Chapitre 1
Arithmétique

1. Les nombres

Les épreuves de mathématiques aux concours de catégorie C requièrent des connaissances précises en matière de calcul numérique. C'est principalement dans l'épreuve de QCM que celles-ci sont sollicitées.

Elles portent essentiellement sur des nombres particuliers : les multiples, les diviseurs, les puissances, les fractions et les racines carrées. Quand on ne manipule que des nombres entiers (naturels), on est dans le domaine de l'arithmétique.

Mais le modèle de raisonnement sur ces nombres entiers peut s'étendre aux nombres décimaux, ce qui peut s'avérer très utile, notamment dans les petits problèmes.

1. Multiples, diviseurs, nombres premiers

A. Diviseurs et multiples

Si a est un entier naturel qui s'écrit sous la forme d'un produit de deux entiers naturels non nuls :
$a = b \times c$, on peut dire que :
- a est un multiple de b, et a est un multiple de c ;
- a est divisible par b, et a est divisible par c ;
- b et c sont des diviseurs de a.

EXEMPLES

34 est divisible par 2 et par 17 car 34 = 17 x 2.

34 est multiple de 2 et de 17 car 34 = 17 x 2.

7 est un diviseur de 56 car 56 = 7 x 8.

B. Critères de divisibilité

Un nombre est divisible par :
2 si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8.
3 si la somme des chiffres est un multiple de 3.
5 si le dernier chiffre est 0 ou 5.
9 si la somme des chiffres est un multiple de 9.
10 si le dernier chiffre est 0.

EXEMPLES

60 est divisible par 2, par 3, par 5 et par 10.

72 est divisible par 2, par 3 et par 9.

C. Nombres premiers

- Un nombre premier est un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

EXEMPLE

17 (on ne peut le diviser par aucun des nombres inférieurs à 17 (≠ 1)).

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 50 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 (il est utile de connaître au moins les 8 premiers).

- Pour prouver qu'un nombre entier est premier, il suffit de vérifier qu'il n'est divisible par aucun nombre premier plus petit que lui (le dernier nombre à vérifier doit être inférieur ou égal à sa racine carrée).

EXEMPLES

221 est-il premier ?

15 x 15 = 225. On vérifie s'il est divisible par les nombres premiers de la liste jusqu'à 13 : 2 non, 3 non, 5 non, 7 non, 11 non, 13 oui car 221 = 13 x 17.

221 n'est pas premier.

127 est-il premier ?

12 x 12 = 144. On vérifie s'il est divisible par les nombres premiers de la liste jusqu'à 13 : 2 non, 3 non, 5 non, 7 non, 11 non, 13 non.

127 est premier.

- Deux entiers naturels sont **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun est 1.

EXEMPLES

21 et 25 ne sont pas premiers mais sont premiers entre eux : leur seul diviseur commun est 1.

35 et 50 ne sont pas premiers entre eux car ils sont divisibles par 5.

> Remarque
> **On dira qu'une fraction est irréductible si le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.**

- Décomposer un entier naturel en produit de facteurs premiers, c'est l'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers.

EXEMPLES

2016 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 7

273 = 3 x 7 x 13

D. Plus petit multiple commun (PPCM)

Le PPCM de deux entiers est le plus petit entier naturel qui soit multiple simultanément de ces deux entiers.

EXEMPLE 1

15 et 24.

Nous allons calculer le PPCM de 15 et de 24 de deux manières différentes.

Méthode n° 1

Nous écrivons simultanément les multiples des deux nombres et nous repérons le premier qui leur soit commun après 0.

Les multiples de 15 sont : 0 ; 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; 75 ; 90 ; 105 ; $\underline{120}$; …

Les multiples de 24 sont : 0 ; 24 ; 48 ; 72 ; 96 ; $\underline{120}$; …

Le PPCM de 15 et de 24 est donc 120.

Méthode n° 2

Nous utilisons les décompositions en facteurs premiers de 15 et 24.

15 = 3 x 5

24 = 2 x 2 x 2 x 3 soit (2^3 x 3)

Dans la décomposition du plus petit multiple commun apparaîtront tous les facteurs qui figurent dans l'un au moins de ces produits ; s'ils ont des exposants, on leur attribue le plus grand exposant présent.

Le PPCM de 15 et de 24 est donc 2 x 2 x 2 x 3 x 5 = 120 soit (2^3 x 3 x 5).

EXEMPLE 2

56 et 60.

On décompose chaque nombre en produit de nombres premiers.

56 = 2 x 2 x 2 x 7 soit (2^3 x 7)

60 = 2 x 2 x 3 x 5 soit (2^2 x 3 x 5)

Le PPCM de 56 et de 60 est donc 2 x 2 x 2 x 3 x 5 x 7 = 840 soit (2^3 x 3 x 5 x 7).

