école	248
3.2. Dividendes payés au cours de la vie de l'obligation	250
3.3. Clause de remboursement anticipé	251

3.4. Mise en œuvre au moyen de la technique binomiale	253
3.5. Bons de souscription et stratégie d'exercice	255
4. Evaluation des actifs	257
4.1. L'évaluation des projets d'investissement	257
4.2. Calcul de la valeur actuelle nette augmentée	260
4.3. Détermination de la date optimale d'investissement	264
<i>Conclusion</i>	265
<i>Annexe. — Optimisation de la valeur de la mine</i>	265
<i>Bibliographie</i>	267

TROISIÈME PARTIE

OBLIGATIONS ET GAMME DES TAUX

CHAPITRE VIII. — LA STRUCTURE À TERME DES TAUX D'INTÉRÊT	271
1. Rappel sur l'actualisation	272
2. Rendement actuariel, duration et convexité	273
2.1. Rendement actuariel	273
2.2. La duration	277
2.3. Lien entre rendement actuariel et duration	279
2.4. Convexité	282
3. Mesure de la structure à terme des taux d'intérêt	284
4. L'influence de la fiscalité	286
5. L'immunisation	288
6. Théories traditionnelles de la structure à terme des taux d'intérêt	292
6.1. La théorie des anticipations	292
6.2. Les théories de la préférence pour la liquidité et de l'habitat préféré ..	296
<i>Conclusion</i>	297
<i>Annexe 1. — Les clauses de tirage-rachat</i>	297
<i>Annexe 2. — Théorie des anticipations en temps continu</i>	300
<i>Bibliographie</i>	302
CHAPITRE IX. — L'ÉVOLUTION DES TAUX D'INTÉRÊT ET LE PRIX DES OBLIGATIONS	305
1. Le prix d'une obligation sur un marché soumis à un seul facteur aléatoire ..	305
2. Exemple : la formule de Vasicek	310
3. Les prix des obligations sur un marché soumis à deux facteurs aléatoires ..	313
4. Le modèle de Cox, Ingersoll et Ross (CIR)	316
5. Les nouvelles formes d'obligations	319
6. Développements récents	321
<i>Conclusion</i>	323
<i>Bibliographie</i>	323
CHAPITRE X. — OPTIONS SUR INSTRUMENTS DÉRIVÉS DE TAUX	325
1. Rappel sur la probabilité neutre au risque	327
2. L'exemple de Black, Derman et Toy	329
3. Spécification de la structure à terme en temps continu	332
3.1. Spécification du comportement des prix des obligations	332
3.2. Spécification du comportement des taux à terme en temps continu ..	334
3.3. Spécification du comportement du taux court en temps continu	335
4. Evaluation des options dans l'exemple de Black, Derman et Toy	336
5. Evaluation des options en temps continu	338
<i>Conclusion</i>	340
<i>Bibliographie</i>	341



Avant-propos

Les travaux théoriques en finance trouvent chaque jour de nouvelles applications dans la vie des entreprises, des marchés financiers et des institutions financières. Cette pénétration dans le milieu économique suit celles de l'informatique et de l'analyse numérique, qui rendent solubles des équations trop complexes pour posséder des solutions sous la forme de formules explicites.

L'étudiant et le praticien de la finance seraient donc rapidement frappés d'obsolescence s'ils n'étaient pas mis au courant des travaux économiques récents. Au-delà même de ces travaux se dégagent un certain nombre de principes dont la connaissance facilitera la compréhension des mécanismes pratiques. Il n'est pas excessif de dire que la finance est un des domaines de la gestion où la pratique a été profondément affectée par les développements théoriques. Le modèle de décision rationnelle, qui fut enfanté par les théoriciens dans le but de représenter de manière fruste les comportements des décideurs, a joué partiellement un rôle normatif et a influencé en retour la façon dont les décisions financières sont prises aujourd'hui. La conception et la réglementation des marchés financiers actuels¹ ont été en grande partie le produit de réflexions théoriques et empiriques sur l'optimalité et l'efficacité de marchés en équilibre. C'est au point que l'on peut légitimement se demander si les théories modernes peuvent faire l'objet de vérifications empiriques sur des données anciennes. Les marchés évoluent au fur et à mesure que les praticiens adoptent les modes de raisonnement les plus élaborés.

Ce cours de théorie financière est enseigné depuis 1983 à l'Ecole H.E.C. (Hautes Etudes Commerciales), en deuxième année de scolarité. C'est un électif destiné aux élèves qui ont l'intention de se spécialiser en finance. Le niveau de mathématiques exigé pour suivre les cours de ce livre est celui du bac C plus une année de scolarité en enseignement supérieur. Le livre n'est donc pas destiné à des mathématiciens chevronnés et n'utilise que les notions usuelles d'analyse et d'algèbre. Certains compléments seront apportés ici, sans que nous puissions faire cela avec beaucoup de rigueur, la présentation restant, dans la mesure du possible, simple, intuitive et «concrète».

1. Par exemple, l'introduction de contrats de futures sur indice boursier.

Notre livre couvre trois sujets élémentaires, sans la connaissance desquels il n'est pas possible de comprendre les autres aspects du domaine de la finance. Outre leur caractère élémentaire, ces trois sujets ont été sélectionnés également comme étant ceux qui ont suscité le plus grand nombre d'applications pratiques au cours des vingt dernières années. Chacun d'eux est traité dans une partie du livre :

Première partie : le comportement de l'investisseur vis-à-vis du risque (chapitre I), les choix de portefeuille (chapitre II) et l'équilibre (partiel) sur le marché des actions (chapitres III et IV) ;

deuxième partie : l'évaluation des options (chapitres V, VI et VII) ;

troisième partie : l'évaluation des obligations et l'étude de la gamme des taux d'intérêt (chapitres VIII, IX et X).

Le premier sujet a profondément influencé la façon dont sont gérés les fonds de placement, même si le modèle d'équilibre auquel il conduit (le Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers, MEDAF) n'est pas toujours couronné de succès lors des tentatives de vérification empirique (voir chapitre IV). Le second et le troisième sujet ont servi de fil conducteur au cours de l'extraordinaire croissance qu'ont connue les marchés d'options et les marchés destinés à couvrir les risques de taux d'intérêt. De plus, la théorie des options sert de véritable «algèbre juridique²» dans la conception des contrats financiers qui définissent les droits des émetteurs et porteurs de titres et dans l'évaluation des passifs des sociétés anonymes et de certains de leurs actifs (chapitre VII). Ce livre se veut donc d'un grand intérêt pratique, même s'il n'entre pas dans le détail du fonctionnement des marchés et institutions financières, dans la description des contrats et des marchés existants ou dans l'analyse des pratiques commerciales.

Le présent livre n'est pas une encyclopédie de la finance. Il ne couvre qu'une faible fraction du domaine. Il ne comporte aucun élément sur l'optimisation dynamique et la gestion des portefeuilles sur plusieurs périodes, et nous n'étudions pas l'équilibre du marché financier sur plusieurs périodes, même si nous faisons allusion à cette dernière question ici ou là. Il n'aborde pas la finance d'entreprise, le microfonctionnement des marchés ou la théorie économique des institutions financières, tous développements récents qui reposent sur la théorie des jeux et l'asymétrie de l'information des agents. Il ne traite pas non plus les domaines d'application : gestion de l'entreprise (trésorerie, structure du bilan, fusions et acquisitions, politique de dividendes...), gestion bancaire, gestion de portefeuille, finance internationale, économie de l'assurance, etc. Enfin, ce livre fait une part faible aux études empiriques, même si le chapitre IV dans sa totalité est consacré aux techniques économétriques modernes de vérification du MEDAF.

