

*f'intègre*

Jean-Dominique Mosser  
Jacques Tanoh  
Jean-Jacques Marchandau

# SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

MÉTHODES ET EXERCICES

1<sup>re</sup> ET 2<sup>e</sup> ANNÉES

DUNOD

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
<p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>		

© Dunod, Paris, 2012  
 ISBN 978-2-10-055980-0

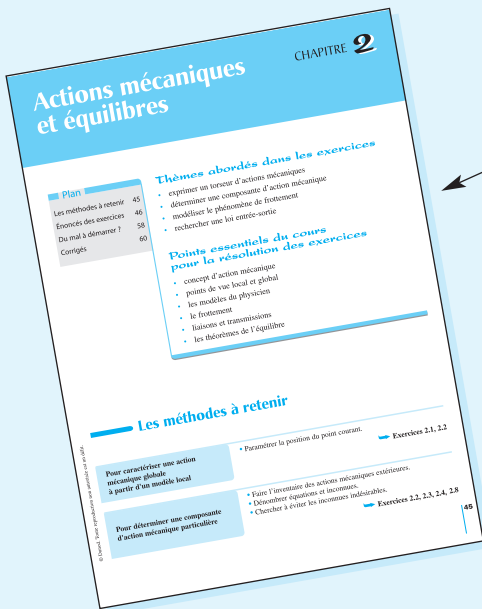
Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

<b>1. Cinématique des systèmes de solides</b>	<b>1</b>	Du mal à démarrer ?	120
Les méthodes à retenir	1	Corrigés des exercices	121
Énoncés des exercices	3		
Du mal à démarrer ?	19		
Corrigés des exercices	21		
<b>2. Actions mécaniques et équilibres</b>	<b>45</b>	<b>5. Automatique des systèmes continus</b>	<b>139</b>
Les méthodes à retenir	45	Les méthodes à retenir	140
Énoncés des exercices	46	Énoncés des exercices	141
Du mal à démarrer ?	58	Du mal à démarrer ?	162
Corrigés des exercices	60	Corrigés des exercices	163
<b>3. Mécanismes</b>	<b>79</b>	<b>6. Performances des systèmes asservis</b>	<b>203</b>
Les méthodes à retenir	80	Les méthodes à retenir	203
Énoncés des exercices	80	Énoncés des exercices	205
Du mal à démarrer ?	91	Du mal à démarrer ?	228
Corrigés des exercices	92	Corrigés des exercices	230
<b>4. Dynamique</b>	<b>109</b>	<b>7. Automatique des systèmes discrets</b>	<b>270</b>
Les méthodes à retenir	109	Les méthodes à retenir	273
Énoncés des exercices	110	Énoncés des exercices	274
		Du mal à démarrer ?	279
		Corrigés des exercices	280

# Pour bien utiliser cet ouvrage



## La page d'entrée de chapitre

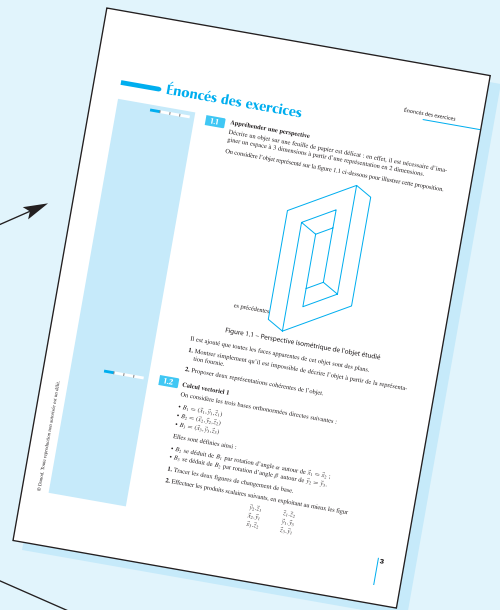
Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.

## Les méthodes à retenir

Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.

## Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.

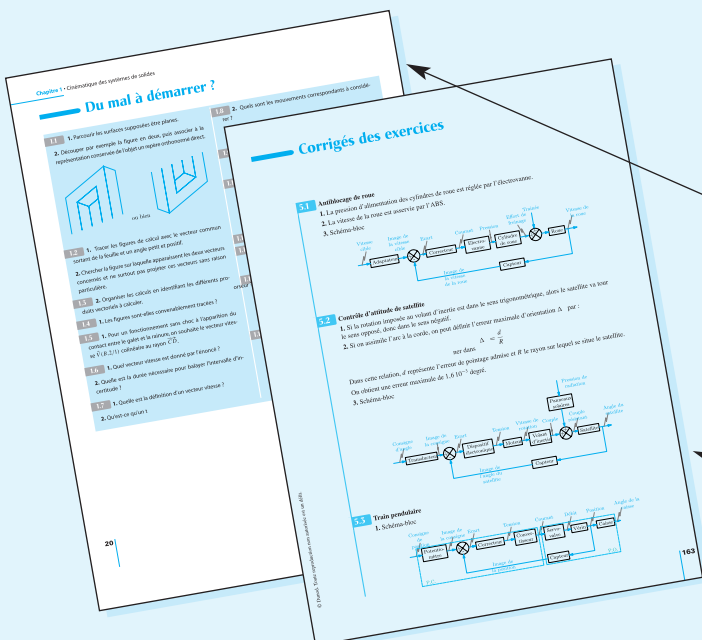


## Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.

## Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.



## Plan

Les méthodes à retenir	1
Énoncés des exercices	3
Du mal à démarrer ?	20
Corrigés	21

## Thèmes abordés dans les exercices

- se repérer dans l'espace
- acquérir les techniques de calcul vectoriel
- déterminer la nature d'un mouvement
- déterminer un vecteur vitesse, un vecteur accélération
- composer des mouvements
- déterminer les lois entrée-sorties pour des mécanismes simples
- évaluer des performances cinématiques et géométriques

## Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- notion de solide indéformable, de repère orthonormé direct
- notion de mouvement
- translation, rotation, roulement sans glissement
- notion de liaison
- figures de calcul
- produits scalaires, produits vectoriels et produits mixtes
- dérivation vectorielle
- composition des mouvements
- champ de vecteurs équiprojectifs et relation de changement de point

## Les méthodes à retenir

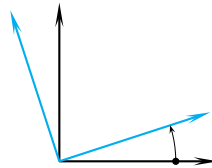
**Pour tracer ou interpréter  
une perspective**

- S'appuyer sur les projections d'un repère orthonormé direct.

➔ Exercice 1.1

Pour calculer produits scalaires et produits vectoriels

- Utiliser les figures de calcul :
  - tracées avec le vecteur normal sortant de la feuille ;
  - tracées avec un angle petit et positif



➔ Exercices 1.2, 1.3, 1.4

Pour tracer des lois horaires

- Mettre en œuvre les relations de dérivation entre position et vitesse.

➔ Exercice 1.5

Pour associer dérivation vectorielle et relation de changement de point

- Utiliser un paramétrage cohérent avec le mouvement considéré.

➔ Exercice 1.7

Pour tracer un champ de vecteurs vitesse

- Utiliser l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse.
- Identifier le centre instantané de rotation.

➔ Exercice 1.6

Pour identifier et tracer des trajectoires

- Chercher les caractéristiques du mouvement concerné.

➔ Exercice 1.8

Pour identifier un mouvement de translation

- Montrer que le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(i/k)$  du mouvement  $i/k$  concerné est à chaque instant le vecteur nul.

