



PROfil

Mathématiques pour l'imagerie médicale

Franck Jedrzejewski

PROfil

Mathématiques pour l'imagerie médicale

Franck Jedrzejewski

Depuis une vingtaine d'années, l'imagerie médicale a fait des progrès considérables. Que ce soit dans le domaine de l'échographie, de la tomographie ou de la résonance magnétique nucléaire, les images de nos propres corps sont d'une précision sans cesse renouvelée. Les appareils sont de plus en plus performants et les algorithmes de reconstitution d'images permettent un traitement et une mise en couleurs qui sont une aide précieuse pour le diagnostic médical.

Partant de connaissances élémentaires, cet ouvrage propose un cours approfondi des outils mathématiques nécessaires à l'élaboration des images médicales. Il traite à la fois de la reconstruction de ces images par des techniques déterministes ou bayésiennes, mais aussi de la mise en œuvre de simulations pour la radiothérapie.

Il s'appuie sur la longue expérience d'enseignement de l'auteur auprès d'étudiants en master et de futurs ingénieurs ou de physiciens des hôpitaux. C'est à eux que l'ouvrage s'adresse en priorité, ainsi qu'aux étudiants des classes préparatoires intéressés par l'imagerie. Des éléments bibliographiques complètent l'ouvrage laissant au lecteur le loisir d'approfondir quelques-uns des plus beaux thèmes de ce vaste territoire, qui est au cœur des préoccupations scientifiques d'aujourd'hui.

Franck Jedrzejewski, mathématicien, est enseignant-chercheur au CEA. Il enseigne à l'INSTN et à l'Université de Paris Saclay ; il est l'auteur d'une vingtaine d'ouvrages.

978-2-7598-2475-5



9 782759 824755

49 €

Les ouvrages de la collection PROfil ont pour vocation la transmission des savoirs professionnels dans différentes disciplines. Ils sont rédigés par des experts reconnus dans leurs domaines et contribuent à la formation et l'information des professionnels.

Mathématiques pour l'imagerie médicale

Franck Jedrzejewski

Imprimé en France

ISBN (papier) : 978-2-7598-2475-5 – ISBN (ebook) : 978-2-7598-2496-0

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

© EDP Sciences, 2021

Sommaire

Introduction	9
1 L'imagerie médicale	13
1.1 Les techniques d'imagerie	14
1.2 Quelques repères historiques	16
1.3 La tomодensitométrie (CT)	17
1.4 La tomographie par émission monophotonique (SPECT)	18
1.5 La tomographie par émission de positons (PET)	18
1.6 L'imagerie par résonance magnétique (IRM)	18
1.7 Les radiopharmaceutiques	19
1.8 Les principes physiques de la tomographie	21
1.9 L'échelle de Hounsfield	22
1.10 Les algorithmes de reconstruction	22
2 La transformée de Radon	25
2.1 La transformée de Fourier	25
2.2 La transformée de Radon	28
2.3 Propriétés de la transformée de Radon	31
2.4 Transformée de Radon d'une ellipse	32
2.5 Relation avec la transformée de Fourier	33
2.6 Inversion de la transformée de Radon	34
2.7 Transformée de Radon sur \mathbb{R}^3	35
2.8 Exemples de calcul de transformée de Radon	37

3	Reconstruction analytique	43
3.1	Projections et sinogrammes	43
3.2	Théorème de la coupe centrale	44
3.3	Rétroprojection	45
3.4	Rétroprojection filtrée	46
3.5	Filtrage	47
4	La transformée de Radon sur \mathbb{R}^n	49
4.1	Intégration sur \mathbb{R}^n	49
4.2	Propriétés de la transformée de Radon	53
4.3	Relation avec la transformée de Fourier	57
4.4	Potentiels de Riesz	57
4.5	Inversion de la transformée de Radon	60
4.5.1	Cas des dimensions impaires	60
4.5.2	Cas des dimensions paires	62
4.6	Harmoniques sphériques	65
5	Reconstruction discrète	69
5.1	Interpolation	69
5.1.1	L'interpolation de Lagrange	69
5.1.2	L'interpolation d'Hermite	70
5.1.3	L'interpolation de Tchebychev	71
5.1.4	Les courbes de Bézier	71
5.1.5	Les splines cubiques	72
5.2	Régression linéaire	73
5.3	Échantillonnage et théorème de Nyquist	74
5.4	Reconstruction discrète	78
5.4.1	Reconstruction par rétroprojection filtrée	78
5.4.2	Reconstruction par transformée de Fourier rapide	79
6	Méthodes numériques matricielles	83
6.1	Méthode de Kaczmarz	84
6.2	Conditionnement d'une matrice	85
6.2.1	Propriétés du conditionnement	87
6.2.2	Estimation du conditionnement	88
6.3	Méthodes directes	89
6.3.1	Méthode de Cholesky	89
6.3.2	Factorisation LU	89
6.3.3	Factorisation QR et méthode de Householder	90
6.4	Méthodes itératives	92
6.4.1	Méthode de Jacobi	93
6.4.2	Méthodes de relaxation	94

