

TITRE 1

TAUX D'INTÉRÊT ET CALCUL ACTUARIEL

Chapitre 1 _____
Le calcul actuariel : éléments de base . 10 à 25

Chapitre 2 _____
Les instruments à flux multiples..... 26 à 51

Chapitre 3 _____
Taux actuariel 52 à 63

LA FORMATION DES TAUX D'INTÉRÊT

I - ÉLÉMENTS INFLUENÇANT LE NIVEAU DES TAUX D'INTÉRÊT

A - LES MUTATIONS DU SYSTÈME MONÉTAIRE ET FINANCIER FRANÇAIS

Les conditions de formation des taux d'intérêt ont été bouleversées par la déréglementation et le décloisonnement des marchés financiers dans le milieu des années 80. Cette mutation s'est traduite par le recours à une régulation des marchés par le biais des taux d'intérêt au lieu d'une administration quantitative des financements (en termes de masse et de structure).

Dès lors, les taux d'intérêt sont devenus une variable très importante dans les décisions de tous les agents économiques.

B - EXPLICATIONS DE LONG TERME

À long terme, l'évolution des taux d'intérêt s'explique par des variables telles que le niveau de l'inflation (cf. fiche n° 2), la propension à consommer ou le partage de la valeur ajoutée. L'influence des politiques économiques est assez faible.

Outre l'incidence des caractéristiques structurelles de l'économie, le niveau des taux d'intérêt s'établit par la confrontation entre une offre et une demande de capitaux : le taux d'intérêt est un prix qui se forme selon le mécanisme de la loi de l'offre et de la demande.

C - EXPLICATIONS DE COURT TERME

Contrairement aux taux d'intérêt de moyen et long termes, les taux courts sont totalement influencés par les politiques économiques.

Plus précisément, par ses différentes procédures d'intervention, la Banque de France influence très fortement les taux à court terme (cf. Titre IV, chapitre 1). Par la politique monétaire menée, la Banque Centrale Européenne (BCE) joue également un rôle très important.

II - L'HYPOTHÈSE D'UN TAUX UNIQUE

A - LA DIVERSITÉ DES TAUX D'INTÉRÊT

Comme cela apparaît dans les développements précédents, il n'existe pas un taux d'intérêt unique mais une diversité de taux d'intérêt.

Fondamentalement, les taux d'intérêt varient selon le risque de défaut et le risque de taux des titres concernés.

Le risque de défaut fait référence à la probabilité de non remboursement par l'emprunteur. Le risque de taux dépend de l'échéance du titre ou de sa maturité (durée séparant l'instant présent de l'échéance). Plus celle-ci est longue, plus la valeur du titre sera sensible à une variation des conditions du marché financier.

Dès lors, les titres de court terme devraient présenter des taux d'intérêt plus faibles que les titres de long terme. De la même façon, les titres ayant un risque de défaut plus élevé devraient servir un intérêt plus fort.

B - L'HYPOTHÈSE D'UNE COURBE DES TAUX PLATE

Bien qu'il soit évident qu'il existe une diversité de taux d'intérêt, les explications macro-économiques et micro-économiques du taux d'intérêt supposent qu'il existe un taux d'intérêt unique.

En effet, il existe une structure par terme des taux d'intérêt. Cependant, tout au long de l'ouvrage, on suppose que le taux d'intérêt est unique. On parle d'une courbe des taux plate et d'un déplacement parallèle de la courbe des taux.

I - JUSTIFICATION DE L'INTÉRÊT

L'intérêt peut être défini comme la rémunération d'un prêt d'argent effectué par un agent économique (prêteur) à un autre agent économique (emprunteur). Pour l'emprunteur, l'intérêt apparaît comme un coût.

Dans une économie monétaire, les justifications de cette rémunération sont le temps et le risque.

A - LA PRISE EN COMPTE DU TEMPS

La micro-économie financière nous enseigne que les agents économiques ont une préférence pour le présent. Or, un agent économique qui prête une somme d'argent renonce à une consommation présente. Se privant de l'utilité qu'il pourrait recevoir de cette consommation immédiate, il est normal qu'il reçoive une rémunération le dédommageant de cette privation temporaire.

B - LA PRISE EN COMPTE DU RISQUE

1 - L'inflation

Au cours du temps, l'inflation entraîne une érosion monétaire. La rémunération obtenue par le prêteur doit au moins compenser cet effet. Le taux d'intérêt doit comprendre une prime d'inflation. Il est alors un taux nominal, c'est-à-dire, exprimé en francs courants.

Le taux d'intérêt exprimé en francs constants (sans anticipations inflationnistes) est un taux d'intérêt réel.

La relation entre ces deux taux est la suivante :

$$(1 + i_n) = [(1 + i_r) \times (1 + d)].$$

Avec :

i_n : taux d'intérêt nominal;

i_r : taux d'intérêt réel;

d : taux d'inflation.