➔ Exercice 1.9

Pour exprimer le roulement sans glissement

- Identifier le point concerné, ainsi que le mouvement à considérer.

➔ Exercices 1.10, 1.11, 1.12, 1.13

Pour déterminer une loi entrée-sortie

- Dénombrer les inconnues et chercher à éviter celles qui sont indésirables.

➔ Exercices 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14

Pour déterminer des lois de commande

- Mettre en relation les approches fonctionnelles et structurelles.

➔ Exercice 1.15

Pour aborder la cinématique d'un mécanisme complexe

- Mettre en œuvre l'ensemble des compétences acquises.

➔ Exercice 1.16

# Énoncés des exercices

## 1.1 Appréhender une perspective

Décrire un objet sur une feuille de papier est délicat : en effet, il est nécessaire d'imaginer un espace à 3 dimensions à partir d'une représentation en 2 dimensions.

On considère l'objet représenté sur la figure 1.1 ci-dessous pour illustrer cette proposition.

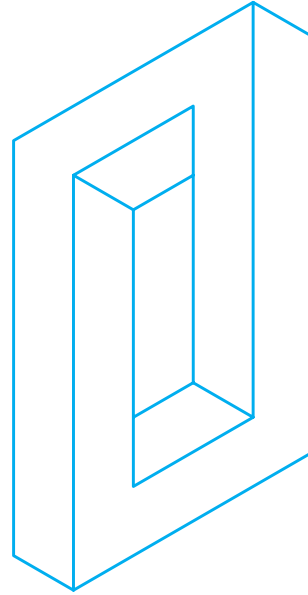


Figure 1.1 – Perspective isométrique de l'objet étudié

Il est ajouté que toutes les faces apparentes de cet objet sont des plans.

1. Montrer simplement qu'il est impossible de décrire l'objet à partir de la représentation fournie.
2. Proposer deux représentations cohérentes de l'objet.

## 1.2 Calcul vectoriel 1

On considère les trois bases orthonormées directes suivantes :

- $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- $B_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

Elles sont définies ainsi :

- $B_2$  se déduit de  $B_1$  par rotation d'angle  $\alpha$  autour de  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$  ;
- $B_3$  se déduit de  $B_2$  par rotation d'angle  $\beta$  autour de  $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$ .

1. Tracer les deux figures de changement de base.
2. Effectuer les produits scalaires suivants, en exploitant au mieux les figures précédentes

$$\begin{array}{ll} \vec{y}_2 \cdot \vec{z}_1 & \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 & \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_3 \\ \vec{x}_3 \cdot \vec{z}_2 & \vec{z}_3 \cdot \vec{y}_1 \end{array}$$

3. Calculer de même les produits vectoriels proposés ci-dessous

$$\begin{array}{ll} \vec{z}_2 \wedge \vec{x}_1 & \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_3 \\ \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_1 & \vec{y}_3 \wedge \vec{y}_2 \\ \vec{x}_3 \wedge \vec{x}_2 & \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_3 \end{array}$$

### 1.3 Calcul vectoriel 2

On considère quatre bases orthonormées directes :

$$\begin{array}{ll} B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) & B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \\ B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) & B_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3) \end{array}$$

Elles sont définies ainsi :

- $B_2$  se déduit de  $B_1$  par rotation d'angle  $\psi$  autour de  $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$  ;
- $B$  se déduit de  $B_2$  par rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\vec{x}_2 = \vec{u}$  ;
- $B_3$  se déduit de  $B$  par rotation d'angle  $\varphi$  autour de  $\vec{w} = \vec{z}_3$ .

1. Réaliser les différentes figures de changement de base.

On donne un vecteur  $\vec{\Omega} = p\vec{z}_1 + q\vec{x}_2 + r\vec{z}_3$  et un vecteur  $\vec{U} = b\vec{z}_3$

2. Calculer le produit vectoriel  $\vec{\Omega} \wedge \vec{U}$ .

### 1.4 Calcul vectoriel 3

On considère les trois bases orthonormées directes suivantes :

- $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$
- $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- $B_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

Elles sont déduites les unes par rapport aux autres par les deux rotations décrites sur les figures ci-dessous

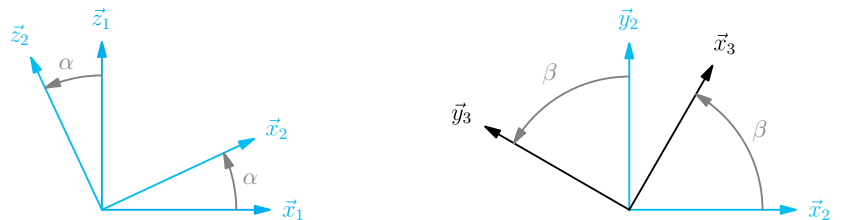


Figure 1.2 – Les figures de calcul proposées

1. Commenter les deux figures de changement de base fournies.

2. Effectuer les calculs suivants :

$$\begin{array}{ll} \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_2 & \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_2 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{z}_1 & \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_1 \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_3 & \vec{y}_2 \wedge \vec{x}_3 \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_3 & \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_3 \end{array}$$



## 1.5 Croix de Malte

Un mécanisme à croix de Malte est composé :

- d'une partie menante : roue ou manivelle sur laquelle sont montés un ou plusieurs galets ;
- d'une partie menée : croix de Malte comportant des rainures radiales régulièrement réparties.

Au cours de la rotation de la roue menante, chaque galet s'engage dans une rainure, entraînant la croix en rotation, puis se dégage. À chaque passage, la croix de Malte tourne donc d'un angle donné.

Soit un mécanisme à un galet et trois rainures ébauché sur la figure ci-dessous :

- le bâti est repéré 1 et on suppose l'entraxe  $AC = e$  fixé ;
- la roue menante, repérée 2, est en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1, et porte un galet de diamètre  $d$  ;
- la croix de Malte, repérée 3, est en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1.

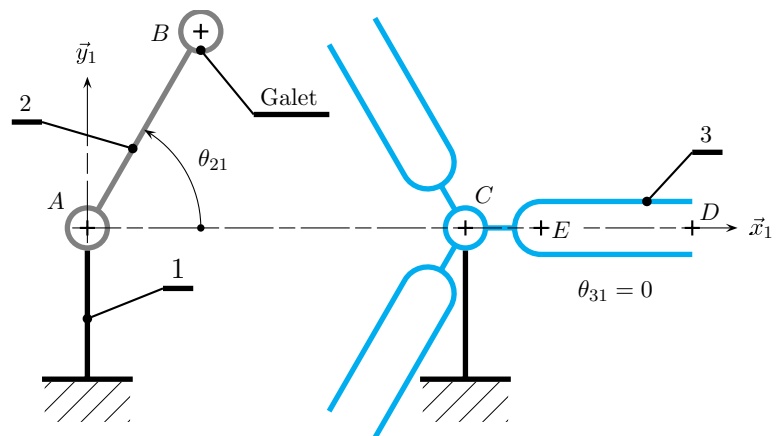


Figure 1.3 – Schéma de principe d'une croix de Malte

On désire un fonctionnement sans choc, c'est-à-dire que le galet s'engage suivant l'axe de la rainure.

1. Déterminer par la méthode de votre choix et en fonction de l'entraxe  $e$  les valeurs des trois paramètres géométriques suivants pour que le fonctionnement souhaité soit possible :

- la longueur  $AB = L$  ;
- la longueur  $CD = R$  ;
- la profondeur des rainures  $ED = h$ .