6.5	Méthodes projectives	94
6.5.1	Méthode d'Arnoldi	95
6.5.2	Méthode GMRES (Generalized Minimum Residual Method)	96
6.5.3	Méthode FOM (Full Orthogonal Method)	97
6.5.4	Méthode du gradient conjugué	97
6.5.5	Méthode du gradient conjugué pour les moindres carrés	98
7	Problèmes inverses	99
7.1	Problèmes directs, problèmes inverses	99
7.2	Exemples de problèmes inverses	100
7.3	Problèmes mal posés	101
7.4	Problèmes inverses mal posés	103
7.5	L'électro-encéphalographie	104
7.6	L'échographie	104
8	Régularisation et méthodes itératives algébriques	107
8.1	Équation normale	108
8.2	Régularisation de Tikhonov	110
8.3	Décomposition en valeurs singulières	111
8.4	Méthode de troncature spectrale	115
8.5	Critère de Morozov	116
8.6	Méthode itérative de Landweber	118
9	Probabilités	121
9.1	Lois de probabilités	122
9.1.1	Lois discrètes	127
9.1.2	Lois continues	127
9.2	Modes de convergence des lois	130
9.3	Estimateurs	131
9.4	Lois conditionnelles	132
9.5	Régression multilinéaire	135
9.6	Vecteurs gaussiens	137
9.7	Tirages d'échantillons aléatoires	138
9.7.1	Méthode des congruences	139
9.7.2	Méthode de la transformée inverse	139
9.7.3	Méthode de Box-Muller	140
9.7.4	Méthode du rejet de von Neumann	140
9.7.5	Méthode de Cheng pour une loi gamma	141
9.8	Intégration par Monte-Carlo	141

9.8.1	Échantillonnage simple	141
9.8.2	Réduction de variance	142
9.8.3	Échantillonnage suivant l'importance	143
9.9	Processus de Markov	146
9.9.1	Mouvement brownien	147
9.9.2	Chaînes de Markov	148
9.10	Algorithme de Metropolis-Hastings	151
9.11	Modèle d'Ising	152
10	Méthodes itératives statistiques	153
10.1	Méthode des moments	154
10.2	Méthode ML du maximum de vraisemblance	155
10.3	Méthode EM d'espérance-maximisation	158
10.4	Méthode MLEM	164
10.5	Méthode OSEM	166
11	Méthodes bayésiennes	167
11.1	Approches bayésiennes	167
11.2	Calcul de lois <i>a posteriori</i>	169
11.3	Modèles bayésiens linéaires	173
11.4	Choix des lois <i>a priori</i>	174
11.4.1	Lois conjuguées	174
11.4.2	Lois impropres	175
11.4.3	Lois de Jeffreys	175
11.5	Maximum d'entropie	177
12	Simulation de radiothérapie par Monte-Carlo	181
12.1	Modélisation des trajectoires	182
12.2	Interaction photon-matière	184
12.2.1	Diffusion élastique de Rayleigh	184
12.2.2	Diffusion inélastique de Compton	185
12.2.3	Absorption photoélectrique	186
12.2.4	Création de paires électron-positon	187
12.3	Algorithme de propagation en milieu inhomogène	187
13	Imagerie par résonance magnétique	191
13.1	Le moment magnétique	192
13.2	La précession de Larmor	193
13.3	Phénomènes de relaxation	193
13.4	Équations de Bloch	194
13.5	Champ radiofréquence	196
13.6	Impulsions radiofréquences	197

13.7	Localisation et gradients de champ	198
13.8	Équations de Bloch-Torrey	200
13.9	Échos de spin	203
13.10	Reconstruction de l'image	205
14	Traitement de l'image	207
14.1	L'image numérique	207
14.2	Représentation des couleurs	208
14.3	Formats de fichiers	210
14.4	Filtrage linéaire	211
14.4.1	Traitement du flou	212
14.4.2	Détection de contours	213
14.4.3	Détection de points d'intérêt	216
15	Segmentation de l'image	217
15.1	Segmentation par seuillage	218
15.1.1	Méthode d'Otsu	218
15.1.2	Méthode des k-moyennes	219
15.2	Segmentation par contours	219
15.2.1	Filtre de Canny	220
15.2.2	Filtre de Deriche	221
15.2.3	Filtre de Shen-Castan	223
15.2.4	Contours actifs	223
15.3	Segmentation par régions	225
15.3.1	Méthode de croissance de régions	225
15.3.2	Méthode de découpe-fusion	226
15.4	Segmentation par optimisation stochastique	226
15.4.1	Fonctionnelle de Mumford et Shah	226
15.4.2	Méthodes markoviennes	228
15.4.3	Méthode du recuit simulé	230
	Bibliographie	231