E. Plus grand diviseur commun (PGCD)

Le PGCD de deux entiers est le plus grand nombre entier qui peut diviser les deux nombres en même temps.

EXEMPLE 1

15 et 24. Nous allons calculer le PGCD de 15 et de 24 de trois manières différentes.

Méthode n° 1

Nous écrivons simultanément les diviseurs des deux nombres et nous repérons le plus grand qui soit commun.

Les diviseurs de 15 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 15.

Les diviseurs de 24 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24.

Le PGCD de 15 et de 24 est donc 3.

Méthode n° 2

Nous utilisons l'algorithme d'Euclide, qui consiste à effectuer une suite de divisions :

– on effectue la division de 24 (le plus grand) par 15 (le plus petit) et on note *r* le reste ;

– ensuite, on divise 15 par le reste *r* ;

– et on continue ainsi de suite jusqu'à ce qu'une division donne un reste égal à 0.

Dans cette méthode, le PGCD est le dernier reste non nul.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 15 \\ \cline{2-2} 9 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 9 \\ \cline{2-2} 6 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 6 \\ \cline{2-2} \underline{\mathbf{3}} & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$

Le PGCD de 15 et de 24 est donc 3.

Méthode n° 3

Nous utilisons les décompositions en facteurs premiers de 15 et 24.

15 = 3 x 5

24 = 2 x 2 x 2 x 3 soit (2^3 x 3)

Le PGCD de 15 et de 24 est composé des facteurs communs dans la décomposition, donc ici 3.

EXEMPLE 2

56 et 60.

On décompose chaque nombre en produit de nombres premiers.

56 = 2 x 2 x 2 x 7 soit (2^3 x 7)

60 = 2 x 2 x 3 x 5 soit (2^2 x 3 x 5)

Le PGCD de 56 et de 60 est donc 2 x 2 = 4 soit (2^2).

2. Puissance entière d'un nombre et écriture

A. Définition

Il est commode d'écrire plus simplement une suite de produits d'un même nombre.

EXEMPLE

4 x 4 s'écrit 4^2 et se lit « 4 au carré » ou « 4 à la puissance 2 ».

4 x 4 x 4 s'écrit 4^3 et se lit « 4 au cube » ou « 4 à la puissance 3 ».

4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 s'écrit 4^6 et se lit « 4 à la puissance 6 ».

4^p est le produit de *p* facteurs 4.

B. Propriétés

Elles ne concernent que les produits et les quotients.

EXEMPLES

$(a^n)^p = a^{n \times p}$

$a^n \times a^p = a^{n+p}$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$a^0 = 1 ; a^1 = a$

$\frac{1}{a} = a^{-1} \quad ; \quad \frac{1}{a^p} = a^{-p} \quad \text{avec } a \neq 0$

$(4^2)^3 = 4^6$

$4^2 \times 4^3 = 4^5$

$(4 \times 5)^3 = 4^3 \times 5^3$

$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3}$

$\frac{4^5}{4^2} = 4^3$

$\frac{1}{4^6} = 4^{-6}$

C. Calculs

Si on veut écrire un produit (ou un quotient) sous la forme d'un produit de facteurs premiers, on décompose les nombres, puis on utilise les propriétés.

EXEMPLE 1

Le produit 42 x 36 x 400.

42 x 36 x 400 = (6 x 7) x (4 x 9) x (4 x 4 x 25)

42 x 36 x 400 = (2 x 3 x 7) x (2 x 2 x 3 x 3) x (2 x 2 x 2 x 2 x 5 x 5)

42 x 36 x 400 = $2^7 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$

EXEMPLE 2

Le quotient $\frac{36}{400}$

$\frac{36}{400} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5}$ peut s'écrire soit $3^2 \times 2^{-2} \times 5^{-2}$ soit $\frac{3^2}{2^2 \times 5^2}$

- **Puissances de 10**

Elles sont très utiles avec les grands nombres.

En utilisant les propriétés précédentes, on peut retenir, par exemple :

$1\,000 = 10^3$; $1\,000\,000 = 10^6$; $10 = 10^1$; $0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$; $0{,}0001 = \frac{1}{10\,000} = 10^{-4}$

3. Racine carrée d'un nombre

A. Définition

Pour tout nombre ***a* positif**, il existe un nombre ***b* positif** tel que ***b*² = *a***. On dit que *b* est la racine carrée de *a* et on note $b=\sqrt{a}$

EXEMPLE

$\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$.