Soient  $\theta_{21}$  la position angulaire et  $\omega_{21}$  la fréquence de rotation supposée uniforme de la roue menante par rapport au bâti.

2. Sans calcul préliminaire particulier et pour deux tours de la roue menante 2, donner l'allure des courbes  $\theta_{31}$  et  $\omega_{31}$  en fonction de  $\theta_{21}$ , et matérialiser sur ces courbes les points remarquables.

## 1.6 Robot piqueur

Soit un robot piqueur à structure parallèle tel que présenté sur la figure 1.4 ci-dessous. Il comprend un bâti repéré 0, un porte-préhenseur repéré 3 et trois sous-structures identiques  $a$ ,  $b$  et  $c$ , composées chacune de :

- un bras repéré  $1_i$  en mouvement de rotation d'axe à nommer  $(O_i, \vec{z}_i)$  par rapport au bâti ;
- deux tiges identiques  $2_i$  et  $4_i$ , avec
  - la tige  $2_i$  en liaison sphérique de centre à repérer  $A_i$  avec le bras et en liaison sphérique de centre à repérer  $B_i$  avec le porte-préhenseur,
  - la tige  $4_i$  en liaison sphérique de centre à repérer  $C_i$  avec le bras et en liaison sphérique de centre à repérer  $D_i$  avec le porte-préhenseur.

Cette architecture permet au préhenseur de se déplacer en translation spatiale par rapport au bâti lorsque sont pilotées les trois rotations par rapport au bâti des arbres  $1_a$ ,  $1_b$  et  $1_c$ .

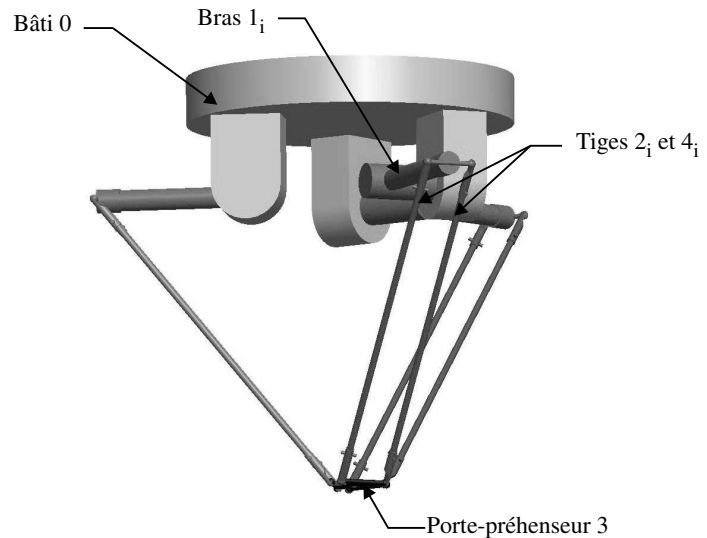


Figure 1.4 – Architecture du robot piqueur

On s'intéresse à quelques performances en vitesse et en précision.

Lorsque le robot est dans une position symétrique des trois bras et que ces trois bras ont à chaque instant la même position angulaire par rapport au bâti, le mouvement du porte-préhenseur par rapport au bâti est une translation verticale. On peut restreindre dans ce cas l'étude au mécanisme à mouvements plans décrit sur la figure 1.5 et constitué de :

- un bâti 0 ;
- un bras repéré 1 en rotation d'axe  $(O, \vec{z})$  par rapport au bâti, générée par un moteur ;
- une tige 2 en mouvement de rotation d'axe  $(A, \vec{z})$  par rapport au bras 1 ;
- un porte-préhenseur 3 en mouvement de translation verticale par rapport au bâti 0 et en mouvement de rotation d'axe  $(B, \vec{z})$  par rapport à la tige 1.

Le mécanisme est représenté en position de référence. Pour les besoins d'échelle des longueurs, on note qu'une tige est caractérisée par  $AB = 800$  mm. Dans cette position, les performances annoncées sont une vitesse verticale du porte-préhenseur de  $+1$  m/s et une précision de  $\pm 0,1$  mm selon la verticale.

1. Déterminer la vitesse de rotation  $\omega_{10}$  du bras par rapport au bâti.
2. En déduire la précision angulaire de positionnement du bras qui permette d'obtenir le bon positionnement du porte-préhenseur.

Pour représenter les vecteurs vitesse, prendre  $1 \text{ m/s} \longleftrightarrow 50 \text{ mm}$

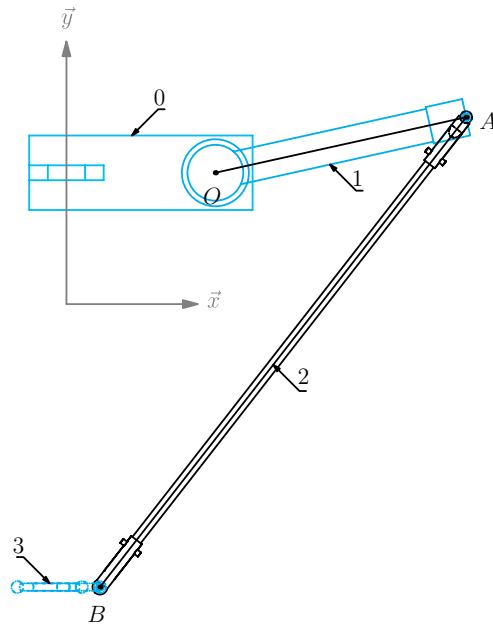
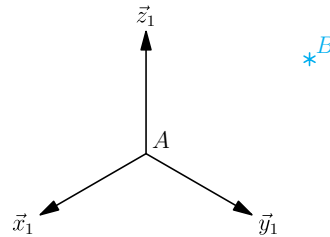


Figure 1.5 – Figure pour les constructions graphiques

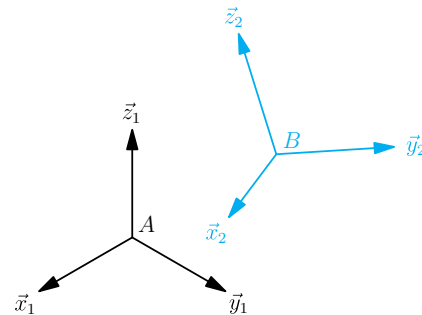
### 1.7 Mouvement d'un point

Un point  $B$  peut être considéré de deux manières différentes :

- soit un point géométrique en mouvement par rapport à un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;



- soit un point fixe dans un solide  $S$  en mouvement par rapport à un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  :  
– on associe alors au solide  $S$  un repère  $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ ,



- on pose le torseur cinématique associé au mouvement 2/1 considéré.

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(C, 2/1) \end{cases}$$

1. Exprimer dans le premier cas le vecteur vitesse du point  $B$  géométrique  $\vec{V}(B/1)$ .
2. Exprimer dans le second cas le vecteur vitesse  $\vec{V}(B,2/1)$ .
3. À quelle(s) condition(s) les deux propositions précédentes sont-elles équivalentes ?