Introduction

Ce livre est une introduction aux méthodes mathématiques considérées de leur point de vue pratique et de leur mise en applications pour l'imagerie médicale. C'est, à ma connaissance, le premier cours publié en langue française. Il s'adresse à des physiciens ou à des ingénieurs impliqués dans le domaine, mais aussi à des mathématiciens qui souhaiteraient une introduction concise à ces techniques. Il se base sur un cours donné pendant une dizaine d'années au master 2 de Radiophysique médicale et au Diplôme de qualification en physique radiologique et médicale (DQPRM). Il doit permettre aux élèves d'acquérir rapidement les outils mathématiques nécessaires à la compréhension d'articles de recherche ou d'ouvrages plus compliqués. Il sera utile à tous ceux qui souhaitent mettre en pratique par le développement de logiciels le traitement d'images médicales.

Le premier chapitre donne les bases physiques principales de l'imagerie médicale, non pas en vue de l'interprétation de ces images, mais du point de vue de leur reconstitution à partir des instruments de mesures, scanners et autres. Il présente la différence entre tomographie d'émission et tomographie de transmission et introduit les principaux radiopharmaceutiques employés aujourd'hui. Il donne aussi quelques éléments relatifs à l'histoire de l'imagerie à travers les techniques, mais aussi à travers la mise au point d'algorithmes.

Le deuxième chapitre nous introduit au cœur des méthodes mathématiques. Il présente les éléments indispensables à la transformée de Radon,

qui est en quelque sorte, ce que les détecteurs mesurent en tomographie. La difficulté de ces mesures est de les recombinaison pour reconstituer l'objet, fragment du patient, qui a été exploré par le scanner. Il s'agit en réalité d'inverser la transformée de Radon pour reconstituer l'objet. Mais les reconstructions analytiques se heurtent aux difficultés des mesures physiques qui sont souvent entachées d'erreurs dues au bruit des appareils, mais aussi au nombre limité de projections.

La reconstruction analytique en *tomographie computationnelle* fait l'objet du troisième chapitre. Il s'agit d'explicitier la rétroprojection ou inversion de la transformée de Radon et de voir comment, en pratique, cette rétroprojection est mise en œuvre à travers un ensemble de filtrages destinés à améliorer la qualité et la fiabilité de l'image reconstruite.

Le quatrième chapitre étudie de manière très générale la transformée de Radon sur \mathbb{R}^n , sa relation avec la transformée de Fourier et les différentes expressions que prend son inversion selon la parité de la dimension.

Le cinquième chapitre présente tout d'abord les bases élémentaires mathématiques de l'interpolation polynomiale et de l'approximation. Il traite de l'interpolation de Lagrange, de Tchebychev et des splines cubiques qui sont très souvent utilisées en imagerie. Puis le chapitre reprend la résolution de l'équation fondamentale de la tomographie qui est traitée selon une reconstruction par discrétisation directe ou par transformée de Fourier rapide.

Le sixième chapitre est un résumé des méthodes d'analyse numérique utiles pour la résolution de systèmes linéaires. Il présente les méthodes directes fondées sur les factorisations de matrices, les méthodes itératives utilisées dans la reconstruction algébrique d'images, ainsi que les méthodes projectives, comme celle du gradient conjugué.

Le septième chapitre traite des problèmes inverses. La majorité des problèmes de reconstruction d'images sont des problèmes inverses. Ces problèmes que l'on rencontre dans de très nombreux secteurs industriels ont des méthodes de résolutions générales qui s'appliquent ici à l'imagerie médicale.

Le huitième chapitre est une application des méthodes présentées au chapitre précédent. Il s'agit de reconstruire une image en transformant un problème inverse mal posé en un problème bien posé de recherche d'extremum, transformation que l'on appelle *régularisation*. Cette technique se base sur la résolution de l'équation normale. La plus célèbre est la régularisation de Tikhonov.

Le neuvième chapitre est un résumé des principaux concepts de probabilités. Il présente les différentes lois de probabilités, l'intégration par

Monte-Carlo et quelques rudiments sur les chaînes et processus de Markov que l'on retrouve dans les chapitres suivants.

Le dixième chapitre présente les méthodes itératives statistiques. La méthode du maximum de vraisemblance, la méthode d'espérance-maximisation et ses variantes qui sont aujourd'hui au cœur des algorithmes implantés sur les CT-Scans. En particulier, nous introduisons la méthode OSEM qui est celle qu'on utilise aujourd'hui à quelques variantes près.