On déduit de cette relation que :

$$i_r = \left[\frac{1 + i_n}{1 + d} \right] - 1$$

2 - Le risque de défaut

Un prêt d'argent comporte également un risque de non-remboursement de la part de l'emprunteur. L'importance de ce risque dépend de la nature de l'emprunteur.

Un prêteur rationnel n'acceptera un tel risque qu'à condition de percevoir une rémunération d'autant plus forte que le risque de non-remboursement est élevé. Le taux d'intérêt devra incorporer une prime de risque supplémentaire.

II - CAPITALISATION ET ACTUALISATION

A - LE PRINCIPE

Le taux d'intérêt doit rémunérer l'abstention de consommer et les différents risques anticipés. Ces éléments sont liés au temps. Ainsi, le taux d'intérêt apparaît comme :

- un taux d'échange entre des valeurs monétaires actuelles et des valeurs monétaires futures;
- un taux de transformation de l'argent dans le temps.

La relation entre le temps et le taux d'intérêt fait référence à la notion de calcul actuariel. En effet, si le taux d'intérêt est un taux de transformation de l'argent dans le temps, cela signifie que deux sommes ne sont pas équivalentes si elles ne sont pas disponibles à la même date.

Le calcul actuariel permet de comparer des sommes qui ne sont pas disponibles à la même date en calculant leur équivalent à une date commune.

B - LA CAPITALISATION

Le calcul de capitalisation ou d'accumulation permet de déterminer la valeur acquise d'une somme présente.

Ce calcul consiste à se déplacer du présent vers le futur. La valeur acquise ou future S_1 d'une somme S_0 capitalisée au taux i pendant une année est :

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 + S_0 \times i \\ &= S_0(1 + i). \end{aligned}$$

La valeur future d'une somme de 1 000 € placée à 6 % pendant un an est 1 060 €.

C - L'ACTUALISATION

La détermination de la valeur actuelle ou présente d'une somme future fait appel à la notion d'actualisation.

Contrairement au calcul de la valeur acquise, celui de la valeur actuelle consiste à se déplacer de l'avenir vers le présent.

La valeur actuelle S_0 d'une somme S_1 disponible dans une année et placée au taux d'intérêt i est :

$$S_0 = S_1(1 + i)^{-1}.$$

La valeur actuelle d'une somme de 860 € perçue dans un an et qui aurait été placée à 7,5 % est de 800 €.

INTÉRÊT SIMPLE

I - MODE DE CALCUL

Il existe deux modes distincts de calcul des intérêts. À chacun correspondent un certain nombre de conventions qu'il est indispensable de connaître afin de calculer la rémunération ou le coût d'une opération.

A - DÉFINITION

L'intérêt simple se caractérise par deux éléments :

- il est payé en une seule fois ;
- il est proportionnel à la durée de l'opération.

Ainsi l'intérêt I perçu pour un placement d'une somme S_0 (nominal du placement) pendant n périodes au taux d'intérêt périodique i , est :

$$I = S_0 \times i \times n.$$

La valeur acquise S_n à la fin des n périodes est :

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 + (S_0 \times i \times n) \\ &= S_0(1 + i \times n). \end{aligned}$$

B - CONVENTIONS PARTICULIÈRES

L'intérêt simple concerne essentiellement les opérations à court terme (inférieures à un an). Il est également utilisé pour le calcul des coupons courus sur le marché obligataire.

Le taux d'intérêt annoncé est généralement un taux annuel. Or, pour les opérations à court terme les conventions sont les suivantes :

- l'année ne comporte que 360 jours ;
- la durée de l'opération est calculée en nombre exact de jours en incluant le premier jour de l'opération et en excluant le dernier jour.

On dit que pour les opérations à court terme, on raisonne sur la base « Exact/360 », également appelée base monétaire.

Si le placement est calculé en nombre de jours, alors :

$$S_n = S_0 \left[1 + \frac{x}{360} \times i \right],$$

avec x , représentant le nombre exact de jours de placement.

La conséquence de ces conventions est que l'intérêt proportionnel ainsi calculé est majoré. En effet, si le taux annuel annoncé est i , le taux d'intérêt utilisé est :

- $i \times \frac{365}{360}$ si l'année est non bissextile ;
- $i \times \frac{366}{360}$ si l'année est bissextile.

II - APPLICATION

A - ÉNONCÉ

Un investisseur achète le 9 juin 2009 un titre de créance négociable sur le marché monétaire et le conserve jusqu'à son échéance le 16 septembre 2009. Les autres caractéristiques de ce titre sont les suivantes :

- nominal : 1 000 000 € ;
- taux d'intérêt nominal : 2,9 %.

Quel est le montant dont dispose l'investisseur lors du remboursement ?

B - CORRIGÉ

La durée exacte du placement est de 99 jours :

- juin : $30 - 8 = 22$;
- juillet et août : $31 \times 2 = 62$;
- septembre : 15.