### 1.8 Mécanisme à excentrique

On considère le mécanisme à excentrique schématisé ci-dessous, que l'on étudie en mouvement plan. Il comprend trois solides :

- un bâti 1, auquel est associé un repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- un excentrique 2, en liaison pivot d'axe la droite  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti. On lui associe une base  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  en choisissant  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ , puis on pose  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  et  $\vec{AC} = e \vec{x}_2$ . Cet excentrique comporte dans le plan  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$  un cercle de centre  $C$  et de rayon  $R$  ;
- un piston 3, en liaison pivot glissant d'axe  $(A, \vec{y}_1)$  avec le bâti 1. La rotation possible n'est pas exploitée dans cet exercice et on lui associe alors une base 3 confondue avec la base 1.

Ce piston comporte une droite  $(B, \vec{x}_3)$  en contact avec l'excentrique en un point  $I$ .

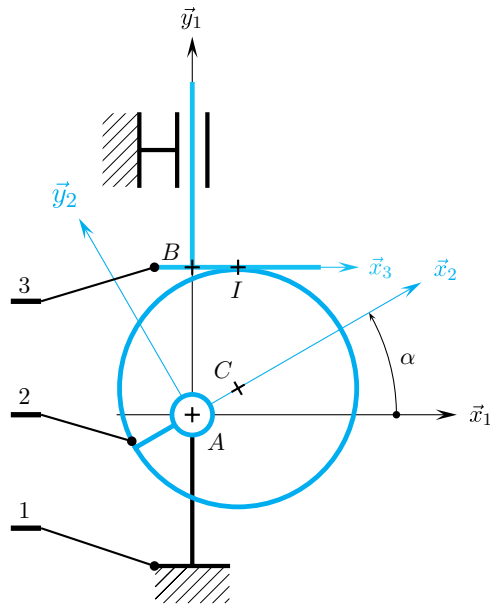


Figure 1.6 – Schéma cinématique du mécanisme à excentrique

1. Tracer le graphe de structure, et dénombrer les mouvements de solides possibles.
2. Caractériser graphiquement les vecteurs vitesse  $\vec{V}(I,3/1)$ ,  $\vec{V}(I,2/1)$  et  $\vec{V}(I,2/3)$ .
3. Préciser les trajectoires des points  $I$  dans chacun des mouvements énoncés, à savoir 3/1, 2/1 et 2/3.

On s'intéresse maintenant au point géométrique  $I$  qui suit le contact au cours du temps.

4. Déterminer le vecteur vitesse  $\vec{V}(I/1)$ .

## 1.9 The Falkirk Wheel

L'élévateur de Falkirk, en Écosse, permet de faire passer les bateaux d'un plan d'eau de niveau  $N_I$  à un canal de niveau  $N_S$  à l'aide d'un bras animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal selon le schéma de principe donné ci-dessous.

Le dénivelé est de 25 mètres et le mécanisme comprend :

- un bâti 1 auquel est associé le repère  $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ; il comporte une roue dentée de  $Z_1$  dents ;
- un bras motorisé 2 en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1 ; on lui associe le repère  $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , avec  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ , et on pose :
  - l'angle  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ ,
  - les longueurs  $\vec{CA} = a \vec{x}_2$  et  $\vec{CB} = b \vec{x}_2$  ;
- deux pignons identiques 3 et 5 de  $Z_3 = Z_5$  dents, en liaisons pivot respectivement d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  et d'axe  $(D, \vec{z}_2)$  avec le bras 2 ;
- deux roues identiques 4 et 6 de  $Z_4 = Z_6$  dents, en liaisons pivot respectivement d'axe  $(B, \vec{z}_2)$  et d'axe  $(E, \vec{z}_2)$  avec le bras 2 ;
- deux bacs  $b_4$  et  $b_6$  à considérer encastrés respectivement sur les roues 4 et 6.

D'un point de vue géométrique, les roues 6 et 5 sont respectivement les symétriques des roues 4 et 3 par rapport à l'axe  $(C, \vec{y}_2)$ .

D'un point de vue cinématique, la principale caractéristique est l'égalité des nombres de dents  $Z_1$  du bâti et des roues extérieures  $Z_4$  et  $Z_6$ .

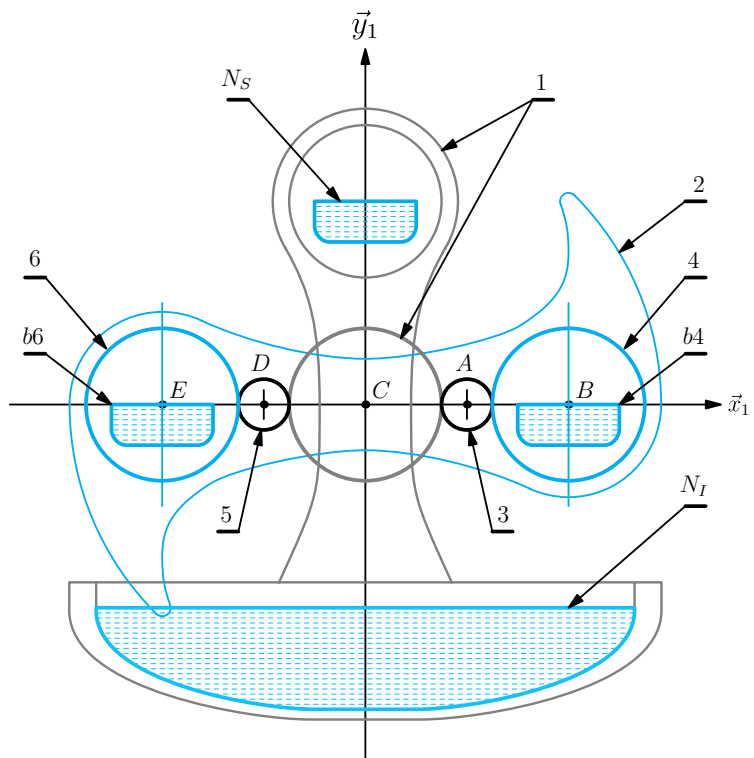


Figure 1.7 – Schéma de principe de l'élévateur

1. Tracer le graphe des liaisons de ce mécanisme.
2. Montrer que les bacs  $b_4$  et  $b_6$  sont bien en mouvement de translation circulaire par rapport au bâti 1.

### 1.10 Engrenage

Étant donnés trois solides 1, 2 et 3, on définit le mécanisme engrenage à partir de l'épure plane ci-dessous, sur laquelle deux cercles respectivement de rayon  $R_2$  et  $R_3$  et de centres  $A$  et  $B$  sont tangents au point  $I$ .

On suppose que le contact en  $I$  est tel que le roulement s'y effectue sans glissement.

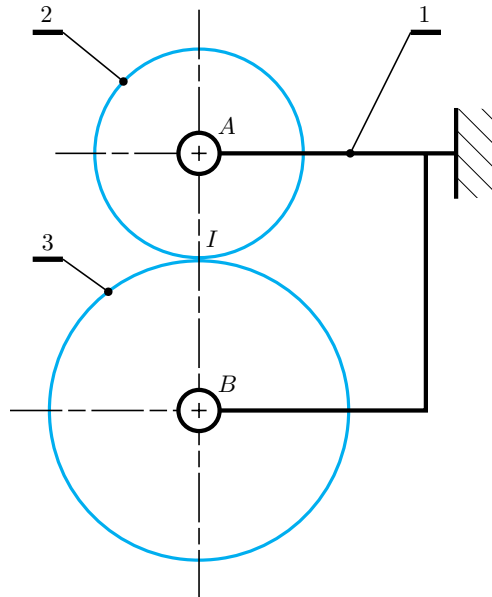


Figure 1.8 – Épure plane d'un mécanisme engrenage

1. Compléter la description du mécanisme et le paramétrer complètement.
2. Tracer le graphe de liaison.
3. Exprimer le non-glissement au point  $I$ .
4. Trouver la relation entre les paramètres cinématiques des deux liaisons pivot.