B. Remarques

$\sqrt{a^2} = a$ et $(\sqrt{a})^2 = a$ **EXEMPLE :** $\sqrt{6^2} = 6$; $(\sqrt{6})^2 = 6$

C. Opérations

- **Multiplication**

$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ **EXEMPLE :** $\sqrt{6} \times \sqrt{5} = \sqrt{30}$

- **Quotient**

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ **EXEMPLE :** $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

- **Remarque**

$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ **EXEMPLE :** $\sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}$

- **Concrètement**

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{\sqrt{16 \times 2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$2\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + 2\sqrt{27} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{4 \times 3} + 2\sqrt{9 \times 3} = 2\sqrt{3} - 3 \times 2\sqrt{3} + 2 \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

2. Des fractions aux nombres

Lorsqu'il s'agit de fractions, on ne retient souvent que les méthodes d'exécution des opérations selon des règles apprises mais généralement méconnues.

Le calcul fractionnaire est très présent dans les classes mais, dans la vie quotidienne, nous ne l'utilisons que rarement, l'emploi des nombres décimaux étant beaucoup plus commode.

Toutefois, la maîtrise de ce calcul est sollicitée dans les sujets de concours, directement ou par le biais du calcul d'une grandeur (pour les échelles, par exemple).

Il est donc indispensable d'être à l'aise dans les différents calculs qui suivent.

1. Qu'est-ce qu'une fraction ?

Une fraction est un quotient de deux nombres entiers *a* et *b* : $\frac{a}{b}$.

2. Fraction $\frac{a}{b}$ d'une quantité

Un support très utile :

Quantité $\xrightarrow{:\,b}$ $\xrightarrow{\text{x } a}$ Part

Pour calculer ce que représente la fraction d'une quantité, plusieurs méthodes sont donc à votre disposition.

EXEMPLE

Pour calculer les $\frac{3}{4}$ de 240, il faut calculer 240 x $\frac{3}{4}$ et on peut :

– soit multiplier 240 par 3 puis diviser par 4 : (240 x 3) : 4 = 180

240 $\xrightarrow{\text{x } 3}$ $\xrightarrow{:\,4}$ 180

– soit diviser par 4 puis multiplier par 3 : (240 : 4) x 3 = 180

240 $\xrightarrow{:\,4}$ $\xrightarrow{\text{x } 3}$ 180

– soit calculer d'abord le quotient de 3 par 4 (car cela est possible) : (3 : 4) x 240 = 0,75 x 240 = 180.

3. Fractions équivalentes

Quand on multiplie (ou divise) le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre non nul, on obtient une fraction équivalente à la précédente.

EXEMPLE

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{40}{60} = \frac{84}{126}$$

Cette propriété permet de simplifier (écrire sous la forme la plus réduite) la fraction.
Quand on ne peut plus simplifier, on dit que la fraction est irréductible.

EXEMPLES

Simplifier la fraction $\frac{28}{32}$:

c'est par exemple l'écrire sous la forme $\frac{14}{16}$ ou sous la forme $\frac{7}{8}$.

La forme $\frac{7}{8}$ est une fraction irréductible.

Rendre irréductible la fraction $\frac{42}{105}$:

comme 42 = 2 x 3 x 7 et 105 = 3 x 5 x 7, $\frac{42}{105} = \frac{2 \times 3 \times 7}{3 \times 5 \times 7}$

On peut diviser le numérateur et le dénominateur par 3 x 7 donc $\frac{42}{105}$ s'écrit sous la forme irréductible $\frac{2}{5}$.

4. Réduction au même dénominateur

Lorsque deux fractions ont des dénominateurs différents, il peut être utile (pour pouvoir les comparer, les additionner ou les soustraire) de les réduire au même dénominateur, c'est-à-dire de les remplacer par des fractions équivalentes, ayant le même dénominateur.

EXEMPLE

$\frac{5}{12}$ et $\frac{7}{15}$.

Le dénominateur commun est un multiple des deux dénominateurs. Choisir le plus petit facilite souvent les calculs (c'est le PPCM des deux dénominateurs).

Ici, c'est 60 : $\frac{5}{12} = \frac{25}{60}$ et $\frac{7}{15} = \frac{28}{60}$.

5. Produit de fractions

Pour multiplier des fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

EXEMPLE

$$\frac{3}{7} \times \frac{5}{12} = \frac{3 \times 5}{7 \times 12} = \frac{15}{84}$$

Il est souvent demandé de présenter le résultat sous la forme d'une fraction irréductible (simplifiée). Pour cette raison, certains calculs intermédiaires sont conseillés.