A l'intérieur même des sujets traités, nous avons laissé de côté certaines méthodes. S'agissant du marché des actions, seul le MEDAF est traité ici, l'Arbitrage Pricing Theory (A.P.T.) de Ross étant passé sous silence. S'agissant

2. Ce vocable est dû à notre collègue Romain Laufer, que nous remercions.

de la théorie des options et de la théorie des obligations, nous faisons un usage très restreint d'une approche mathématique moderne, celle des «martingales», qui n'est abordée qu'indirectement dans les chapitres VI, IX et X³. L'évaluation des options et obligations se fait toujours, en définitive, par solution d'une équation différentielle ou d'une équation aux dérivées partielles. Il nous a paru plus simple du point de vue pédagogique d'obtenir directement les dites équations, c'est-à-dire de nous cantonner aux méthodes usuelles de calcul différentiel et intégral. Développer en parallèle l'approche «martingale», même si celle-ci est indéniablement plus élégante, aurait exigé des suppléments importants en mathématiques et aurait occasionné des allers-retours et des redites. Il nous a semblé que le développement systématique de cette méthode constituait un projet pédagogique distinct.

Un mot, pour conclure, sur le style. Bien qu'il s'agisse d'un livre technique, nous nous sommes efforcés de laisser sa place au verbal et à l'interprétation. Nous avons tenté de prendre un certain recul par rapport aux travaux académiques publiés et de faire en sorte que ce manuel constitue un tout, qui soit plus que la simple mise bout à bout des contributions des divers auteurs. Très souvent, nous avons donné libre cours à nos points de vue personnels et nous nous sommes permis des jugements sur les méthodes. Le lecteur appréciera.

Nos remerciements vont aux Presses Universitaires de France et au directeur de cette collection, le Professeur Bertrand Jacquillat, qui ont fait preuve d'une très grande patience à notre égard. Mathieu Lepeltier, Isabelle Salaün, qui ont enseigné ce cours à H.E.C. Pierre Collin-Dufresne, Jacques Hamon, Bertrand Jacquillat et Roland Portait nous ont fait part de leurs commentaires et nous ont encouragés à terminer cet ouvrage. Anne Dumas a fait en sorte que la langue française ne soit pas, dans ce livre, sacrifiée sur l'autel de la finance. Nous les en remercions ainsi que les nombreux étudiants H.E.C. qui n'ont pas été avares de remarques au fil des ans.

Référence

Duffie D., *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, 1992.

3. Voir le livre de Duffie (1992).

Introduction, notions de base et rappels

1. La notion de titre financier

Un titre financier peut être défini par la suite de flux de trésorerie futurs que recevra son porteur. Décrire un titre suppose que l'on dispose d'un certain nombre d'informations : quel est le calendrier des versements, c'est-à-dire à quelle date interviendra le paiement de chacun des flux? Quel sera le montant des versements successifs? Que se passera-t-il en cas de non-paiement? etc.

Le cas le plus simple de titre financier est un titre financier sans risque dont tous les flux de trésorerie futurs sont connus avec certitude à tout instant. Les obligations d'Etat sont approximativement sans risque puisque l'on est à peu près sûr que l'Etat sera toujours en mesure de payer ses dettes libellées en francs ¹.

Dans le cas général, les flux futurs qui s'attachent à un titre ne sont pas connus avec certitude. L'investisseur doit appréhender le titre à partir de *prévisions* de flux de trésorerie, donc de *données aléatoires*. Pour certains titres, comme les obligations ou les créances commerciales, ces prévisions s'appuient sur des données contractuelles. Pour d'autres, telles les actions, elles ne sont que le résultat de l'analyse économique que fait l'investisseur : la société émettrice n'a fait aucune promesse quant au montant des dividendes futurs ou au calendrier des versements.

Quelle que soit la base des prévisions de flux aléatoires, elles se traduisent par une *distribution de probabilité* pour chaque flux. Mais les variables aléatoires que sont les flux de trésorerie successifs ne sont en général pas indépendantes les unes des autres. Dans de nombreux cas, la réalisation du flux à l'instant 1 fournit des informations quant au montant du flux à l'instant 2 : une opération commerciale qui se solde par un succès au cours des premières années continue très souvent sur sa lancée; pareillement, une opération qui est rapidement un échec voit rarement ses résultats ultérieurs s'améliorer. C'est ce qu'on appelle la *dépendance sérieuse* des flux de trésorerie. Elle est prise en compte par la

1. Il reste cependant que le pouvoir d'achat réel d'un franc dans dix ans n'est pas à proprement parler certain. Les flux des obligations d'Etat sont donc sans risque en valeur nominale seulement. Ils sont probablement risqués en valeur réelle.

distribution jointe des probabilités de tous les flux afférents au titre financier considéré.

2. Le marché financier

La question de savoir ce que vaut un titre n'a pas de sens en elle-même. Il est exclu de poser le problème de l'évaluation d'un titre financier sans spécifier le marché sur lequel la valeur doit être appréciée. La première étape consiste donc à décrire le marché financier considéré. La description la plus détaillée précise la nature et le nombre des investisseurs présents sur le marché, et permet d'en déduire leur demande de titres financiers. De cette analyse, puis de la confrontation entre demande et offre, résulte pour chaque titre un prix. C'est dire qu'il existe une *fonction d'évaluation* qui associe à chaque séquence de flux de trésorerie sa valeur sur le marché.

Il importe de souligner que cette fonction d'évaluation s'applique uniformément à tous les titres. Pour illustrer l'universalité de cette fonction et en même temps en donner une description plus concrète, considérons, à titre d'exemple, le cas le plus simple : celui de *l'avenir certain*. Soit un titre financier qui doit apporter trois paiements successifs aux instants 1, 2 et 3, égaux par exemple à 500 F, puis 500 F, puis 10 500 F (cela correspondrait à une obligation au nominal de 10 000 F avec un taux de coupon de 5%). Donnons par ailleurs une description simplifiée du marché financier en précisant qu'au cours de la période 0-1, le taux d'intérêt qui prévaut est de 6%, qu'il est de 7% au cours de la période 1-2, et de 8% au cours de la période 2-3².

Il est alors possible de calculer le comportement exact, au cours du temps, du prix de ce titre sur ce marché. Pour ce faire, on part du principe selon lequel, à l'instant terminal $t = 3$, le titre doit avoir un prix égal à sa valeur de remboursement, soit 10 500 F. Puis, en remontant le temps jusqu'à l'instant $t = 2 + \varepsilon$, on voit par actualisation que le titre vaut 10 500 F divisé par 1,08. On passe ensuite de l'instant $2 + \varepsilon$ à l'instant $2 - \varepsilon$ en ajoutant 500 F au prix du titre³.

En continuant à reculer dans le temps, on obtient le cheminement du prix du titre tel qu'il apparaît sur la figure 1 : au cours de la première période, le titre qui ne rapporte que 500 F voit sa valeur passer de 9 484,41 F à 9 553,48 F.

2. Comme nous l'avons dit, une description complète du marché consiste à indiquer exactement quelle est la population des investisseurs. Les taux d'intérêt constituent une description sommaire de cette population : à ces taux, les investisseurs, compte tenu de leurs préférences et de leur patrimoine, sont prêts à échanger des francs futurs contre des francs présents.

3. Si, au contraire, on se déplace dans le sens du temps chronologique, le prix d'un titre chute au moment des paiements. Cela est logique, puisque le titre à ces moments-là «perd de sa substance».