### 1.11 Pignon-crémaillère

Étant donnés trois solides 1, 2 et 3, on définit le mécanisme pignon-crémaillère à partir de l'épure plane ci-dessous, sur laquelle un cercle de centre  $A$  et de rayon  $R_2$  est tangent à une droite au point  $I$ .

On suppose que le contact en  $I$  est tel que le roulement s'y effectue sans glissement.

1. Compléter la description du mécanisme et le paramétrer complètement.
2. Tracer le graphe de liaison.
3. Exprimer le non-glissement au point  $I$ .
4. Trouver la relation entre les paramètres cinématiques des liaisons pivot et glissière.

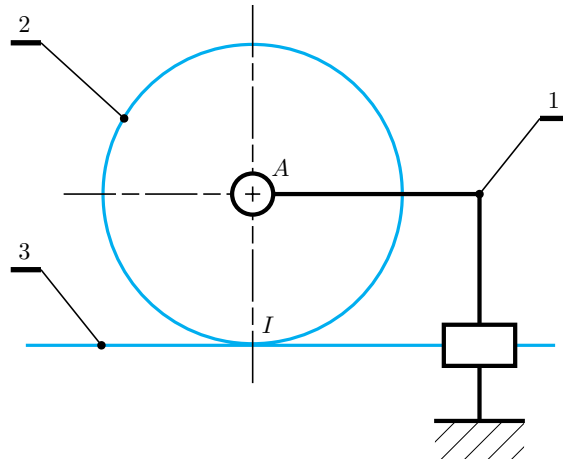


Figure 1.9 – Épure d'un mécanisme pignon-crémaillère

### 1.12 Différentiel linéaire

On considère le mécanisme à cinq solides schématisé ci-dessous. Il comprend :

- un bâti 1, auquel est associée une base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- un arbre 2, en liaison glissière de direction  $\vec{x}_1$  avec le bâti. La base 2 est choisie confondue avec la base 1 ;
- un pignon 3, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_2)$  avec l'arbre 2. On lui associe un repère  $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$  et on note  $\alpha$  l'angle  $(\vec{x}_2, \vec{x}_3)$  ;
- deux crémaillères repérées 4 et 5, en liaisons glissière de direction  $\vec{x}_1$  avec le bâti 1. Elles engrenent sur le pignon 3 respectivement en  $I$  et en  $K$ .

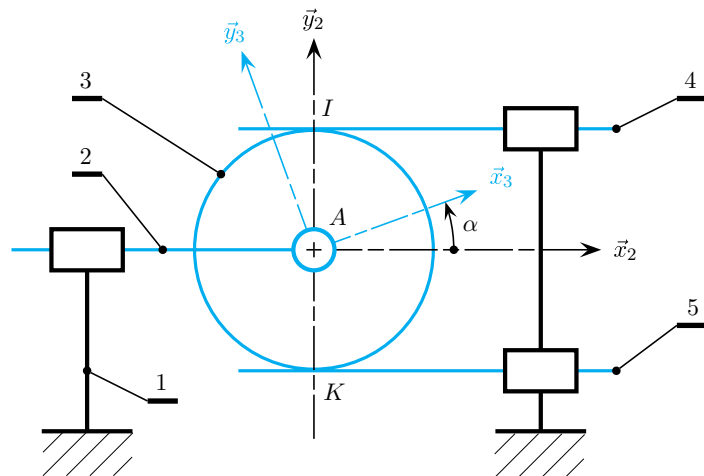


Figure 1.10 – Schéma cinématique d'un différentiel linéaire

1. Tracer le graphe des liaisons.
2. Soient respectivement  $V_{41}$ ,  $V_{51}$  et  $V_{21}$  les vitesses scalaires des solides 4, 5 et 2 par rapport au bâti 1. Caractériser les torseurs cinématiques des liaisons.
3. Déterminer l'équation reliant les trois paramètres scalaires précédents.

4. À partir de cette équation, imaginer et retrouver les mouvements possibles dans les deux cas particuliers suivants :

- on bloque l'arbre 2 par rapport au bâti 1 ;
- on bloque la rotation du pignon 3 par rapport à l'arbre 2.

### 1.13 Train épicycloïdal

On considère le mécanisme à cinq solides schématisé sur les figures 1.11 et 1.12. Il s'agit d'un train épicycloïdal dit de « type 1 ». Il comprend :

- un bâti 0, auquel est associé le repère  $R_0(C, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;
- un pignon planétaire 1, de rayon  $r_1$ , en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x}_0)$  avec le bâti 0 :
  - on lui associe le repère  $(C, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ,
  - on pose  $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$  ;
- un bras porte-satellite 2, en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x}_0)$  avec le bâti 0 :
  - on lui associe le repère  $R_2(C, \vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ ,
  - on pose  $\beta = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$  ;
- une roue à denture intérieure 3, de rayon  $r_3$ , en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_0)$  avec le bras 2 :
  - on lui associe le repère  $R_3(A, \vec{x}_0, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ ,
  - on pose  $\gamma = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$  ;
- un pignon satellite 4, de rayon  $r_4$ , en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x}_0)$  avec le bâti 0.
  - on lui associe le repère  $R_4(C, \vec{x}_0, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ ,
  - on pose  $\psi = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$ .

Ce pignon 4 est en contact avec les pignons 1 et 3 respectivement aux points  $I$  et  $J$ , où il y a roulement sans glissement.

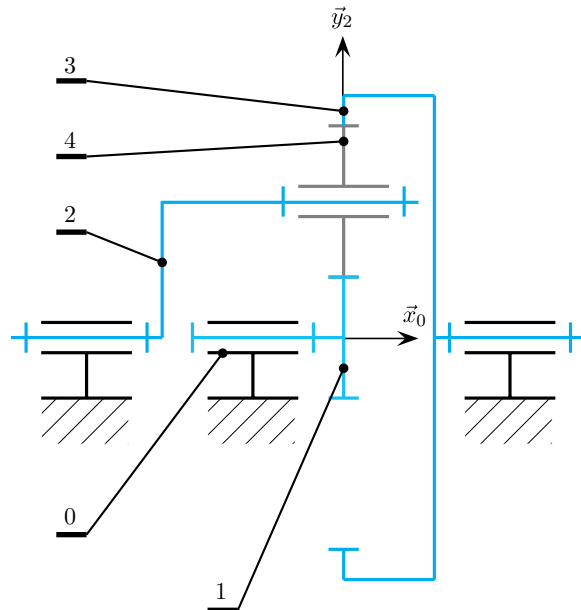
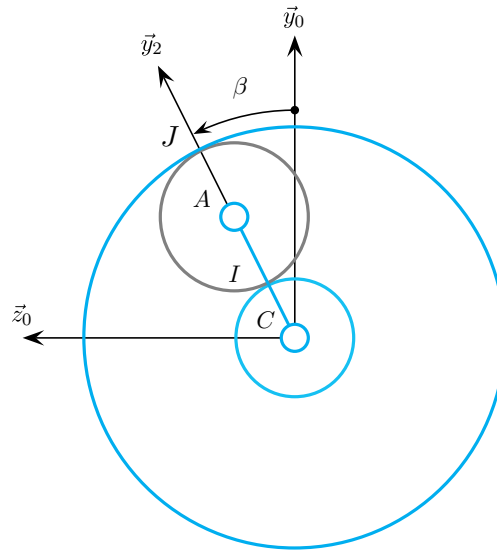


Figure 1.11 – Train épicycloïdal : schéma dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_2)$

1. Tracer le graphe associé.



Figure 1.12 – Train épicycloïdal : schéma dans le plan  $(\vec{y}_0, \vec{z}_0)$ 

2. Écrire les deux fermetures de chaînes cinématiques indépendantes sous forme torso-rielle, puis à l'aide des éléments de réduction des torseurs cinématiques de chaque liaison.
3. Déterminer la relation entre  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  et  $\dot{\psi}$ .

