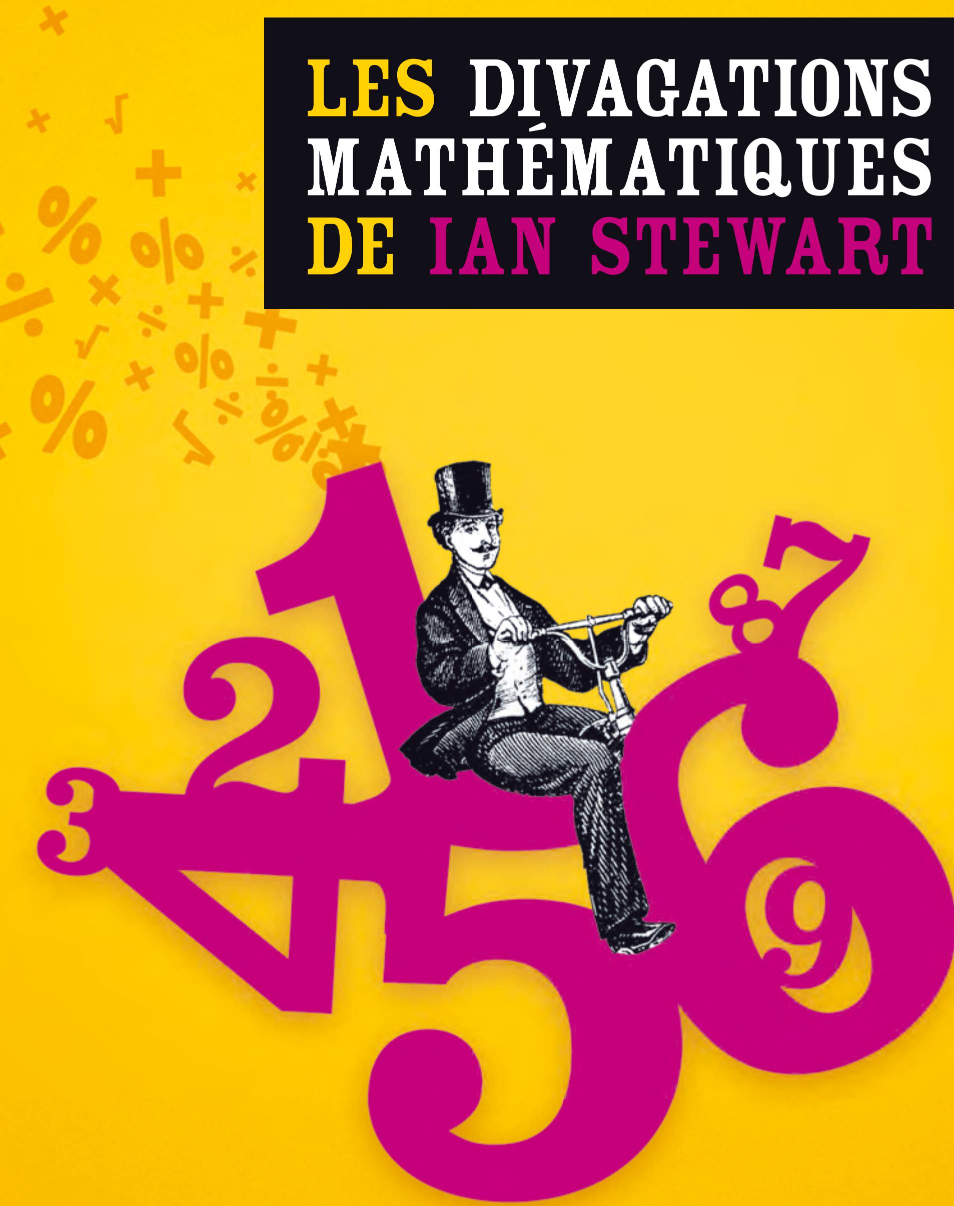
IAN STEWART

LES DIVAGATIONS MATHÉMATIQUES DE IAN STEWART



DUNOD

Table des matières

2
À la recherche du polygone privé

Certaines questions mathématiques, parmi les plus difficiles, trouvent leur origine dans la vie quotidienne. Qui pourrait penser que la simple édification d'une clôture peut donner lieu à des problèmes que personne n'a encore pu résoudre ?

L'un des domaines les plus séduisants des mathématiques, riches en problèmes simples dont les solutions demeurent inconnues à ce jour, est la géométrie combinatoire. Son but est de trouver les dispositions de lignes, courbes ou autres formes géométriques, qui permettent de réaliser un objectif de la façon la plus efficace possible. Par exemple, le problème de la couverture du ver de terre[1] – fabriquer une couverture contenant un ver de terre de longueur un – peut se résumer ainsi : quelle est la forme de la plus petite aire qui recouvre une courbe de longueur un ? Même si plusieurs formes ont été proposées, aucune ne s'est avérée représenter l'aire minimale ; il se peut que le problème n'offre aucune solution. Les mathématiques récréatives apprécient particulièrement ces questions, car elles donnent libre cours à l'expérimentation et l'ingénuité. Même s'il

1. Voir *Game, Set and Math*, chapitre 1

n'est pas possible de prouver qu'une forme particulière est la meilleure concevable, celles déjà connues peuvent être l'objet d'améliorations.