La valeur de remboursement est alors de :

$$S_n = 1\,000\,000 \times \left(1 + 0,029 \times \frac{99}{360}\right) = 1\,007\,975 \text{ €}.$$

Lors du remboursement, l'investisseur recevra 1 007 975 €, le montant des intérêts étant de 7 975 €. Si les intérêts avaient été calculés sur une base de 365 jours, le montant I aurait été de :

$$I = 0,029 \times 1\,000\,000 \times \frac{99}{365} = 7\,865,75 \text{ €}.$$

Le facteur de majoration est de $\frac{365}{360}$:

$$7\,865,75 \times \frac{365}{360} = 7\,975 \text{ €}.$$

TAUX EFFECTIF D'INTÉRÊT SIMPLE

I - TERME ÉCHU, TERME À ÉCHOIR ET TAUX EFFECTIF

A - DÉFINITIONS

Selon les modalités de l'opération, les intérêts peuvent être versés en début ou en fin de période :

- si les intérêts sont payés en début de période, on parle d'intérêts précomptés ou terme à échoir;
- si les intérêts sont versés en fin de période, on dit qu'ils sont postcomptés ou terme échu.

Un prêteur préfère les intérêts précomptés car il peut les placer immédiatement et en obtenir une rémunération. L'emprunteur préfère payer les intérêts en fin de période car il peut disposer de cette somme pendant toute la durée de l'emprunt.

Le raisonnement précédent met en évidence le fait que le taux d'intérêt terme à échoir est supérieur au taux d'intérêt terme échu. Ceci peut être démontré en établissant l'équivalence entre ces deux taux.

B - RELATION D'ÉQUIVALENCE

Afin d'établir la relation d'équivalence entre le taux terme échu et le taux terme à échoir, considérons un emprunt dont les caractéristiques sont les suivantes :

- S_0 : montant emprunté;
- i : taux d'intérêt annuel;
- n : nombre de périodes;
- intérêt terme à échoir.

Étant donné le mode de calcul des intérêts, en $t = 0$, l'emprunteur dispose d'une somme S' égale à la différence entre le nominal emprunté et les intérêts versés :

$$\begin{aligned} S' &= S_0 - S_0 \times i \times n \\ &= S_0 [1 - i \times n]. \end{aligned}$$

Soit i' le taux d'intérêt postcompté équivalent au taux d'intérêt i précompté.

Les taux d'intérêt i' et i ne seront équivalents que s'ils créent la même séquence de flux. Dès lors, i' doit être tel que le montant des intérêts calculés sur le flux initial S' soit le même que dans le calcul d'intérêts précomptés.

C'est à partir de cette égalité que l'on peut déduire la relation d'équivalence entre les deux taux :

$$i' \times S' = i \times S_0$$

$$i'[S_0(1 - i \times n)] = i \times S_0$$

$$i' = \frac{i}{1 - i \times n}$$

i et n étant des nombres positifs, le dénominateur est inférieur à 1. Ainsi, i' , taux d'intérêt postcompté équivalent au taux d'intérêt i précompté, est supérieur à i . Or, i est le taux d'intérêt annuel qui aurait pu être contractuellement un taux terme échu. Puisque i' est plus grand que i , ceci signifie que payer les intérêts terme à échoir majore le coût de l'emprunt ou la rémunération du prêt.

Par convention, on appelle taux effectif d'intérêt simple, le taux d'intérêt simple postcompté. Il peut s'agir du taux annuel annoncé si le contrat précise que les intérêts sont payés lors du remboursement du prêt. Dans le cas contraire, le taux effectif sera le taux d'intérêt postcompté équivalent au taux d'intérêt terme à échoir.

II - APPLICATION

A - ÉNONCÉ

Une entreprise a reçu deux crédits successifs de sa banque :

- un crédit de 90 000 € du 18 juin au 14 août 2009 au taux de 8 %, l'intérêt étant payé terme à échoir;
- un crédit de 80 000 € du 9 septembre au 21 novembre 2009 au taux de 8 %, l'intérêt étant payé terme échu.

Quel est le taux effectif d'intérêt simple de chacun des deux crédits ?

B - CORRIGÉ

En ce qui concerne le premier crédit, le taux effectif n'est pas le taux de 8 % puisque l'intérêt est payé en début de période. Le taux effectif est le taux postcompté équivalent au taux précompté de 8 % :

$$i' = \frac{0,08}{1 - \left(0,08 \times \frac{57}{360}\right)} = 8,103 \%$$

En effet, il y a exactement 57 jours entre le 18 juin et le 14 août 2009.

Étant donné que les intérêts sont précomptés, le taux effectif est supérieur à 8 %.

En revanche, le taux effectif d'intérêt simple du second crédit est de 8 % puisque l'intérêt est payé terme échu.