#### 1.14 Pompe à débit variable

Le mécanisme de transformation de mouvement représenté sur la figure 1.13, extrait d'une pompe à débit variable, se compose de 3 pièces :

- un bâti 1 auquel est associé le repère  $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ; on pose  $\overrightarrow{AH} = d\vec{x}_1$  ;
- un levier 4, en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_1)$  avec le bâti 1 ; on lui associe le repère  $(A, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_1)$  et on pose  $\delta = (\vec{x}_1, \vec{x}_4)$  ;
- un piston 3 :
  - en liaison pivot glissant d'axe  $(H, \vec{y}_1)$  avec le bâti 1 ; on pose  $\overrightarrow{HC} = \lambda\vec{y}_3$ ,
  - en liaison sphère-plan de centre  $C$  et de normale  $\vec{y}_4$  avec le levier 4.

Si nécessaire :

- on repère le point géométrique de contact entre 3 et 4 par le vecteur  $\overrightarrow{AB} = -e\vec{y}_4 + \mu\vec{x}_4$  ;
- on pose  $\overrightarrow{CB} = R\vec{y}_4$ .

1. Tracer le graphe de liaison du mécanisme.
2. Écrire les différents torseurs cinématiques et représenter la figure de changement de bases pour l'angle  $\delta$ .
3. Dénombrer les inconnues cinématiques et les équations à disposition.
4. Déterminer la loi cinématique d'entrée-sortie du mécanisme sous la forme

$$\dot{\lambda} = f(\dot{\delta}, \delta, d, e, R)$$

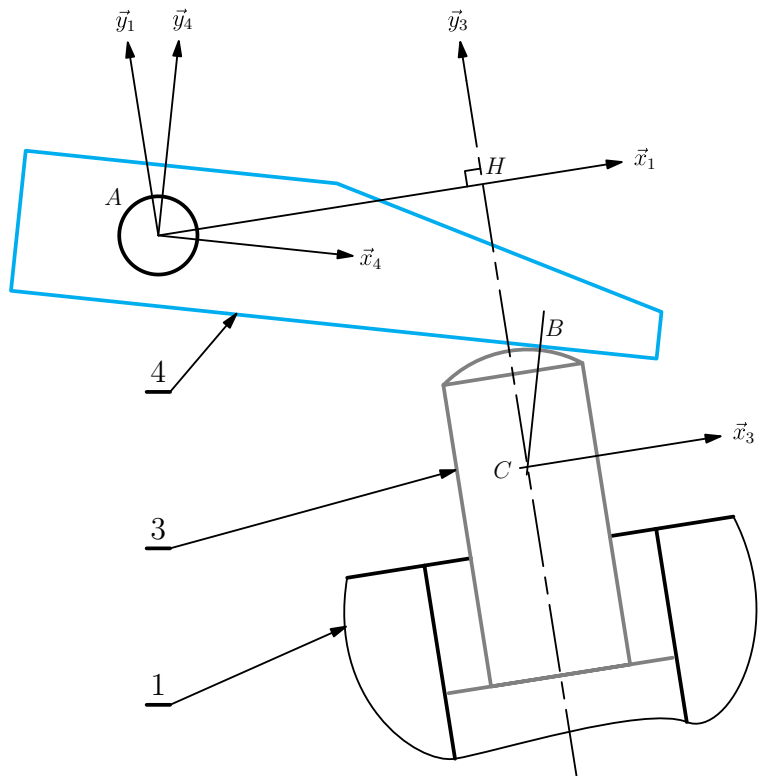


Figure 1.13 – Schéma cinématique de la partie de pompe étudiée

### 1.15 Robot SCARA

SCARA : Selective Compliant Assembly Robot Arm  
ou bien Selective Compliant Articulated Robot Arm

L'étude porte sur un robot de type SCARA, principalement dédié à des tâches d'assemblage, de vissage, de perçage, etc. L'outil utilisé par le robot, que ce soit une pince, une visseuse ou une perceuse par exemple, est lié à l'organe terminal par l'intermédiaire d'une bride.

Le schéma cinématique de la figure 1.14 montre les différents solides constituant le système mécanique articulé, ainsi que les paramètres géométriques propres à chacun des solides et les variables associées aux liaisons.

Ce robot est de type « robot 4 axes » :

- axe 1 : rotation du bras 1 par rapport au bâti 0, d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  et d'angle  $\theta_1$  ;
- axe 2 : rotation de l'avant-bras 2 par rapport au bras 1, d'axe  $(B, \vec{z}_1)$  et d'angle  $\theta_2$  ;
- axe 3 : rotation du poignet 3 par rapport à l'avant-bras 2, d'axe  $(C, \vec{z}_2)$  et d'angle  $\theta_3$  ;
- axe 4 : translation de la bride 4 par rapport au poignet 3, de direction  $\vec{z}_3$  et caractérisée par le vecteur  $\vec{CP} = \rho \vec{z}_3$ .

Les constantes géométriques utiles pour cette étude sont résumées ci-dessous :

bâti	$\vec{OA} = a \vec{z}_0$	$a = 510 \text{ mm}$
bras	$\vec{AB} = b \vec{x}_1$	$b = 400 \text{ mm}$
avant-bras	$\vec{BC} = c \vec{x}_2$	$c = 250 \text{ mm}$

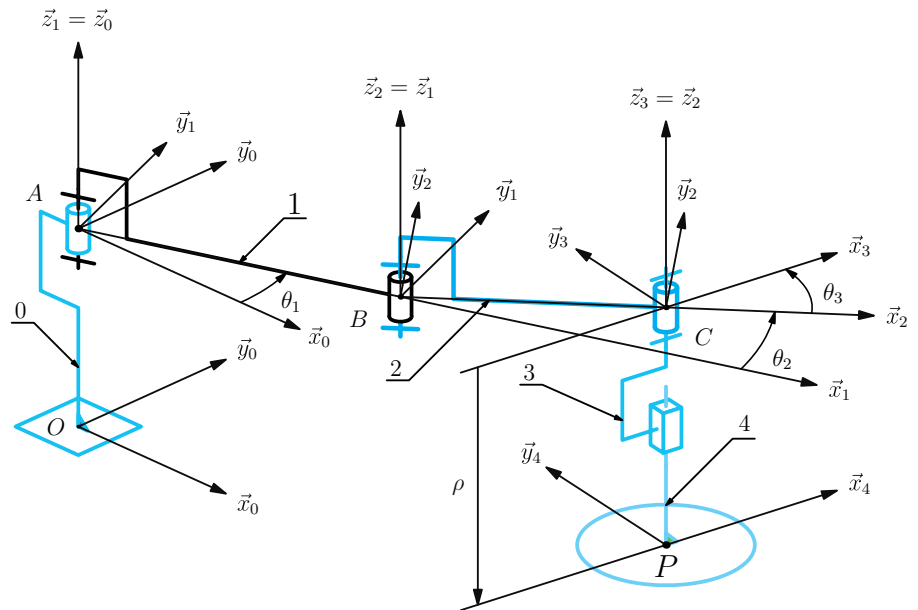


Figure 1.14 – Schéma cinématique du robot SCARA

### Approches structurelle et fonctionnelle

Du point de vue structurel, la position de la bride 4 par rapport au bâti 0 est caractérisée par :

- les trois variables articulaires  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$  ;
- la longueur  $\rho$ .