Ce chapitre est consacré au casse-tête appelé le problème du carré opaque, ainsi qu'à quelques-unes de ses fascinantes variantes. C'est le mathématicien Bernd Kawohl (université de Cologne) qui a porté le problème à ma connaissance et les lignes qui suivent se fondent sur l'article qu'il m'a adressé. Imaginons que vous soyez propriétaire d'un morceau de terrain carré, dont les côtés, pour simplifier, sont de longueur un. Pour une raison qui vous est propre – l'intimité, par exemple – vous voulez construire une clôture qui masque la totalité du morceau de terrain aux regards extérieurs. De plus, par souci d'économie, vous désirez que la clôture soit la plus courte possible. Comment allez-vous installer la clôture ?

La clôture peut être aussi complexe que vous le souhaitez et composée de différents éléments assemblés à votre guise. Ceux-ci peuvent être courbes ou droits. En réalité, est valide toute forme à laquelle s'applique une certaine généralisation du concept de « longueur ».

La solution la plus évidente consiste peut-être à fixer la clôture autour de la totalité du périmètre ; la longueur totale obtenue est alors égale à 4 (figure 4a). Après quelques instants de réflexion, une amélioration s'impose : omettre un côté pour créer une clôture en forme de U (figure 4b). La longueur est maintenant égale à 3. Il s'agit en réalité de la clôture la plus courte, si nous supposons en outre qu'elle ne forme qu'une seule ligne, polygonale ou courbe. Pourquoi ? Parce que chaque clôture qui assure l'opacité du carré doit contenir la totalité des points des quatre coins (sinon, il existe une « ligne de vision » passant à travers l'un d'eux) et que la courbe la plus courte qui contient les quatre angles se compose de trois côtés du carré.

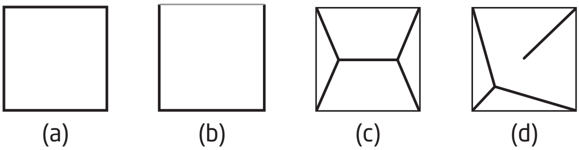


Figure 4. **Clôtures opaques du carré.**

Cependant, il existe une clôture plus complexe de longueur $1+\sqrt{3} = 2{,}732$, comme dans la figure 4c. Ici, tous les angles sont de 120°. Les dispositions de ce type, dans lesquelles la clôture est continue, sont appelées arbres de Steiner et il est établi depuis longtemps que les angles de 120° permettent d'obtenir l'arbre le plus court possible.[1] Cette clôture est la clôture *continue* la plus courte. Cependant, nous n'avons pas encore terminé. Si nous acceptons que la clôture comporte plusieurs éléments non reliés, la longueur totale peut être réduite à 2,639, comme dans la figure 4d. Dans le cas présent, les trois lignes de la partie supérieure forment une fois encore des angles de 120°. Cette dernière tentative est considérée comme la plus courte clôture opaque possible, mais il n'en existe à ce jour aucune preuve.

En réalité, l'existence d'une plus courte clôture opaque n'a pas encore été apportée. La principale difficulté tient au fait qu'il est peut-être possible de raccourcir la longueur de la clôture en rendant celle-ci de plus en plus complexe. Vance Faber et Jan Mycielski ont démontré que, pour un nombre donné de composants reliés, il existe une plus courte clôture opaque. En revanche, nous ignorons encore si la longueur minimale diminue au fur et à mesure que le nombre de composants augmente, ou si une clôture au nombre illimité d'éléments surpasse en termes de résultats toutes les clôtures au nombre fini de composants. Il semble peu pro-

1. Voir *Ta moitié est plus grande que la mienne* (Ian Stewart, *Dunod 2007*), chapitre 12

bable que les deux situations se produisent, mais, une fois encore, aucune des deux hypothèses n'a été exclue.

Kawohl a proposé une preuve très élégante, selon laquelle la figure 4d est la plus courte clôture ayant exactement deux éléments. D'abord, il montre qu'un des deux éléments doit contenir trois angles du carré et que l'autre élément doit contenir l'angle restant. Le premier composant doit, par conséquent, être le plus court arbre de Steiner reliant trois angles, et il a été établi qu'il présente la forme illustrée dans la partie supérieure de la figure. La coque convexe de la forme – la plus petite région convexe qui la contient – est le triangle obtenu en découpant le carré en deux parties le long d'une diagonale. Le second élément doit être la plus courte courbe qui joint le quatrième angle au triangle, et de toute évidence, il s'agit de la ligne diagonale qui relie cet angle au centre du carré.