Sa rentabilité au cours de cette période est bien de 6%, si l'on prend en compte à la fois les paiements et la plus-value :

$$\frac{9553,48 - 9484,41 + 500}{9484,41} = 0,06. \quad (2.1)$$

Ce qui permet à la plus-value d'être dégagée c'est le fait que le prix de départ – qui fut calculé, rappelons-le, à reculons – était «parti» de suffisamment bas. Si le premier paiement avait été encore plus faible (400 F par exemple), le prix de départ aurait été inférieur à 9 484,41 F, alors que le prix de fin de période serait resté celui qui résulte des paiements ultérieurs, à savoir 9 553,48 F. Ainsi, une plus-value plus importante aurait été dégagée.

Par ce mécanisme, tous les titres rapportent 6% sur le marché au cours de la première période, preuve que la fonction d'évaluation utilisée s'applique à chacun d'entre eux. Le titre que nous avons considéré ici à titre d'exemple a un taux de coupon de 5%, ce qui est moins que la rentabilité exigée par le marché au cours des trois périodes successives. Les paiements étant insuffisants, la rentabilité requise est dégagée par une plus-value qui vient compléter les paiements (de sorte que tout au long de sa vie ce titre cote au-dessous du «pair» 10 000 F).

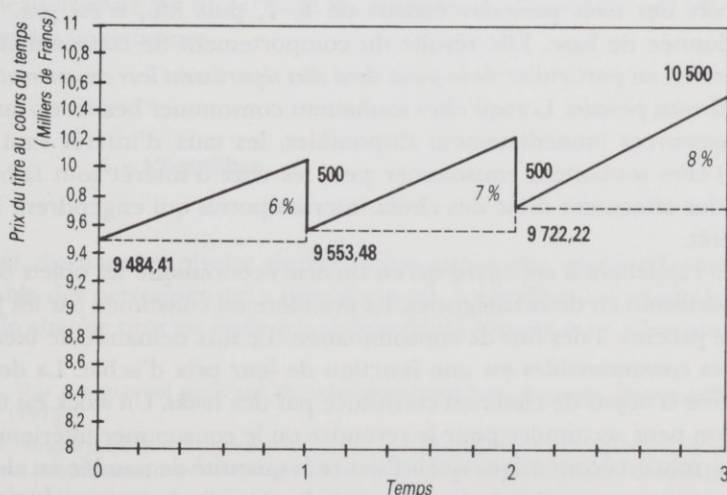


FIG. 1

Evolution du prix du titre au cours du temps

De façon générale, tout titre financier doit, en avenir certain, avoir un prix qui évolue au rythme du taux d'intérêt de période du marché; mais, lorsqu'un paiement intervient, celui-ci provoque une chute immédiate du prix. Nous énonçons donc le principe suivant :

La valeur des titres se calcule à reculons et est telle en avenir certain que, sur chaque période, il apparaisse une rentabilité totale (prenant en compte paiements et plus-value éventuelle) égale au taux d'intérêt de la période.

Deux types de données ont été nécessaires au calcul de prix qui précède :

- celles qui caractérisent le titre, à savoir les trois paiements successifs (correspondant à un taux de coupon de 5%);
- et les données qui tiennent à la description du marché financier, à savoir les trois taux d'intérêt de marché successifs : 6, 7 et 8%.

L'ajustement du prix assure la cohérence entre ces deux types de données : rien n'empêche qu'un titre ne rapportant qu'un coupon de 5% existe sur un marché où les rentabilités sont plus élevées : il suffit pour cela qu'il cote en dessous du pair, de façon qu'une plus-value puisse apparaître ultérieurement.

3. Les choix effectués par les investisseurs

L'information fournie dans l'exemple précédent, selon laquelle les taux d'intérêt des trois périodes étaient de 6, 7, puis 8%, n'est pas, en fait, une donnée de base. Elle résulte du comportement de consommation des personnes, en particulier *de la façon dont elles répartissent leur consommation entre les différentes périodes*. Lorsqu'elles souhaitent consommer beaucoup au regard des ressources immédiatement disponibles, les taux d'intérêt sont élevés; lorsqu'elles souhaitent consommer peu, les taux d'intérêt sont faibles. Les individus effectuent donc des choix intertemporels qui engendrent les taux d'intérêt.

On rappellera à cet égard qu'en théorie économique les objets de choix se répartissent en deux catégories. La première est constituée par les *flux* que l'on se procure à des fins de consommation. Le flux demandé de biens et de services consommables est une fonction de leur prix d'achat. La deuxième catégorie d'objets de choix est constituée par des *stocks*. Un stock est un objet que l'on peut accumuler pour le revendre ou le consommer ultérieurement; le déterminant économique qui influence la quantité demandée est alors, non pas le prix au moment de l'achat, mais le prix d'achat *comparé* au prix de revente éventuel ou au prix d'un achat effectué à une date ultérieure. C'est le déterminant économique de la demande de stocks. Il est clair que les titres financiers appartiennent à la catégorie des stocks.

Les choix intertemporels que nous venons d'évoquer sont le plus souvent modélisés à l'aide d'une *fonction d'utilité de la consommation* propre à chaque individu. L'utilité est fonction de la consommation présente et de la consommation future. Les individus répartissent leurs ressources entre consommation

présente et consommation future de telle façon que leur fonction d'utilité atteigne le niveau le plus élevé possible. Le taux marginal de substitution entre ces deux consommations est un déterminant très important du taux d'intérêt ⁴.

Mais la fonction d'utilité n'est pas seulement destinée à représenter les choix de consommation effectués à deux instants différents. Elle représente également le choix entre une consommation *quasi certaine* (celle d'aujourd'hui) et une consommation au contraire très *aléatoire* (celle de demain). Le *comportement des individus vis-à-vis du risque*, qui sera représenté par leur fonction d'utilité, est au cœur même de cette étude : nous verrons qu'il engendre une attitude particulière vis-à-vis de la composition des portefeuilles de titres. Au chapitre II, par exemple, nous ferons l'hypothèse que les investisseurs se préoccupent de l'espérance de la rentabilité et de la variance de la rentabilité de leur portefeuille, et nous montrerons l'intérêt que représente la *diversification*. Une personne ayant une aversion au risque extrêmement forte et se préoccupant uniquement du risque global de son portefeuille s'appliquera à choisir des titres dont les risques se compensent les uns les autres : si l'un des titres inclus dans son portefeuille rapporte plus que prévu dans les circonstances où d'autres rapportent moins que prévu (et *vice-versa*), le risque global qu'elle assume est réduit. La diversification entre titres est un comportement tout à fait caractéristique de l'aversion au risque ⁵.

Résumons-nous : répartition de la consommation entre les périodes et diversification entre les titres ⁶ sont les motivations essentielles qui orientent les choix des investisseurs.

4. L'équilibre

L'état du marché résulte de la confrontation des choix effectués par l'ensemble des personnes qui y interviennent. L'équilibre est atteint lorsque l'offre de chaque titre est égale à la demande de chaque titre. C'est ainsi que

4. Voir un manuel standard de microéconomie (par exemple, Varian (1978) ou Zisswiller (1975)).

5. Notons aussi que la dimension intertemporelle des choix et l'attitude vis-à-vis du risque agissent conjointement pour induire un comportement de *diversification « intertemporelle »*. Les périodes d'investissement et de réinvestissement se succédant, l'investisseur doit se préoccuper de la façon dont la rentabilité d'un titre au cours d'une période peut être liée à celles des occasions de réinvestissement qui se présenteront lors des périodes suivantes. Dans le cas où une telle liaison probabiliste existe, l'investisseur peut être amené à choisir son portefeuille de façon qu'une rentabilité anormalement faible au cours de la première période soit suivie d'occasions de réinvestissement exceptionnellement favorables, cependant qu'une rentabilité anormalement élevée au cours de la première période serait suivie d'occasions de réinvestissement exceptionnellement faibles. Il apparaît ainsi un mécanisme de *compensation des risques au fil des périodes*. C'est ce que nous avons appelé la diversification intertemporelle.