Du point de vue fonctionnel, la position de la bride 4 par rapport au bâti 0 est caractérisée par :

- les trois coordonnées du point  $P$  dans le repère  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;

$$\vec{OP} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0 + z \vec{z}_0$$

- l'angle  $\alpha$  orientant la bride dans le plan horizontal.

$$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_4)$$

1. Exprimer les coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et  $\alpha$  en fonction des invariants géométriques propres aux solides et des variables associées aux liaisons.

### Approche géométrique d'un déplacement

On lie à la bride 4 une pince pneumatique permettant la saisie puis la dépose d'une pièce cylindrique de révolution dont l'axe est parallèle au plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .

On étudie une tâche d'assemblage pour laquelle le mouvement de la pièce prise dans la pince du robot doit respecter les contraintes suivantes :

- l'orientation de la pièce dans  $R_0$  est constante, avec comme valeur  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ;
- la trajectoire du point de référence de la pièce  $P$  est rectiligne de direction  $\vec{y}_0$ .

Le problème se ramène donc à l'étude de la trajectoire rectiligne du point  $P$  entre deux points notés  $I$  et  $F$  tels que :

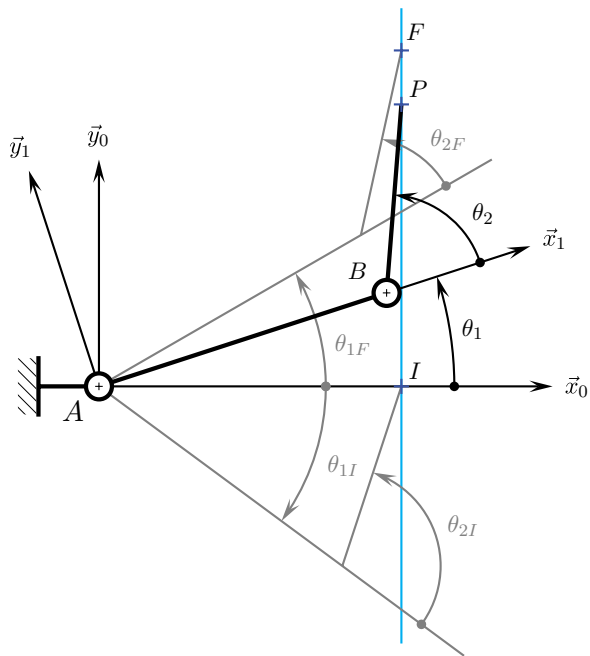


Figure 1.15 – Le mouvement plan étudié

$$\begin{cases} \vec{OI} = x_I \vec{x}_0 + y_I \vec{y}_0 + z_I \vec{z}_0 \\ \vec{OF} = x_F \vec{x}_0 + y_F \vec{y}_0 + z_F \vec{z}_0 \end{cases}$$

On envisage comme valeurs numériques

$$\begin{array}{ll} x_I = 0,4 \text{ m} & x_F = 0,4 \text{ m} \\ y_I = 0,0 \text{ m} & y_F = 0,4 \text{ m} \\ z_I = 0,1 \text{ m} & z_F = 0,1 \text{ m} \end{array}$$

2. À partir de l'épure des positions du bras 1 et de l'avant bras 2 donnée sur la figure 1.15, déterminer les valeurs initiales et finales des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , notées respectivement  $\theta_{1i}, \theta_{2i}$  lorsque le point  $P$  est en  $I$  et  $\theta_{1f}, \theta_{2f}$  lorsque le point  $P$  est en  $F$ . Il est à noter que sur le robot, on impose toujours  $\theta_2$  positif.

En déduire les valeurs initiale et finale de  $\theta_3$ , respectivement notées  $\theta_{3i}$  et  $\theta_{3f}$ .

**Approche cinématique du déplacement précédent**

La vitesse du déplacement précédent, notée  $v(t)$ , imposée entre les points  $I$  et  $F$  suit la loi en trapèze de la figure 1.16.



Figure 1.16 – La loi en trapèze de vitesse imposée

3. Exprimer, en fonction des autres paramètres, le temps du déplacement  $t_f$  entre les points  $I$  et  $F$ .
4. Calculer  $t_f$  pour  $t_a = 0,2$  s et  $V_M = 0,4$  ms<sup>-1</sup>.

On note, pour la position d'un point  $P$  quelconque lors du mouvement 4/0 entre  $I$  et  $F$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (b \cos \theta_1 + c \cos (\theta_1 + \theta_2)) \vec{x}_0 \\ &+ (b \sin \theta_1 + c \sin (\theta_1 + \theta_2)) \vec{y}_0 \\ &+ (a + \rho) \vec{z}_0\end{aligned}$$

5. Exprimer le vecteur vitesse du point  $\vec{V}(P, 4/0)$  en fonction de  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\dot{\theta}_2$ ,  $a$  et  $b$ .
6. Retrouver les expressions suivantes de  $\dot{\theta}_1$  et de  $\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$  en fonction de  $v$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $a$  et  $b$  :

$$\dot{\theta}_1 = \frac{v \sin (\theta_1 + \theta_2)}{a \sin \theta_2} \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 = \frac{v \sin \theta_1}{b \sin \theta_2}$$

En déduire les expressions des accélérations angulaires  $\ddot{\theta}_1$  et  $\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2$ .

7. Application numérique : calculer  $\dot{\theta}_1$ ,  $\ddot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_2$  et  $\ddot{\theta}_2$  pour  $\theta_1 = \theta_{1i}$ , puis pour  $\theta_1 = \theta_{1f}$ .

On note  $G_2$  le centre de masse de l'avant-bras 2 et on pose  $\overrightarrow{BG}_2 = a\vec{x}_2 + b\vec{z}_2$

8. Exprimer le vecteur vitesse  $\vec{V}(G_2, 2/0)$ .

9. Calculer le vecteur accélération  $\vec{A}(G_2, 2/0)$  pour  $\theta_1 = \theta_{1i}$

$$a_2 = 0,134 \text{ m} \quad b_2 = 0,000 \text{ m}$$

### 1.16 Robot omni-roues

Le chariot étudié, dont une image de l'architecture est donnée sur la figure 1.17, utilise pour ses déplacements sur un plan 1 de normale  $\vec{z}_1$  trois roues motrices à profil sphérique.