Qu'en est-il des autres formes que le carré ? Si le morceau de terrain est un triangle équilatéral, la plus courte clôture est un arbre de Steiner, formé en reliant chaque angle au centre par une ligne droite (figure 5a). Si le terrain est un pentagone régulier, la plus courte clôture opaque connue se compose de trois éléments, comme à la figure 5b. Le premier élément est un arbre de Steiner reliant trois angles adjacents du pentagone. Le second, une ligne droite joignant le quatrième côté à la coque convexe des trois premiers angles. Le troisième, une ligne droite reliant le dernier angle à la coque convexe des quatre premiers angles. Une fois encore, il n'existe aucune preuve que cette clôture possède une longueur minimale, mais aucune clôture plus courte n'a été trouvée.

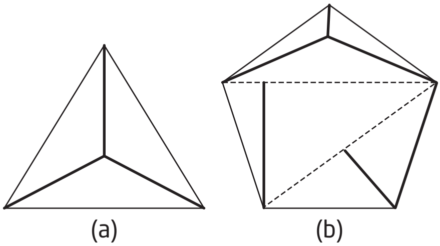


Figure 5. **Clôtures opaques du triangle équilatéral, ainsi que du pentagone et de l'hexagone réguliers.**

En ce qui concerne l'hexagone régulier, la meilleure clôture connue est similaire, mais comme les angles de l'hexagone sont égaux à 120°, l'arbre de Steiner devient une suite de côtés de l'hexagone. De fait, il se compose de trois côtés consécutifs, reliant entre eux quatre coins adjacents. Ensuite, le deuxième composant de la clôture est la plus courte ligne reliant le sixième angle à la coque convexe des trois premiers.

Il n'a pas été prouvé que cette clôture était optimale, mais la construction s'étend pour donner une clôture minimale supposée pour tout polygone régulier ayant un nombre pair de côtés (figure 6). Divisez le polygone en deux en traçant une ligne qui relie deux coins opposés. Le premier composant de la clôture est formé de tous les côtés situés dans cette moitié, dessinant un polygone en forme de demi-cercle. Le deuxième composant est la plus courte ligne reliant le coin suivant à la coque convexe du premier composant, tandis que le troisième composant est la plus courte ligne joignant le coin suivant à la coque convexe des deux premiers composants, et ainsi de suite.

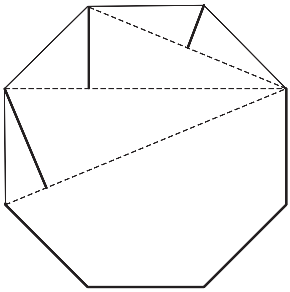


Figure 6. **Conjecture de la clôture opaque la plus courte pour un polygone régulier de même côté.**

Un polygone ayant un nombre élevé de côtés ressemble beaucoup à un cercle et nous pouvons rechercher quelle est la plus courte clôture qui rend un cercle opaque. En termes d'unité, nous pouvons présumer que le cercle est de rayon un (1). La clôture la plus simple qui vient à l'esprit est la circonférence du cercle, de longueur $2\pi = 6{,}283$ (figure 7a). Cependant, si nous acceptons que la clôture soit installée à l'extérieur du morceau de terrain, il est possible de faire mieux. Retirez la moitié de la circonférence pour ne conserver qu'un demi-cercle, de longueur π, et étendons-le en ajoutant deux lignes de longueur un (1) tangentes au cercle aux extrémités du demi-cercle et dessinant un U (figure 7b). Il s'agit d'une clôture opaque pour le cercle, de longueur $\pi + 2 = 5{,}142$.

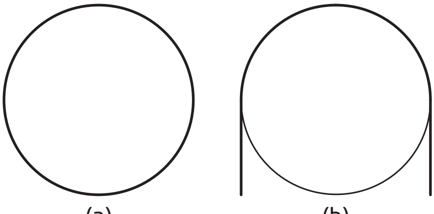


Figure 7. **Clôtures opaques pour le cercle. (a) Le cercle lui-même, de longueur 2π pour un cercle de rayon 1. (b) Clôture plus courte, de longueur $\pi + 2$.**

Nous pouvons prouver que la figure 7b est la plus courte clôture possible si nous exigeons que la clôture soit une courbe simple – courbe d'un seul tenant et sans embranchement. Il existe un autre moyen d'établir sa propriété d'opacité.[1] Imaginons qu'un tuyau droit ou une ligne téléphonique passe à une distance de longueur 1 d'un point spécifique : quelle est la plus courte tranchée que nous puissions creuser pour être certain de l'atteindre ? Nous savons que le tuyau coupe le cercle de rayon un (1) en ce point, et qu'il doit toucher toute clôture opaque du cercle lui-même. Par conséquent, nous devrons creuser une tranchée ayant la forme d'une clôture opaque.

Dans le cas de la tranchée, il est naturel de l'autoriser à aller au-delà du cercle – mais les clôtures sont normalement construites sur le terrain de leur propriétaire, et non sur celui de leur voisin. Kawohl montre que la longueur de la plus courte clôture opaque reposant entièrement à l'intérieur du cercle de rayon un (1) n'est pas supérieure à $\pi + 2$. Il présuppose à cette fin la clôture d'un polygone ayant un nombre pair de côtés, et de forme presque circulaire. Un calcul trigonométrique montre que la longueur d'une clôture telle que celle de la figure 6, mais avec un polygone ayant un plus grand nombre de côtés, n'est alors guère différente de $\pi + 2$. La différence peut être rendue aussi petite que nous le souhaitons en prenant un nombre de côtés suffisamment élevé.