6. Et diversification intertemporelle.

sera déterminée la fonction d'évaluation, applicable, rappelons-le, à tous les titres simultanément sur un marché donné ⁷.

Bien que l'équilibre ne puisse être calculé en détail qu'en respectant la condition d'égalité de l'offre et la demande pour chaque titre, il est possible d'énoncer une condition minimale (condition nécessaire mais non suffisante) qui doit prévaloir à l'équilibre et qui peut, dans certains cas, à elle seule ⁸, fournir des résultats d'évaluation. Cette condition est *l'absence d'occasions d'arbitrage*.

Un *arbitrage* est défini comme *une opération qui génère un profit positif sans mise de fonds et sans prise de risque*. Par exemple, s'il existait sur un même marché deux titres identiques à des prix différents, il est évident que chaque investisseur choisirait d'acheter le titre le moins cher et de vendre celui dont le prix est le plus élevé. La différence constituerait un profit immédiat sans risque et sans mise de fonds, puisque la vente de l'un aurait permis l'achat de l'autre ⁹.

S'il existait des occasions d'arbitrage, le marché ne pourrait pas être en équilibre, car tout agent effectuerait l'opération d'arbitrage, demandant certains titres en quantité infinie et en vendant d'autres en quantité également infinie. Dans de telles conditions, la demande de chaque titre ne pourrait pas être égale à son offre ¹⁰.

L'idée de base selon laquelle un marché en équilibre ne peut offrir d'occasions d'arbitrage a pour conséquence un principe important qui caractérise la fonction d'évaluation de tout marché. Il s'agit du *principe d'additivité des valeurs*.

Si, sur un même marché, il existe un titre *A* défini par sa séquence de flux de trésorerie futurs, un titre *B* également défini par sa séquence de flux de trésorerie futurs, et un titre *A + B* dont les flux de trésorerie sont, à chaque instant, égaux à la somme des flux des deux titres précédents, alors :

$$V(A+B) = V(A) + V(B).$$

La fonction d'évaluation est une application linéaire.

La valeur du troisième titre doit être égale à la somme des valeurs des deux premiers. Si ce n'était pas le cas, il existerait des occasions d'arbitrage.

7. Voir chapitre III.

8. Voir, par exemple, les chapitres V et VI.

9. Nous savons que, grâce aux divers mécanismes de vente à découvert, il est possible de vendre un titre quand bien même on ne le possède pas. Le marché à règlement mensuel de la Bourse de Paris, par exemple, autorise le vendeur de ne livrer qu'en fin de mois un titre qu'il a vendu en cours de mois. Il lui est ainsi parfaitement loisible de vendre un titre qu'il ne détient pas. Aux Etats-Unis, où il n'existe qu'un marché au comptant des titres, des intermédiaires sont disposés à prêter des titres aux intervenants qui peuvent ainsi les vendre sans les posséder. Pour permettre l'arbitrage dont nous parlons, on peut également imaginer un mécanisme d'enchères walrasiennes dans lequel aucune transaction n'est définitive tant qu'elles ne le sont pas toutes. Ainsi, notre intervenant pourrait liquider simultanément son achat et sa vente, s'évitant d'avoir à livrer le titre vendu. Quels que soient les détails institutionnels, l'idée générale est la même : des différences injustifiables de prix ne peuvent subsister bien longtemps dans un marché correctement organisé.

10. L'offre est le nombre de titre mis en circulation par les firmes, une quantité finie.

Imaginons, par exemple, que la valeur de $A+B$ soit supérieure à la valeur de A plus la valeur de B . Une personne pourrait alors acheter A et B séparément et vendre $A+B$, au besoin à découvert. Cela ne provoquerait aucun risque pour la personne, car tous les flux futurs s'annuleraient exactement : elle recevrait les flux de A et les flux de B , ce qui lui permettrait d'acquitter exactement les flux du titre $A+B$ qu'elle aurait vendu à découvert. Une inégalité entre les valeurs de marché entraînerait un profit immédiat, alors même qu'aucun risque ne serait assumé. L'inégalité dans ce sens est donc impossible; on montrerait également qu'elle est impossible dans l'autre sens ($V(A+B) < V(A)+V(B)$), de sorte que seules l'égalité, et donc l'additivité des valeurs, sont possibles.

Remarquons que la règle d'additivité suppose l'existence simultanée des trois titres A , B et $A+B$. La règle ne dit pas que, dans un marché où il n'existerait que le titre A et le titre B , on pourrait éliminer ces titres et les remplacer par le titre $A+B$ dont la valeur serait la somme des valeurs des deux titres précédents. Ce peut ne pas être vrai, car la suppression de certains titres et la création d'autres peuvent modifier fondamentalement l'équilibre du marché. Mais, lorsque les trois titres existent simultanément sur un même marché, le principe est d'application générale.

Signalons qu'en théorie financière de l'entreprise, le principe d'additivité sous-tend le *théorème de Modigliani et Miller* selon lequel :

En l'absence d'impôts, la valeur totale d'une entreprise est indépendante de la composition de son passif.

Que la société soit financée par des capitaux propres ou par de la dette, la valeur totale de ces deux catégories de titres n'est pas modifiée lorsqu'on change leur valeur relative¹¹. Ce résultat est le produit direct du principe d'additivité des valeurs : la valeur des actions plus la valeur de la dette est égale à la valeur du flux total dégagé par les opérations de la société – son flux économique – et cette valeur sur un marché donné est une quantité objective, indépendante du mode de financement.

5. Rappels sommaires de probabilités et de statistiques

Après ce bref rappel de principes de base à caractère financier, nous abordons dans les deux prochaines sections quelques notions techniques qui relèvent de la théorie des probabilités et des statistiques et de la théorie de l'optimisation. Ces notions nous seront utiles dans les développements ultérieurs. En effet la notion de variable aléatoire, qui fait l'objet de la théorie des probabilités, est la représentation la plus fréquente du risque financier et

11. Par émission de capitaux propres servant à rembourser une dette, par exemple.

l'optimisation est la base de la théorie économique des choix effectués par les agents économiques.

Une variable aléatoire X est le plus souvent spécifiée à l'aide de sa *fonction de répartition* ou *fonction de distribution*, définie par :

$$F(x) = \text{Proba} (X \leq x). \quad (5.1)$$

Cette fonction fait correspondre au nombre réel x la probabilité que la variable aléatoire X lui soit inférieure ou égale.

On peut également spécifier la variable aléatoire X par sa *densité de probabilité* $f(x)$ qui est telle que :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du. \quad (5.2)$$

Par définition, la probabilité que $X \leq x$ est égale à l'aire comprise sous la courbe $f(x)$, à gauche de la valeur x .

Très souvent, on se contente d'une description plus sommaire de la variable aléatoire X : une telle description ne permet pas de connaître la totalité de la distribution de probabilités, mais seulement certains paramètres descriptifs. Au premier rang de ces paramètres figure *l'espérance mathématique*, qui est une mesure de la valeur centrale de la distribution de probabilités. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est un nombre réel; elle est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx. \quad (5.3)$$

C'est la moyenne des valeurs possibles de la variable aléatoire, pondérées par les probabilités respectives. En effet, la quantité $f(x) dx$ n'est autre que la probabilité que la variable X prenne une valeur comprise entre x et $x + dx$. L'espérance mathématique s'appelle aussi le «premier moment» de la distribution de probabilité.

La distribution de probabilités étant en pratique rarement connue dans sa totalité, on est amené à *estimer* l'espérance mathématique d'une variable aléatoire à l'aide d'un échantillon fini d'observations. Il faut prendre soin de distinguer deux notions :

- l'espérance mathématique elle-même, qui est un nombre réel fixe, et qui serait calculable à partir de la distribution de probabilités complète;
- une estimation, ou un estimateur, de cette espérance mathématique qui serait calculable, non pas à partir de l'ensemble de la distribution, mais à partir d'un échantillon de cette distribution, tiré au hasard.