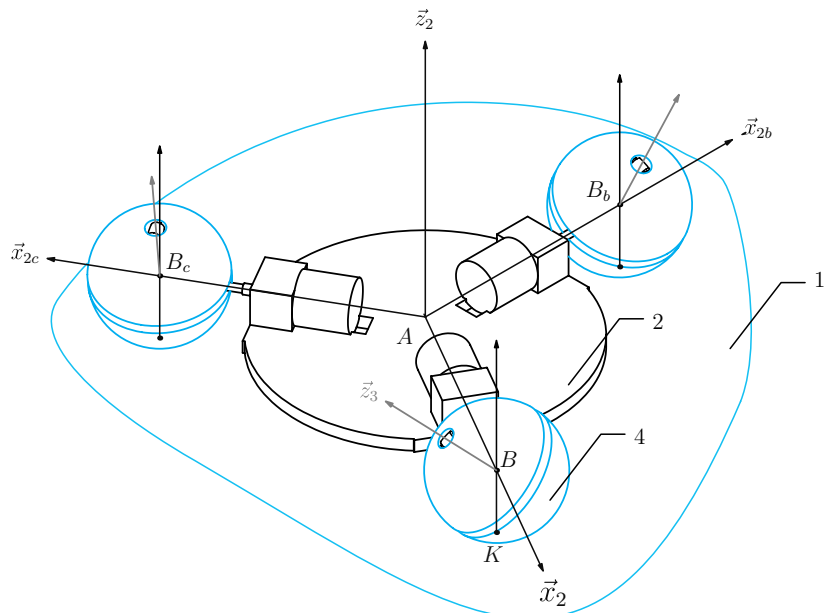


Figure 1.17 – Architecture du robot omni-roues

Il comprend essentiellement pour sa chaîne d'énergie :

- un châssis 2 auquel est associé un repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  ;
- trois axes motorisés identiques et disposés à  $120^\circ$ , repérés sans indice pour le premier, avec respectivement les indices  $b$  et  $c$  pour chacun des deux autres.

Le premier des axes motorisés est détaillé sur la figure 1.18. Il comporte un arbre moteur 3 en liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x}_2)$  avec le châssis 2 ; on lui associe le repère  $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  et on pose  $\varphi = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ . Cet arbre moteur 3 permet l'entraînement d'un ensemble appelé roue et composé de :

- deux galets principaux et hémisphériques dont l'un est repéré 4, en liaison pivot d'axe  $(B, \vec{z}_3)$  avec l'arbre 3 ; on pose  $\vec{AB} = L\vec{x}_2$  et le rayon de la sphère  $R$  ;
- deux galets secondaires dont un est repéré 5, en liaison pivot d'axe  $(C, \vec{y}_3)$  avec l'arbre 3 :
  - on pose  $\vec{CB} = a\vec{z}_3$ , avec  $a > 0$ ,
  - ce galet de révolution est généré à partir d'un profil circulaire de rayon  $R$ ,
  - le centre  $B$  du cercle est placé à la distance  $R - a$  de l'axe de révolution,
  - l'arc de cercle est limité par les angles  $-\varphi_0$  et  $\varphi_0$  par rapport à  $BC$ .

La géométrie identique des trois roues et leur disposition sur le châssis permet de considérer un mouvement plan de ce dernier par rapport au sol, décrit par le torseur cinématique  $\mathcal{V}(2/1)$  tel que

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{cases} \omega_{21}\vec{z}_2 \\ \vec{V}(A, 2/1) \perp \vec{z}_2 \end{cases}$$

Cette disposition permet au contact entre une roue et le sol de se faire au point géométrique  $K$  tel que  $\vec{KB} = R\vec{z}_2$ , que ce soit un contact par l'intermédiaire d'un galet principal ou secondaire. Pour simplifier l'étude, on n'étudie pas les situations pour lesquelles deux galets sont simultanément en contact avec le sol.

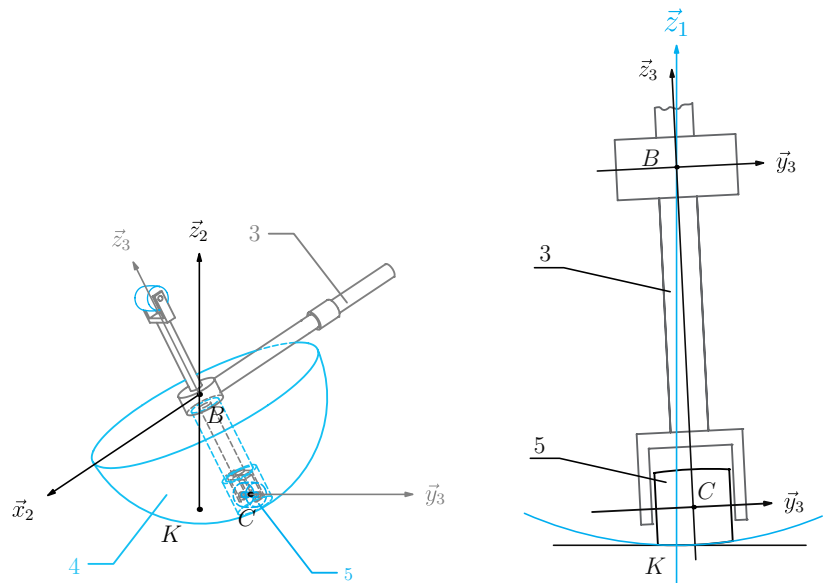


Figure 1.18 – Zoom sur l'arbre moteur 3 et les roulettes 5

Les objectifs de l'étude sont :

- de vérifier la capacité de déplacement en mouvement plan quelconque du chariot ;
- de déterminer la vitesse de chaque moteur pour obtenir un mouvement imposé ;
- de mettre en évidence les problèmes apparaissant lors des changements de contact.

### Apport du contact d'une roue avec le sol

On suppose que le moteur entraîne l'arbre 3 dans une rotation caractérisée par l'angle  $\varphi$ , que la roue est en contact sans glissement avec le sol par le galet principal 4 au point  $K$  et que le vecteur rotation  $\vec{\Omega}(4/3) = \omega_{43}\vec{z}_3$  est inconnu.

1. Exprimer le vecteur vitesse  $\vec{V}(B,2/1)$  par composition des mouvements 3/2, 4/1 et 4/3.
2. En déduire les expressions des deux quantités scalaires  $\vec{V}(B,2/1).\vec{x}_2$ ,  $\vec{V}(B,2/1).\vec{y}_2$ . Sont-elles imposées par le moteur ?
3. Déterminer ces mêmes quantités dans le cas du galet 5, lorsque  $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$ .
4. On suppose  $\vec{V}(B,2/1).\vec{x}_2 = v_{x0}$  et  $\vec{V}(B,2/1).\vec{y}_2 = v_{y0}$ , avec les quantités  $v_{x0}$  et  $v_{y0}$  constantes. Comment évolue  $\omega_{43}$  pour  $\varphi$  dans l'intervalle  $[-\frac{\pi}{2}, -\varphi_0] \cup [\varphi_0, \frac{\pi}{2}]$  ?

Application numérique :

$$R = 40\text{mm} \quad \varphi_0 = 0,1\text{rad} \quad v_{x0} = 0,2\text{m/s} \quad v_{y0} = 0,2\text{m/s}$$

5. En déduire la fonction du galet 5 ?

### Cinématique du châssis par rapport au sol

Les vitesses des trois moteurs sont désignées par  $\omega_{32}$ ,  $\omega_{32b}$  et  $\omega_{32c}$ .

6. En utilisant la particularité de  $\vec{V}(B,2/1).\vec{y}_2$  pour chaque roue, déterminer la vitesse de chaque moteur si on souhaite un chariot en translation rectiligne par rapport au sol caractérisée par la vitesse  $v_{21}\vec{x}_2$ .
7. Déterminer le torseur cinématique  $\mathcal{V}(2/1)$  si  $\omega_{32} = \omega_{32b} = \omega_{32c}$ .