Le champ d'exploration reste considérable pour l'amateur. Les clôtures conjecturées sont-elles vraiment les plus courtes ou existe-t-il un moyen de les réduire un peu plus ? Est-il possible de démontrer quoi que ce soit quant aux solutions supposées ? Qu'en est-il des autres formes – polygones arbitraires (convexes ou non), ellipses,

1. Voir *Math Hysteria*, chapitre 6.

demi-cercles… Et qu'en est-il du même problème dans les espaces tridimensionnels : le cube et la sphère opaques ? Le prochain objectif consiste à réduire la surface totale de la clôture…

Feedback

Martin Gardner a posé le problème du cube et de la sphère opaques en 1990, et Kenneth A. Brakke de l'université de Susquehanna s'y est attaqué en 1992 (voir *Bibliographie* et *Site Web*). La meilleure solution de Brakke pour un cube de côté un (1) possède une aire égale à 4,2324.

Site web

Cube opaque :

[Anglais] http://www.susqu.edu/brakke/opaque/default.html

11
La forme d'une larme

Il arrive que, parfois, nous soyons trompés par nos sens. En voici un exemple concret. Quelle est la forme d'une larme qui tombe ? Vous ne serez peut-être pas surpris d'apprendre à quel point cette forme est extrêmement complexe.

L'oiseau sur une brindille
La brindille sur une branche
La branche sur un arbre
L'arbre dans la terre
Et l'herbe verte croissait tout autour tout autour
Et l'herbe verte croissait tout autour !

Le guitariste joua doucement le dernier accord et les chanteurs s'arrêtèrent. « J'aime cette chanson, dit-il. Elle permet de se rendre compte à quel point les arbres sont quelque chose de complexe. Et de comprendre que les petits arbres ressemblent aux grands arbres eux-mêmes, à la taille près. »

« Autosimilarité, dis-je. Géométrie fractale. Et le processus peut se reproduire à l'infini. D'où le bonsaï. »

Les autres membres du groupe étaient habitués à mes propos déroutants. « Le bonsaï ? »

« L'art japonais de cultiver les arbres miniatures. Il ne fonctionnerait pas s'il n'existait pas une structure indépendante de l'échelle. »

« J'ai connu un mec qui faisait des montagnes-bonzaï », déclara Oliver.

« Comment ça ? », demanda Deirdre.

« Il entassait des cailloux et les répartissait de façon à ce qu'ils forment une montagne », expliquai-je.

« Bien sûr, il ne se contentait pas de poser les cailloux sur une assiette », dit Oliver. « Créer de véritables montagnes-bonzaï nécessite beaucoup de travail. Et tout un équipement aussi ! »

« C'est vrai ? », s'enquit Deirdre, qui était passionnée de jardinage.

« Oui. Mais il a dû arrêter. »

Oliver, le guitariste, rangea son instrument dans sa housse et l'appuya contre le mur. « Les gars, c'est l'heure d'une petite pause », dit-il et les chanteurs s'éloignèrent vers le bar. Le guitariste les suivit et revint quelques minutes après brandissant deux chopes de bière et un Blue Moon. Il tendit l'une d'elles à Deirdre, tandis que je prenais le Blue Moon, sous le regard circonspect d'Oliver.

À dire vrai, j'aime beaucoup les cocktails ! Et je n'ai pas à m'excuser auprès de qui que ce soit ! Trois-quarts d'une mesure de vodka, la même chose de tequila, une mesure de curaçao bleu, un petit peu de citron, et le tout avec de la glace pilée ! Extraordinaire !

Oliver fit une grimace, puis but une gorgée de sa chope. « Je préfère la bière. » Il plaça le verre devant lui et s'apprêta à dire quelque chose, quand tous, nous entendîmes clairement le son « plink ». Oliver chercha des yeux d'où il pouvait provenir, quand, à nouveau, le bruit se fit entendre.

« C'est ta bière », dit Deirdre.

« La bière ne fait pas *plink* », protesta Oliver.

« La tienne, si. Il y a des gouttes d'eau qui sont tombées de dans depuis le plafond. Il doit y avoir une fuite dans le toit. »

Je n'ai jamais vu Oliver agir aussi rapidement : il se saisit du verre et le tint contre lui, comme une mère protégeant son nouveau-né contre une hyène ! « Phénomène de dilution, expliqua-t-il. Crois-tu que je devrais intenter un procès au propriétaire pour diluer sa bière avec un peu d'eau ? »

« Oliver, c'était juste deux gouttes. »

« C'est une question de principe », marmonna Oliver.

Nous regardâmes l'eau continuer à goutter, tombant sur la table avec un léger bruit et se dispersant dans toutes les directions sous forme de minuscules gouttelettes. « Je ne comprends pas ce qui vous fascine tant », dit Deirdre.