L'estimateur le plus communément utilisé de l'espérance mathématique est la *moyenne des valeurs* de l'échantillon :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (5.4)$$

où les différents x_i sont les observations appartenant à l'échantillon.

Il est crucial de bien comprendre qu'un échantillon ayant été tiré au hasard, un autre échantillon aurait pu être tiré. Les valeurs numériques qui constituent un échantillon, et par suite leur moyenne, sont des variables aléatoires. On peut donc en définir l'espérance mathématique : on montrerait que l'espérance mathématique de la moyenne $\bar{x}$ est égale à l'espérance mathématique de X . On dit que $\bar{x}$ en tant qu'estimateur de $E(X)$ est *sans biais*; cela signifie que les erreurs que comporte l'estimateur sont d'espérance mathématique nulle.

Un deuxième paramètre fréquemment utilisé pour décrire le comportement des variables est destiné à mesurer, non pas la valeur centrale, mais la *dispersion* de la distribution de probabilité associée, ou la *taille moyenne* des fluctuations de la variable. Il s'agit de la *variance* de la variable aléatoire X :

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx. \quad (5.5)$$

La variance est l'espérance des carrés des écarts par rapport à l'espérance mathématique. La variance présente l'inconvénient purement formel d'être mesurée dans une unité qui est le carré de l'unité de mesure de la variable aléatoire elle-même, ce qui gêne quelquefois l'interprétation. C'est pourquoi on a défini une autre mesure de dispersion, *l'écart-type*, auquel on attribue le symbole σ , et qui est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$. L'écart-type a l'avantage d'être mesuré dans les mêmes unités que la variable, mais ce n'est qu'un avantage de présentation : les deux concepts sont en fait équivalents. La variance s'appelle aussi le «deuxième moment» de la distribution. Il nous serait loisible de définir de façon semblable le $n^{\text{ième}}$ moment.

L'estimateur de la variance le plus communément utilisé lorsqu'on dispose d'un échantillon d'observation $x_i, i = \dots, n$ est défini par la formule :

$$\text{est. var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}. \quad (5.6)$$

Le calcul se fait en obtenant les écarts de chacune des observations par rapport à la moyenne, avant d'en prendre le carré et de calculer la moyenne de ces carrés ¹².

Il nous arrivera d'utiliser non pas une variable aléatoire, mais plusieurs. Leur comportement devra alors être décrit par une fonction de répartition jointe, définie par :

$$F(x, y) = \text{Proba}(X \leq x \text{ et } Y \leq y), \quad (5.7)$$

lorsqu'il s'agit de deux variables aléatoires X et Y . De même que pour une seule variable, on peut définir une densité de probabilité jointe de ces deux variables, notée $f(x, y)$.

Lorsque l'on a affaire à plusieurs variables aléatoires, la question se pose de savoir quelle est la distribution de leur somme, et plus particulièrement quelle est la valeur de la variance de leur somme. La variance de la somme de deux variables aléatoires X et Y est calculée de la façon suivante :

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y). \quad (5.8)$$

Elle n'est pas égale à la somme des variances de X et de Y , sauf dans le cas particulier d'indépendance linéaire entre les deux variables. Dans le cas général, il s'ajoute aux deux variances un terme égal à deux fois la covariance entre X et Y ; ce terme reflète les compensations d'aléas qui sont possibles entre X et Y . La covariance entre X et Y est définie par :

$$\text{cov}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)][y - E(Y)]f(x, y)dx dy, \quad (5.9)$$

c'est-à-dire l'espérance du produit des écarts de X et de Y par rapport à leurs espérances mathématiques respectives.

La corrélation est une autre mesure de l'interdépendance entre deux variables qui fait abstraction de la taille de leurs fluctuations respectives. Elle est définie par :

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}. \quad (5.10)$$

Cette quantité est nécessairement comprise entre -1 et 1 : lorsqu'elle est égale à 0 , les deux variables sont linéairement indépendantes; lorsqu'elle est

12. Comme l'indique la formule, il est préférable de calculer cette dernière moyenne en divisant par le nombre $n - 1$ plutôt que par le nombre n . Cette manipulation vise à obtenir un estimateur sans biais de la variance; une division par le nombre n d'observations produirait une variance estimée dont l'espérance mathématique serait différente de la vraie variance de X .

égale à 1 ou -1 , les deux variables sont parfaitement liées par une relation linéaire; lorsque la corrélation est positive, les deux variables ont tendance à fluctuer à l'unisson; lorsqu'elle est négative, elles fluctuent en opposition l'une de l'autre. La corrélation a donc une signification intuitive plus claire que la covariance, au point que l'on comprendra peut-être mieux la signification de la covariance en lisant à l'envers la définition de la corrélation : la covariance est le produit de la corrélation et des écarts-type des deux variables. La covariance est donc une mesure conjointe du degré d'interdépendance et de la taille des aléas qui affectent les deux variables. On comprend qu'elle intervienne dans le calcul de la variance d'une somme : pour que les aléas de deux variables puissent se compenser, il faut non seulement qu'ils varient en sens inverse, mais encore qu'ils soient de tailles appropriées.

Comme dans le cas de l'espérance mathématique ou de la variance, on peut obtenir des estimateurs de la covariance; mais il faut alors disposer d'un échantillon de *paires* d'observations de X et Y . Soit l'échantillon $x_i, y_i, i = 1 \dots n$; on peut calculer un estimateur de la covariance grâce à la formule :

$$\text{est. cov}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}, \quad (5.11)$$

c'est-à-dire en prenant la moyenne des produits des écarts des observations de X et de Y par rapport à leurs moyennes respectives. Il est nécessaire d'avoir des observations simultanées de X et de Y pour pouvoir calculer leur covariance.

Lorsque l'on considère deux variables aléatoires X et Y qui ne sont pas indépendantes, il est souvent utile de déterminer dans quelle mesure la connaissance d'une réalisation x de X fournit des informations quant à la distribution de probabilité de Y . Cette relation entre une valeur x de X et la distribution de probabilité de Y est exprimée par la fonction de distribution ou de répartition *conditionnelle* définie par¹³ :

$$F(Y|x) = \frac{\text{Proba}[Y \leq y \text{ et } X = x]}{\text{Proba}[X = x]} \quad (5.12)$$

en application du théorème dit de Bayes.

Le concept de distribution conditionnelle est très important en finance à cause du rôle joué par le traitement de l'information sur les marchés finan-

13. La définition que nous donnons ici n'a de sens que si X est une variable aléatoire «discrète», c'est-à-dire, par exemple, une variable qui ne peut prendre que des valeurs entières. En effet, si X était une variable non discrète (prenant par exemple ses valeurs sur l'ensemble des réels), l'événement $X = x$ aurait une probabilité nulle. Il est cependant possible d'étendre cette définition aux variables non discrètes. Voir Métivier (1979), p. 130.

ciers¹⁴. Soit Y la rentabilité future d'un titre, que l'on cherche à prévoir, cependant que X est une information pertinente, susceptible d'aider à la prévision. Quand l'information X est connue et que l'on sait qu'elle prend la valeur x , la prévision de Y s'en trouve en général «améliorée». La distribution de probabilité conditionnelle est «plus précise» que la distribution de probabilité *a priori*¹⁵.