EXEMPLE

$$\frac{3}{7} \times \frac{5}{12} = \frac{3 \times 5}{7 \times 12} = \frac{3 \times 5}{7 \times 4 \times 3} = \frac{5}{28}$$

6. Quotient de fractions

Pour diviser un nombre par une fraction, il suffit de multiplier ce nombre par la fraction inversée.

EXEMPLE

$$\frac{3}{7} : \frac{6}{11} = \frac{3}{7} \times \frac{11}{6} = \frac{3 \times 11}{7 \times 6} = \frac{3 \times 11}{7 \times 2 \times 3} = \frac{11}{14}$$

7. Somme et différence de fractions

Pour additionner (ou soustraire) des fractions ayant le même dénominateur, il suffit d'additionner (ou soustraire) leurs numérateurs en conservant le dénominateur commun.

EXEMPLES

$\frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$ $\qquad$ $\frac{23}{60} + \frac{16}{60} = \frac{39}{60}$

Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on les réduit au même dénominateur ; ensuite, on applique la règle ci-dessus.

EXEMPLE

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{10} = \frac{25}{40} + \frac{28}{40} = \frac{25 + 28}{40} = \frac{53}{40}$$

Remarque 1

Un nombre entier est une fraction dont le dénominateur est 1.

EXEMPLE

$$3 = \frac{3}{1}$$

Remarque 2

Dans les calculs, une fraction pourra être remplacée :

- **par sa valeur exacte si elle existe;**
- **par une valeur approchée uniquement pour donner un résultat.**

En aucun cas on n'utilisera une valeur approchée d'une fraction dans les calculs intermédiaires.

Remarque 3

Fractions décimales

$\frac{1}{10} = 0{,}1$ se dit : un dixième

$\frac{1}{100} = 0{,}01$ se dit : un centième (ou 1 pour cent : 1 %)

$\frac{1}{1\,000} = 0{,}001$ se dit : un millième (ou 1 pour mille : 1 ‰)

En résumé

Comment multiplier des fractions

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} \quad \text{(avec b et c} \neq 0)$$

Comment diviser par une fraction

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} \quad \text{(avec b, c, d} \neq 0)$$

Comment additionner des fractions de même dénominateur

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c} \quad \text{(si c} \neq 0)$$

Comment soustraire des fractions de même dénominateur

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c} \quad \text{(si c} \neq 0)$$

3. De la proportionnalité dans tous les domaines

La connaissance de ce champ des mathématiques, qui fait partie du domaine de l'arithmétique, est essentielle pour avoir le maximum de chance de réussir l'épreuve de mathématiques des concours de catégorie C. Vous trouverez dans cette partie les réponses à vos questions.

Dans chaque type de concours, le calcul de pourcentage occupe une place très importante. C'est pourquoi vous trouverez ici les différents types de calcul demandés régulièrement dans les problèmes, les QCM et le tableau numérique.

La présentation sous la forme d'**opérateurs** permet notamment de visualiser la bonne opération.

Quel que soit le calcul que vous avez à réaliser, ne vous découragez pas. Dans les calculs de variation (augmentation ou diminution de pourcentage) en particulier, de nombreux candidats rencontrent des difficultés. Revenez à plusieurs reprises sur les exercices et sur leur correction, jusqu'à ce que vous ayez bien compris le mécanisme. À la fin, vous direz «*eurêka*» !

1. Qu'est-ce que la proportionnalité ?

Il s'agit d'une relation particulière entre les mesures de deux grandeurs ou entre deux suites de nombres. Ces deux suites de nombres doivent être multiples l'une de l'autre.

Deux grandeurs sont donc proportionnelles si, lorsqu'on multiplie la valeur de la première par un nombre, la valeur de la seconde est multipliée par le même nombre.

EXEMPLE

Prenons 1 kilo de pommes qui coûte 1,40 €.

Le prix des pommes est proportionnel à leur poids car si l'on achète 4 kilos de pommes, on paie 4 fois le prix d'un kilo, soit 5,60 €.

La proportionnalité est une notion qui revient très souvent dans les sujets de concours car elle a de multiples applications : les pourcentages, les proportions, les échelles, les vitesses, par exemple.

2. Quel type de problème peut-on rencontrer ?

On distingue trois types de proportionnalité :
- la proportionnalité simple et directe ;
- la proportionnalité simple et composée ;
- la proportionnalité multiple.

Un problème de proportionnalité simple et directe met en jeu deux grandeurs dont on ne considère, pour chacune, que deux valeurs. Trois données et une inconnue sont proposées la plupart du temps. On parle alors de **règle de trois**.

Si la situation est plus complexe, il faut parvenir à la ramener à la situation précédente.

On dit souvent que l'on a affaire à des problèmes de «quatrième proportionnelle» quand on recherche la valeur inconnue.