« J'essaie de bien regarder – non, ça va trop vite. Pas étonnant que tout le monde se trompe. »

« Se trompe sur quoi ? »

Oliver nous fit signe de la main de nous taire. « Deirdre, une fois tu nous as expliqué comment les chansons te faisaient voir les choses sous un nouveau jour. Laisse-moi te poser une question. Quelle forme a une larme qui coule ? »

« La forme d'une larme », dit Deirdre comme une évidence.

Oliver lui tendit un morceau de nappe et un crayon. « Tu peux m'en dessiner une, s'il te plaît ? » Deirdre traça une espèce de goutte, grosse et plate ; ronde à la base, puis s'incurvant vers le haut en une sorte de pointe (figure 42).

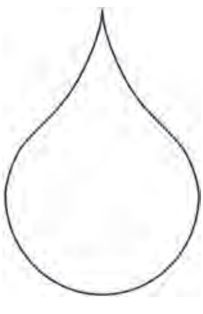


Figure 42. **Forme « classique » d'une larme. Mais l'est-elle ?**

Oliver regarda le dessin. « Pourquoi penses-tu qu'une larme a cette forme ? »

« Eh bien, c'est à ça que ressemble une larme. C'est la forme classique. »

« Tu es sûre ? » Une autre goutte atterrit sur la table. « Tu as vu, hein ? »

« Euh, non. C'est allé trop vite. En tout cas, c'est comme ça que tout le monde dessine les larmes. » Oliver hocha la tête, mais ne dit rien. « Tu veux dire alors que personne ne les dessine bien ? »

« Je ne ferai pas de commentaires. »

« Mais quand une goutte tombe du robinet, tu as d'abord une espèce de forme, enflée et suspendue avec une extrémité pointue, avant que la goutte ne se détache. »

« Dessine-la aussi. » Deirdre s'exécuta (figure 43).

« Hmmm. Tu reconnais que la goutte conserve sa forme en tombant. »

« Oui. »

« Mais l'eau suspendue au robinet s'arrondit ? »

« Oui. Tension de surface. »

« Alors pourquoi la tension de surface n'arrondit-elle pas aussi l'extrémité de la goutte ? »

« Parce que la goutte se déplace. »

« Sûre ? »

Deirdre fit une moue désapprobatrice, puis hocha la tête. « Non, ça n'a pas de sens. La pointe s'arrondit tout aussi bien. Une larme qui tombe doit être à peu près sphérique. Peut-être un peu aplatie par la résistance de l'air. »

Oliver approuva de la tête. « La larme pourrait osciller, toutefois. Donc, tu admets que le dessin devrait plutôt être comme cela ? » Il dessina une larme (figure 44).

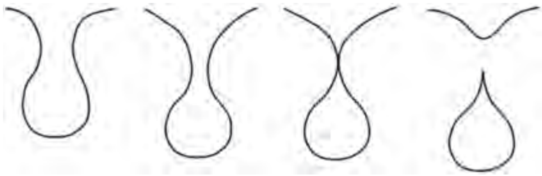


Figure 43. **Est-ce comme ceci qu'une gouttelette se détache ?**

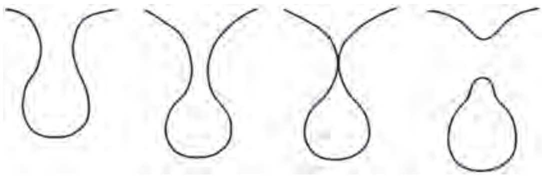


Figure 44. **Ou comme cela ?**

« Je suppose. Je ne suis plus sûre maintenant. » Deirdre paraissait troublée. N'est-il pas étonnant de voir à quel point nous avons du mal à dessiner certains phénomènes ?

« J'ai lu quelque chose à ce sujet », dis-je. « La chose la plus extraordinaire, à mes yeux, est qu'il n'y a pas longtemps que l'on a trouvé la réponse. Les rayons des bibliothèques sont depuis longtemps peuplés d'études scientifiques sur la mécanique des fluides, mais parmi les premiers ouvrages sur le sujet, un seul propose un dessin correct, datant de plus d'un siècle et exécuté par le physicien Lord Rayleigh. Et il est grandeur nature ! » Je m'interrompis pour respirer. « Ce qui signifie que le dessin était si petit que personne ne le remarqua. »

« Parfaitement, dit Oliver. Comme récompense, tu peux offrir la prochaine tournée. Pour être bien connue, la véritable forme dut attendre 1990, quand le mathématicien Howell Peregrine photographia une goutte d'eau en train de se détacher et découvrit que la réalité était bien plus complexe – mais aussi bien plus intéressante – qu'on ne pourrait l'imaginer. » Il ébaucha rapidement une série de larmes, tandis que je cherchais à me frayer un chemin vers le bar. Quand je revins, avec à la main deux chopes et un cocktail Harvey Wallbanger, il venait à peine de finir (figure 45).