On associe à la distribution de probabilité conditionnelle, par la même méthode que précédemment, la notion d'espérance mathématique *conditionnelle*, notée $E(Y|x)$, ainsi que celle de la variance conditionnelle notée $\text{var}(Y|x)$ et même que celle générale de moment conditionnel. L'espérance mathématique conditionnelle de Y , étant donné la valeur x , est une fonction de x . Ce n'est plus, comme dans le cas de l'espérance mathématique normale, un simple nombre : elle donne la valeur centrale prévue de Y étant donné la valeur réalisée x .

Les espérances conditionnelles sont liées aux espérances inconditionnelles par la loi :

$$E[E(Y|x)] = E(Y). \quad (5.13)$$

Cette loi dit que l'espérance inconditionnelle de Y s'obtient à partir de l'espérance conditionnée par x en intégrant sur toutes les valeurs possibles des x pondérées par leurs probabilités. En fait, les mathématiciens utilisent la loi plus générale :

$$E[g(X) \cdot E(Y|x)] = E[g(X) \cdot Y], \quad \text{pour toute fonction } g, \quad (5.14)$$

comme définition de l'espérance conditionnelle¹⁶.

Il est quelquefois possible d'affirmer que $E(Y|x)$ est une fonction linéaire de x , ce qui revient à dire que Y est égale à une fonction linéaire de X plus un aléa d'espérance mathématique nulle étant donné x :

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon \quad E(\varepsilon|X) = 0. \quad (5.15)$$

Cette relation s'appelle une «régression de Y sur x » et le coefficient β s'appelle le «coefficient de régression». On peut vérifier que^{17 18} :

$$\frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)} = \beta. \quad (5.16)$$

14. Voir chapitre III.

15. Cf. Blackwell (1951).

16. Voir Métivier (1979).

17. $E(\varepsilon|x) = 0$ pour tout x implique en vertu de (5.14) que $\text{cov}(\varepsilon, X)$, qui est égal à $E(\varepsilon X)$, est nul.

18. Ne pas confondre coefficient de régression et coefficient de corrélation.

Il est souvent légitime d'estimer le coefficient bêta par la méthode dite «des moindres carrés» qui produit un estimateur de β égal au rapport des estimateurs de $\text{cov}(X, Y)$ et $\text{var}(X)$ déjà donnés.

6. Rappel d'optimisation

Nous supposerons toujours dans les développements à venir que les agents économiques prennent des décisions qui sont les meilleures possibles, au regard d'un critère bien défini qu'ils se fixent. L'optimisation de ce critère – encore appelé «fonction-objectif» – par un choix approprié de la valeur de la décision permet de représenter le comportement de l'agent¹⁹. Le cas d'optimisation le plus simple est *l'optimisation sans contrainte*.

Soit un agent souhaitant prendre une décision x qui soit la meilleure possible au regard d'un critère, ou d'une fonction-objectif, $f(x)$, à maximiser. Le calcul de la décision optimale se fait très simplement en remarquant que le sommet de la courbe représentant la fonction $f(x)$ est atteint en un point où la pente de la courbe est réduite à zéro. On le sait, la pente d'une fonction s'obtient en calculant la dérivée première; la valeur optimale x^* de x est donc telle que :

$$\frac{df}{dx}(x^*) = 0. \quad (6.1)$$

Cette équation – dite *condition du premier ordre*²⁰ – n'est qu'une condition nécessaire d'optimalité; il resterait à vérifier que le point obtenu est un maximum, et non pas un minimum ou un méplat. D'autre part, ce mode de calcul de la décision optimale suppose que le critère f soit différentiable par rapport à la décision x .

Dans le cas plus général où, non pas *une* décision, mais *plusieurs* doivent être prises simultanément – pour maximiser un critère qui dépend d'elles toutes – la valeur optimale de chacune des décisions peut être obtenue en égalant à zéro chacune des dérivées *partielles* de la fonction-objectif f ²¹. On a ainsi un système comportant autant d'équations qu'il y a de décisions à prendre, et qu'il suffit de résoudre.

19. Le chapitre II sera un exemple d'application de ce principe. Voir aussi un cours de microéconomie, par exemple : Varian (1978).

20. Car elle fait intervenir les dérivées premières de la fonction f .

21. Soit une fonction de deux variables $f(x, y)$. La dérivée partielle de f par rapport à x s'obtient par un calcul de dérivée dans lequel l'autre variable, y , est traitée comme une constante.

En économie, cependant, il est rare que l'on puisse optimiser sans contrainte. Des ressources limitées, l'équilibre nécessaire des recettes et des dépenses, etc., figurent parmi les contraintes que les agents économiques sont obligés de prendre en compte.

Imaginons que deux décisions x et y doivent être prises de façon à maximiser un critère $f(x, y)$, tout en respectant une contrainte $g(x, y) = 0$:

$$\begin{aligned} &\text{Max } f(x, y) \\ &\text{contrainte } g(x, y) = 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

La solution de ce problème peut être obtenue de deux manières différentes. La première est plus naturelle, mais moins souvent viable, que la seconde, dite «méthode de Lagrange», qui est beaucoup plus aisée à mettre en pratique.

La première méthode consiste à substituer la contrainte dans la fonction-objectif. On sait que les deux décisions à prendre x et y sont liées par la relation $g(x, y) = 0$ qui doit être obligatoirement vérifiée. Supposons que l'on puisse exprimer cette même contrainte sous la forme :

$$y = \Phi(x). \tag{6.3}$$

Pour la prendre en compte dans un problème d'optimisation, il suffit de substituer $y = \Phi(x)$ dans la fonction-objectif pour obtenir un nouveau critère à maximiser :

$$\text{Max}_x f(x, \Phi(x)). \tag{6.4}$$

On a alors un problème d'optimisation sans contrainte avec une seule décision x . Cependant, la méthode est en général de peu d'utilité car il est difficile de calculer la valeur de y satisfaisant $g(x, y) = 0$ pour chacune des valeurs de x , c'est-à-dire d'obtenir $y = \Phi(x)$.

La méthode de Lagrange, en revanche, mène facilement à un système de conditions d'optimalité. Elle consiste à modifier le critère $f(x, y)$, en y introduisant une «pénalité» qui prend effet en cas de violation de la contrainte, puis à ajuster le taux de cette pénalité de telle façon que les décisions satisfassent exactement la contrainte. En d'autres termes, on construit ce que l'on appelle un *lagrangien* :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y). \tag{6.5}$$

La «pénalité» est égale à la déviation par rapport à la contrainte, $g(x, y)$, multipliée par le «multiplicateur de Lagrange». Une fois le lagrangien construit, on a affaire à un problème d'optimisation qui est formellement sans contrainte et qui consiste à maximiser L par un choix approprié de trois variables de

décisions x, y et λ . Les conditions d'optimalité du premier ordre sont alors obtenues par dérivation partielle par rapport à ces trois variables :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Le système ainsi obtenu est un système de trois équations à trois inconnues qui permet de déterminer simultanément x, y et λ .

Sa solution peut être appréhendée par tous les moyens usuels, mais la signification économique du calcul est particulièrement claire lorsque l'on procède de la façon suivante : on résout d'abord les deux premières équations, d'où l'on obtient x et y en fonction de λ , c'est-à-dire les décisions en fonction de la pénalité. Puis on substitue les fonctions $x(\lambda)$ et $y(\lambda)$ ainsi obtenues dans la troisième équation, ce qui donne :

$$g(x(\lambda), y(\lambda)) = 0. \quad (6.7)$$

La solution de cette équation fournit la valeur λ telle que la contrainte soit exactement satisfaite (c'est à ce stade que l'on ajuste la pénalité). Il ne reste plus alors qu'à substituer, quand on le peut, la valeur de λ ainsi obtenue dans les fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ pour obtenir les décisions optimales.