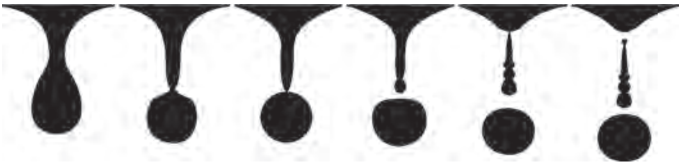


Figure 45. **Séquence des modifications de la forme d'une gouttelette en train de tomber – théorie.**

« Ça a une drôle de tête », dit Deirdre.

« Non, c'est juste un peu de jus d'orange et de vodka, et une rondelle de concom… »

« Je ne parle pas de ton cocktail, mais du dessin de la goutte. »

« Ce n'est pas du tout ce à quoi la plupart des personnes s'attendent, dit Oliver. Mais c'est bel et bien ce qui se passe (figure 46). Tout commence par une gouttelette suspendue au robinet et qui grossit peu à peu. Puis, une taille apparaît, qui rétrécit, avant de prendre peu à peu la forme d'une larme classique. Et qui, au lieu de revêtir l'aspect d'une pointe effilée, s'allonge en un long filet, fin et cylindrique, avec une forme presque sphérique à son extrémité. »

Figure 46. **Séquence des modifications de la forme d'une gouttelette en train de tomber – pratique.**

Je me saisis de l'esquisse et la regardai. « Je comprends pourquoi la goutte devient sphérique. Elle tombe si lentement que la force de gravitation devient négligeable. Par conséquent, la goutte essaie de réduire l'énergie de sa tension de surface, d'où sa transformation en sphère. »

« Pourquoi ? »

« Parce que la tension de surface est proportionnelle à l'aire, et que la sphère possède la plus petite aire correspondant à un volume donné. » Il me tapa amicalement dans le dos. « Mais je ne comprends pas pourquoi un tel filet se forme. »

« Essentiellement en raison de la viscosité », déclara Oliver. « Une question d'adhérence. Si le liquide était du sirop plutôt que de l'eau, tu ne serais pas surpris d'obtenir un long fil en suspension, n'est-ce pas ? L'eau colle un peu aussi, mais pas autant que le sirop, bien sûr. »

« Tout ça, c'est très bien, dit Deirdre. Mais pourquoi le filet ne se prolonge-t-il pas indéfiniment ? »

« L'instabilité ! » m'exclamai-je. « Quand il est trop long, il devient instable. »

« Exactement, dit Oliver en ouvrant un paquet de ses chips favorites. Tu en veux ? », marmonna-t-il en tendant vaguement le sac dans ma direction. Je hochai la tête. « L'instabilité fait que le fil commence à se rétrécir, juste au point où il rencontre la sphère, jusqu'à se développer en forme de pointe. À ce stade, la forme s'apparente à une aiguille à coudre qui effleurerait à peine une orange. Ensuite, l'orange se détache de l'aiguille et tombe : la goutte se scinde en deux.

« Mais ce n'est que la moitié de l'histoire. » Oliver fourra quelques chips dans sa bouche. « La pointe commence maintenant à s'arrondir, et de minuscules ondes remontent le long de l'aiguille, lui donnant l'aspect d'une série de perles de plus en plus petites. Finalement, le filet d'eau en suspension se rétrécit en une pointe à son extrémité supérieure, et il finit aussi par se détacher. En tombant, l'extrémité supérieure s'arrondit, parcourue à son tour par une série d'ondes très similaires. »

Deirdre et moi-même nous adossâmes à nos chaises, puis regardâmes les dessins d'Oliver. « Étonnant, dit Deirdre. Je n'aurais jamais imaginé qu'une goutte d'eau puisse être aussi active. »

« Non », dis-je. « Ou aussi singulière – et je comprends alors pourquoi personne n'a encore étudié la question de façon plus approfondie et plus mathématique. »

« Et pourquoi ? »

« C'est trop difficile. Tu vois, quand la goutte se détache, il y a une singularité dans le problème – domaine où les mathématiques deviennent très délicates. La singularité est la pointe de "l'aiguille". »

« Mais pourquoi y a-t-il une singularité ? Pourquoi la goutte se détache-t-elle d'une manière aussi complexe ? »

Oliver se lança dans une explication. « Parce qu'en 1994, les physiciens Jens Eggers et Todd F. Dupont montrèrent que le scénario est une conséquence des équations de Navier-Stokes sur le mouvement des fluides. Ils simulèrent les équations sur un ordinateur et reproduisirent le scénario de Peregrine. » Quand il nota que je n'étais pas aussi impressionné qu'il l'avait espéré, son visage s'assombrit. « Pourquoi tu prends cet air revêche ? me demanda-t-il. Ce fut un excellent travail. »

« Absolument, répondis-je. Je serais fier de n'avoir fait que la moitié de leur travail ! Mais je ne pense pas qu'il réponde réellement à la question. Il est rassurant de savoir que les équations de Navier-Stokes prédisent bel et bien le bon scénario, mais elles n'aident pas à le comprendre. Il existe une grande différence entre exécuter un calcul et comprendre ce que le résultat signifie exactement. »

Oliver se gratta le menton. « Tu parles à nouveau de la philosophie de l'explication, n'est-ce pas ? »

« Je parle du type d'explication qui me permet de penser que j'ai compris quelque chose. Tu peux appeler ça philosophie, si tu veux. Ce n'est certainement ni de la science ni des mathématiques en tant que telles – il s'agit de la façon dont nous comprenons et la science et les mathématiques.

« Le type d'explication que j'aimerais, ce serait une explication logique qui traite la forme en tant que telle et me convainque qu'elle doit se produire. Je ne suis pas certain que quelqu'un ait déjà proposé une explication viable de la goutte qui tombe, mais je me souviens d'un travail de X.D. Shi et de ses collègues de l'université de Chicago, qui allait dans ce sens. Le principal concept, déjà présent dans le travail de Peregrine, est un type particulier de solution aux équations du mouvement des fluides, appelée solution de similarité. »

« Et elle consiste en quoi ? »

« Il s'agit d'une solution avec un certain type de symétrie, qui permet de la traiter mathématiquement. Elle est temporairement auto-similaire – elle répète sa structure sur de plus petites échelles de manière irrégulière. C'est pour cette raison que, une fois que le filet d'eau commence à se rétrécir, il continue jusqu'à former une singularité ponctuelle. »

« Je ne comprends pas », avoua Oliver.

« Pas étonnant, j'ai laissé de côté une multitude de détails mathématiques. Mais l'idée d'une solution de similarité explique la forme de la singularité, en présumant qu'il existe une solution similaire. C'est là que la technique manquante entre en… »

« Dis donc, l'interrompit Deirdre, je viens de réaliser qu'il existe une photo très célèbre qui illustre parfaitement la singularité. Cette fois, il ne s'agit pas d'eau, mais de lait, et les gouttes ne tombent pas vers le bas. »

« Pardon ? »

« L'ouvrage de D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, publié en 1942. Dans le premier volume, on trouve la photo d'une éclaboussure de lait, en forme de couronne, sur une assiette. » (Voir la figure 47.)

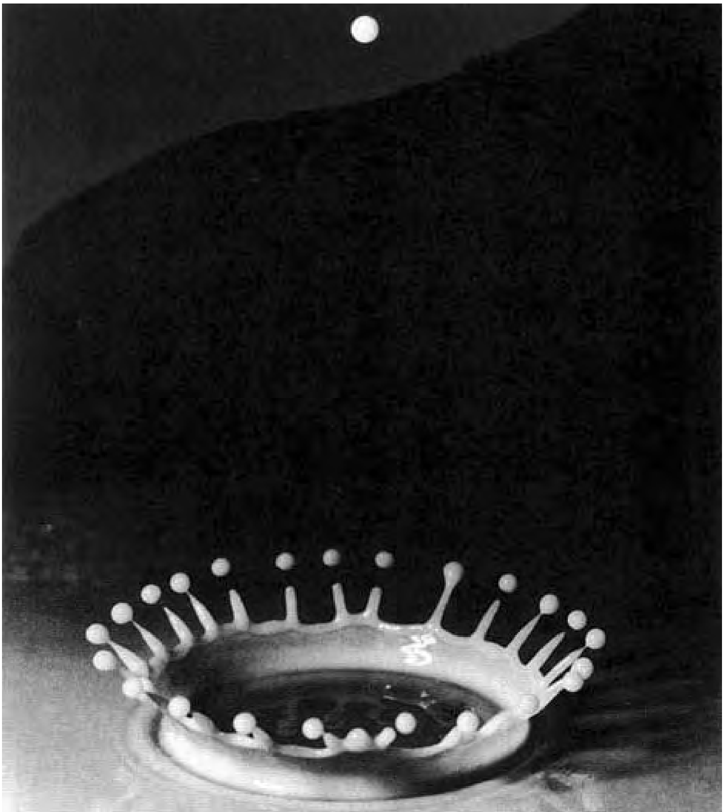


Figure 47. **Les célèbres gouttes de lait d'Harold Edgerton. Chaque « pointe » de la couronne ressemble à la troisième image de la figure 45.**

« Oh, exact, dit Oliver. La photo a été prise par Harold Edgerton du *Massachusetts Institute of Technology*. Mais elle ne ressemble pas à mes dessins. »

« Si, elle y ressemble. Les « pointes » de la couronne sont comme des petites gouttes à l'extrémité des tubes, qui se rétrécissent jusqu'au point de rencontre. »

« L'article de Peregrine faisait remarquer que la totalité de la série complexe d'événements était universelle, dis-je. Nous voyons toujours la même séquence exacte de formes quand les gouttes se détachent – dans les liquides à la viscosité appropriée. »

Oliver décida de tester la viscosité de sa bière. Elle glissa très facilement, pas du tout comme du sirop. « Est-ce que je vous ai raconté la fois où j'ai inventé une bactérie sur mesure qui transforma l'huile en mélasse ? demanda-t-il. Et qui manqua presque de détruire les champs pétrolifères de la mer du Nord… »