La valeur du multiplicateur de Lagrange λ a une interprétation économique tout à fait intéressante : elle est égale à l'accroissement du critère f , par unité d'accroissement ou de déplacement de la contrainte²². Lorsque la contrainte est assouplie, il est en général possible d'atteindre une valeur plus élevée du critère f ; le multiplicateur λ indique à quel rythme se fait cette augmentation. Le multiplicateur fournit donc une indication sur le caractère plus ou moins « contraignant » de g .

Si, par exemple, la contrainte g reflète une limitation de ressource, le multiplicateur est une mesure du caractère plus ou moins précieux de ces ressources au regard du problème d'optimisation à résoudre. Si l'on envisage de faire l'acquisition d'une quantité accrue de ressources, on pourra prendre cette décision en comparant la valeur du multiplicateur au coût d'acquisition d'une unité. Le multiplicateur de Lagrange est un indice de rareté des ressources, assimilable à bien des égards à un prix.

22. $g(x, y) = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) plutôt que $g(x, y) = 0$.

Conclusion

Tout bon exposé de la théorie financière suppose connus les principes de base de la microéconomie, ceux de l'optimisation et ceux de la théorie des probabilités. Nous avons tout au plus fait la liste des outils dont nous ferons usage dans la suite de ce livre. S'il souhaite acquérir une certaine maîtrise de ces concepts, le lecteur est invité à se reporter aux trois manuels qui sont indiqués en bibliographie.

Il nous appartient maintenant de développer la théorie de l'équilibre (partiel) sur le marché financier. Pour ce faire, nous devons tout d'abord doter l'investisseur financier d'une fonction-objectif susceptible de rendre compte des choix qu'il fait entre les titres plus ou moins aléatoires (chapitre I). Il nous appartiendra ensuite de calculer effectivement ces choix, c'est-à-dire de déterminer les portefeuilles optimaux des individus (chapitre II), puis d'en déduire les prix d'équilibre sur un marché financier où intervient une collection donnée de tels individus (chapitre III).

Bibliographie

- Blackwell D., «The Comparison of Experiments», *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, 1951, p. 93-102.
- Varian H. R., *Microeconomic Analysis*, Norton, 1978.
- Métivier M., *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*, Dunod, 1978.
- Zisswiller R., *Microéconomie et analyse financière*, Dalloz, 1975.

PREMIÈRE PARTIE

L'ÉQUILIBRE SUR LE MARCHÉ DES ACTIONS

La valeur des titres financiers au moment même de la conclusion de l'offre et de la demande. La plupart des titres représentent des droits de dividendes, on suppose que la demande ne peut être satisfaite sans les droits de dividendes et les investisseurs les achètent. C'est en fait ce qui se passe, qui détermine la prime face de l'investisseur pour des titres plus ou moins risqués et pour les probabilités plus ou moins élevées d'un succès.

Les jeux de hasard fournissent une illustration géométrique intéressante d'appréhender l'aspect des probabilités en économie de capital. On voit ainsi un exemple d'application des probabilités, tels que Pascal et Fermat. L'idée est communément admise que l'aspect d'une action à court terme se présente de sorte que la probabilité d'un succès $p_1, \dots, p_n$ soit équilibrée par l'aspect négatif par l'aspect négatif $1 - p_1, \dots, 1 - p_n$.

Le problème de Saint-Petersbourg* peut être mathématiquement résolu par Nicholas Bernoulli en 1713, et par Daniel Bernoulli en 1738. Les solutions de ces deux problèmes, Gabriel Cramer et Daniel Bernoulli (1738), suggèrent de généraliser l'aspect de Pascal et Fermat. Il s'agit de trouver une façon de mesurer le gain de 200 francs au lieu de 100 francs, ou encore de 100 francs au lieu de 200 francs. On voit que le gain de 100 francs (100) est l'aspect négatif de la perte de 100 francs (100).

La solution de l'aspect négatif peut être trouvée en utilisant la notion de la perte et la notion de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte.

La solution de la perte peut être trouvée en utilisant la notion de la perte et la notion de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte.

La solution de la perte peut être trouvée en utilisant la notion de la perte et la notion de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte.

La solution de la perte peut être trouvée en utilisant la notion de la perte et la notion de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte. Les probabilités de la perte sont les probabilités de la perte de la perte.

PREMIERE PARTIE

Le premier effet de la hausse des prix des actions est la diminution de la demande pour les actions. Cette diminution de la demande pour les actions est due à la hausse des prix des actions. La hausse des prix des actions est due à la hausse des prix des actions. La hausse des prix des actions est due à la hausse des prix des actions.

La diminution de la demande pour les actions est due à la hausse des prix des actions. La hausse des prix des actions est due à la hausse des prix des actions. La hausse des prix des actions est due à la hausse des prix des actions. La hausse des prix des actions est due à la hausse des prix des actions. La hausse des prix des actions est due à la hausse des prix des actions.

La hausse des prix des actions est due à la hausse des prix des actions. La hausse des prix des actions est due à la hausse des prix des actions. La hausse des prix des actions est due à la hausse des prix des actions. La hausse des prix des actions est due à la hausse des prix des actions. La hausse des prix des actions est due à la hausse des prix des actions.

CHAPITRE PREMIER

L'attitude d'un individu rationnel vis-à-vis du risque

La valeur des titres financiers en bourse résulte de la confrontation de l'offre et de la demande. La plupart des titres rapportant des revenus aléatoires, on conçoit que la demande ne puisse être expliquée sans *un modèle du comportement des investisseurs face au risque*. C'est en effet ce comportement qui détermine la préférence de l'investisseur pour des titres plus ou moins risqués et pour les rentabilités plus ou moins élevées qu'il en attend.

Les jeux de hasard fournissent une base expérimentale commode permettant d'apprécier l'attitude des individus en situation de risque¹. Ils ont très tôt retenu l'attention des philosophes, tels Blaise Pascal et Pierre de Fermat. L'idée était communément admise par eux que l'attrait d'une loterie X ouvrant la perspective de gains $(x_1, \dots, x_n)$ avec les probabilités $(p_1, \dots, p_n)$ était intégralement mesuré par l'espérance mathématique $E(X) = \sum_i x_i p_i$.

Le paradoxe de Saint-Pétersbourg² posé par le mathématicien suisse Nicholas Bernoulli en 1728 devait entraîner la remise en cause de cette conception. Gabriel Cramer et Daniel Bernoulli (1738) suggérèrent de généraliser l'hypothèse de Pascal et Fermat : il n'y a aucune raison de penser qu'un gain de 200 francs ait aux yeux d'un joueur nécessairement deux fois la valeur d'un gain de 100 francs (l'un ou l'autre résultant de la même loterie). Ils émirent

1. Néanmoins l'analogie entre jeux de hasard et investissement en bourse ne va pas de soi et peut même fausser le raisonnement. En principe, les investisseurs en bourse ont pour seul but de gagner de l'argent, alors que les joueurs qui peuplent les casinos recherchent également, et peut-être surtout, le plaisir du jeu. Pour que l'analogie soit viable, il faut supposer que le plaisir du jeu s'identifie à la satisfaction de gagner.

2. Il s'agissait d'un jeu qui se jouait avec une pièce de monnaie. Le joueur ayant choisi «face» recevait 2^n francs si face sortait pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ lancé. Cet événement ayant une probabilité $1/2^n$ de se produire, l'espérance mathématique de ce jeu est infinie $\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 1/2^n = \infty \right)$. Pourtant il est évident qu'aucun être humain normalement constitué ne préférerait ce pari à une somme certaine importante. Il s'avérerait donc nécessaire de généraliser la thèse de Pascal et de Fermat pour rendre compte du comportement réel des individus.

l'idée qu'une fonction (croissante) concave³ devait être appliquée aux gains avant d'en prendre l'espérance mathématique. L'intérêt d'une telle transformation était de réduire l'attrait pour le joueur des valeurs très élevées du gain, telles que celles qui pouvaient résulter du jeu de Saint-Petersbourg. On admit donc que les individus possèdent ce que l'on appelle aujourd'hui une *fonction d'utilité*, et qu'ils évaluent les loteries, non pas sur la base de l'espérance mathématique du gain $E(X) = \sum_i x_i p_i$, mais sur celle de leur espérance d'utilité $E(u(X)) = \sum_i u(x_i) p_i$ ⁴.