« Oui, une centaine de fois », dit Deirdre. « Et tu as sauvé la situation en créant une levure qui permit de faire fermenter la mélasse en alcool. »

« À propos de mélasse, dis-je, le groupe de Shi a poussé plus loin l'idée d'une solution de similarité et s'est demandé comment la forme de la goutte qui se détache dépend de la viscosité du liquide. Ils effectuèrent de multiples expériences, à l'aide de mélanges d'eau et de glycérol pour obtenir différentes viscosités. Ils se livrèrent aussi à des calculs informatiques et développèrent l'approche théorique via les solutions de similarité. Ils découvrirent alors que pour la plupart des liquides visqueux, il se produit un deuxième rétrécissement avant que la singularité ne se forme et que la goutte ne se détache. »

« Tu veux dire qu'on obtient quelque chose qui ressemble plus à une orange suspendue par un bout de ficelle à l'extrémité d'une aiguille à coudre ? », demanda Deirdre.

« Exactement. Et maintenant, grâce à l'autosimilarité du processus… »

Deirdre me devança. « Aux viscosités les plus élevées cependant, il y a un troisième rétrécissement – orange suspendue par un bout de fil de coton à l'extrémité d'une aiguille à coudre. Et au fur et à mesure que la viscosité augmente, le nombre de rétrécissements successifs croît sans limite. Exact ? »

« Tout à fait. Du moins sous réserve que nous ignorions la limite imposée par la structure atomique de la matière. » (Voir figure 48.)

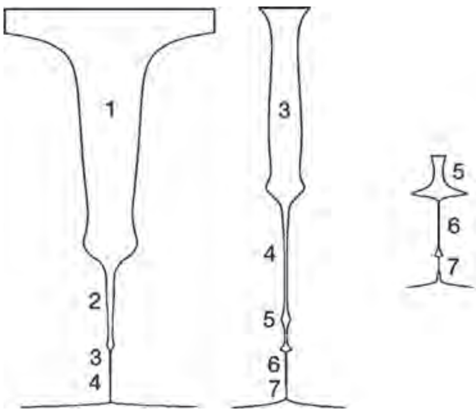


Figure 48. **Rétrécissements successifs d'une goutte dans un liquide visqueux, calculés par X.D. Shi.**

(À gauche) Les quatre premiers rétrécissements. (Au milieu) Agrandissement de la partie inférieure illustrant trois rétrécissements supplémentaires. (À droite). Agrandissement des cinquième, sixième et septième rétrécissements.

« Extraordinaire », dit Oliver.

« Ne jamais considérer les choses comme allant de soi, dis-je. Ce sont les questions les plus simples qui possèdent les réponses les plus surprenantes. Mais il faut que quelqu'un pose la question, et ne pas juste présumer que la réponse est celle que tout le monde attend. »

« J'ai une question toute simple pour toi », dit Deirdre.

« Laquelle ? »

« Veux-tu un autre verre ? C'est ma tournée. »

Oliver et moi, nous la regardâmes, avant de nous tourner l'un vers l'autre. « Certaines questions simples ont la réponse à laquelle tout un chacun s'attend », dîmes-nous à l'unisson.

Feedback

Les montagnes-bonzaï apparaissent dans le roman *fantasy* de Terry Pratchett, *Procrastination*, le 26e de la série *Le Disque-monde*. Elles sont le loisir favori du moine Lu-Tze. Elles nécessitent du temps pour être cultivées, mais le moine a accès à la technologie ancienne du procrastinateur, capable de remonter le temps.

Sites web

Gouttes :

[Anglais] http://courses.ncssm.edu/hsi/splashes/animations.htm

[Anglais] http://en.wikipedia.org/wiki/Harold_E._Edgerton

[Anglais] http://mit.edu/6.933/www/Fall2000/edgerton/www/prewar.html

IAN STEWART
Traduit de l'anglais par Xavier Guesnu

LES DIVAGATIONS MATHÉMATIQUES DE IAN STEWART

Ian Stewart

Professeur de mathématiques à l'université de Warwick et consultant scientifique pour la revue *New Scientist*.

Comment transformer un cornet de glace en carré ?

Quelle est la forme d'une larme ?

Qu'est-ce qu'un labyrinthe logique ? (Et comment les vaches en sortent-elles ?)

Dans ses *Divagations mathématiques*, Ian Stewart nous revient avec de nouvelles énigmes encore plus farfelues.

Vous découvrirez, entre autres, les principes logiques du voyage dans le temps, la cadence mathématique d'une marche de quadrupèdes ou encore le rapport étrange entre les nombres premiers et le saut d'un kangourou !

Dans un langage clair, accessible, et toujours avec humour, Ian Stewart nous mène de surprises en curiosités à la découverte des mathématiques qui savent aussi se rendre amusantes !

9 782100 557967
6915219
ISBN: 9782100557967

18 € Prix France TTC

DUNOD
www.dunod.com