Cette idée est l'origine historique de la *théorie de l'espérance de l'utilité*, qui ne devait trouver sa justification axiomatique qu'avec le *théorème de von Neumann et Morgenstern* (1947).

Ce théorème fait l'objet de la première section de ce chapitre. Puis, dans la section 2, nous introduisons la *théorie de l'aversion au risque* de Arrow (1965) et Pratt (1964). Nous montrons que l'attitude d'un investisseur vis-à-vis du risque résulte de la concavité de sa fonction d'utilité. Enfin, en section 3, nous présentons une panoplie des fonctions d'utilité les plus communément utilisées en économie financière.

1. La théorie de von Neumann, Morgenstern et Savage⁵

Toute théorie économique repose sur des hypothèses de comportement. Elles constituent la base axiomatique de la théorie. Toute hypothèse est critiquable : en la formulant, on risque d'exclure du champ de la théorie des modes de comportement insoupçonnés mais susceptibles d'expliquer certains phénomènes réels. Malgré tout, on ne peut admettre que les investisseurs se comportent de manière quelconque, car la théorie serait alors dénuée de conséquences et incapable de produire des énoncés. Elle serait donc inutilisable.

John von Neumann et Oskar Morgenstern cherchèrent à formuler des hypothèses sur les investisseurs en bourse qui mènent à une théorie économique

3. Une fonction $y = f(x)$ est dite concave si sa courbure est tournée vers le bas. Si f est croissante et concave, y croît à un rythme décroissant au fur et à mesure qu'on considère des valeurs de plus en plus élevées de x .

4. Grâce à cette transformation, le gain certain qui apporterait au parieur la même utilité que le jeu de Saint-Petersbourg est de l'ordre de 9 francs si la fonction U est, par exemple, une fonction logarithme (voir section 3), alors même que l'espérance mathématique du gain est, nous l'avons vu, infinie (voir le détail de ce calcul en note 31). Ce chiffre semble raisonnable et conforme à ce que nous savons intuitivement du comportement humain.

5. L'exposé ci-dessous s'inspire largement de Savage (1954), chap. 2-5, Arrow (1970) et Drèze (1974).

aisément manipulable, donc féconde⁶. Ces hypothèses assemblées constituent une définition possible de «l'homme rationnel». On entend par là un homme qui poursuit de façon systématique un objectif simple. Dans le cas présent, l'objectif simple est l'espérance mathématique de l'utilité.

Les concepts de base de la théorie de von Neumann et Morgenstern sont au nombre de trois :

- *l'ensemble S des possibles* ou des divers états de la nature (indicés s) : ils offrent une description du monde d'une précision telle que l'information selon laquelle tel ou tel état du monde doit prévaloir ne laisse subsister aucune incertitude aux yeux du décideur. Inversement, cette description du monde permet d'identifier objectivement l'état de nature qui survient⁷. Les états de la nature sont exclusifs les uns des autres : seul l'un d'eux survient, et jamais deux d'entre eux simultanément. Le tirage des états de la nature est supposé échapper entièrement au contrôle du décideur⁸. On peut par ailleurs définir un événement ou une circonstance comme étant un sous-ensemble de S ;

- *l'ensemble C des conséquences* (indicées c) : une conséquence est toute espèce de phénomène qui motive directement le décideur. Il s'agira toujours ici de gains pécuniaires;

- *l'ensemble A des actions* (indicées a) : une action a est toute application $c(a, s)$ de l'ensemble des états de la nature sur celui des conséquences.

La théorie de l'espérance de l'utilité résume les choix de l'homme rationnel au moyen de deux indices seulement :

- un indice qui s'applique aux *conséquences* que ses actions auront dans les différentes circonstances du futur; nous l'appelons «*l'utilité*» de ces conséquences;

- un indice qui s'applique aux différentes circonstances du futur et que nous appelons par commodité «*la probabilité* (subjective)» de ces circonstances, telle qu'elle est perçue par l'investisseur⁹.

6. Le cheminement de von Neumann et Morgenstern est l'inverse de celui de Gabriel Cramer et de Daniel Bernoulli. Cramer et Bernoulli avaient constaté qu'une théorie préexistante (celle de Pascal et Fermat) était trop restrictive puisqu'elle menait à une conclusion incompatible avec le comportement réel des hommes, à savoir une évaluation excessive du pari de Saint-Pétersbourg. Von Neumann et Morgenstern, au contraire, partent d'un comportement arbitraire de l'homme et cherchent, au moyen d'axiomes réputés vraisemblables, à le restreindre peu à peu jusqu'à ce qu'ils aboutissent eux aussi à la théorie de l'espérance de l'utilité.

7. Cette condition est sans intérêt dans l'immédiat; elle ne sera importante que lorsque la présente théorie s'appliquera aux contrats financiers conclus entre plusieurs parties. Voir les chapitres suivants.

8. C'est-à-dire qu'il n'y a pas de «risque de comportement» ou «risque moral».

9. Dans la théorie originelle exposée dans von Neumann et Morgenstern (1944), les probabilités des différentes circonstances étaient supposées données et ces auteurs avaient «seulement» démontré l'existence de l'indice d'utilité. Nous exposons en fait ici une théorie ultérieure due à Savage (1954) qui déduit simultanément du comportement supposé rationnel de l'individu l'existence des deux indices (voir aussi Ramsey (1926) et de Finetti (1937)). Cette nouvelle théorie évite donc d'avoir à justifier au préalable la notion de probabilité : les probabilités seront ici «révélées» par les décisions que prend l'individu (et pourront

TABLEAU 1.
Données

	Etat		
	α	β	γ
Action			
1	1	1	1
2	2	1	1
3	1	2	1
4	1	1	2
5	3	1	1
6	2	2	1
7	2	1	2
8	1	2	2
9	3	2	1
10	1	3	1
11	3	1	2
12	2	2	2
13	2	3	1
14	1	1	3
15	3	2	2
16	2	1	3
17	1	3	2
18	3	3	1
19	1	2	3
20	2	3	2
21	3	1	3
22	2	2	3
23	3	3	2
24	3	2	3
25	1	3	3
26	2	3	3
27	3	3	3

Il est souvent utile de décrire les éléments d'un problème de décision au moyen d'un tableau dont les colonnes correspondent aux différents états de la nature, dont les lignes correspondent aux actions, et dont le corps indique pour chaque action, a , et chaque état de la nature, s , la conséquence, $c(a, s)$, subie par le décideur. C'est sous cette forme que l'exemple qui illustre cette section est présenté au tableau 1. L'exemple fait référence à trois états de la

ensuite servir à les reproduire). On démontre ainsi que tout décideur a implicitement en tête des probabilités subjectives qui s'appliquent aux événements auxquels il est confronté. L'existence nécessaire de telles probabilités est intéressante, car elle permet de faire pièce aux objections de ceux qui prétendent que les hommes n'utilisent pas cette notion dans leurs décisions. Cependant, du point de vue empirique, seule l'expérimentation permet de mesurer les probabilités subjectives en tant que telles. La science économique étant plus souvent une science d'observation qu'une science d'expérimentation, on en est réduit, pour mesurer les probabilités, à supposer qu'elles s'identifient aux fréquences de réalisations effectivement observées (probabilités objectives).