Le onzième chapitre est une introduction aux méthodes de statistique bayésienne. Il présente divers estimateurs et les techniques de choix des lois *a priori*. Il propose des variantes à des algorithmes comme celui de l'espérance-maximisation. Il se termine par l'exposé de la méthode du maximum d'entropie.

Le douzième chapitre montre comment en simulant les interactions des rayonnements avec la matière par des méthodes de Monte-Carlo, il est possible de construire des simulations d'irradiation de tumeur. Ces méthodes sont facilement implémentables et constituent le cœur des grands logiciels actuels.

Le treizième chapitre traite de l'imagerie par résonance magnétique (IRM) qui est une technique fondée sur l'utilisation de champs magnétiques. Plus le champ est intense, plus la résolution de l'image est meilleure. Ce chapitre nécessite une connaissance importante des phénomènes physiques qui est rappelée dès les premiers paragraphes.

Le quatorzième chapitre concerne les éléments de l'image elle-même : présentation des différents formats d'image (TIFF, JPEG, DICOM, etc.), suppression du flou et des artefacts, introduction aux filtres numériques et détection de points d'intérêt.

Enfin, le quinzième et dernier chapitre traite des techniques de segmentation de l'image dont on sait l'importance pour le diagnostic médical. Pour approfondir ce cours introductif, on se reportera à la bibliographie qui termine l'ouvrage. En particulier, aux ouvrages de J.T. Bushberg *et al.* [4], de B. Chalmond [5], de R. Chityala et S. Pudipeddi [7] qui inclut des exemples en Python, de C.L. Epstein [15], de T.G. Feeman [17], de F. Natterer [37], de P. Suetens [51], ainsi qu'au recueil d'articles publiés par T. Farncombe et L. Iniewski [16] en 2017.

Lors de la rédaction de cet ouvrage de nombreux collègues et étudiants anonymes ont bien voulu me faire part de leurs avis et suggestions pour améliorer la lisibilité du texte. Je tiens à les remercier ici très sincèrement.

1

L'imagerie médicale

L'imagerie médicale est apparue au début du xx^e siècle. Grâce aux progrès de l'informatique et de la maîtrise technologique, elle a connu une vive progression tant par les appareils employés que par les algorithmes utilisés. Ces progrès permettent aujourd'hui au corps médical d'envisager un diagnostic fiable. L'imagerie s'appuie sur différents phénomènes physiques comme l'absorption des rayons X, la résonance magnétique nucléaire, la réflexion d'ultrasons ou la radioactivité. On distingue l'*imagerie structurelle* qui porte sur la visualisation des organes du corps humain et l'*imagerie fonctionnelle* qui, elle, s'intéresse à la physiologie et au métabolisme de ces organes.

Parmi les techniques d'imagerie structurelle, on peut citer la radiographie par rayons X, le tomodensitomètre ou CT-scan, l'angiographie, la résonance magnétique nucléaire (IRM), l'échographie et les méthodes optiques comme l'endoscopie.

Parmi les méthodes d'imagerie fonctionnelles figurent la *tomographie par émission de positons* (TEP en français, PET en anglais), la *tomographie par émission monophotonique* (TEMP en français, SPECT en anglais), l'IRM fonctionnelle ou la spectrographie infrarouge.

La tomographie (du grec *tomê*, coupe) est une technique générale qui se fonde sur la mesure de rayonnement émis, transmis ou réfléchis par la matière pour produire une carte du corps humain ou de ses structures locales. Elle ne s'applique pas seulement au domaine médical. La tomographie sismique, par exemple, est une discipline de pratique courante, qui est apparue au début du xx^e siècle. Dans le domaine médical, la mesure du rayonnement se fait par des tomographes à émissions de positons ou de photons. Elle est souvent couplée à l'injection de traceurs radioacteurs émetteurs d'un rayonnement gamma (photons à haute fré-

quence). Le principe de la tomographie repose sur l'émission de rayons X qui traversent le corps humain et sont mesurés en sortie. L'absorption du rayonnement initial varie avec la densité de la matière traversée. Si le signal mesuré est proche du signal source, les rayons n'ont pratiquement pas interagi avec la matière (c'est le cas des poumons par exemple). Au contraire, si le signal mesuré est très différent du signal source, cela signifie que les rayons ont été fortement absorbés. Le problème de l'imagerie est alors de reconstituer l'image à partir des mesures effectuées.

On distingue la *tomographie de transmission* dans laquelle le rayonnement mesuré traverse le corps humain et la *tomographie d'émission* qui consiste à mesurer l'émission du corps lui-même (après injection de traceurs).

Les images reconstituées sont des images bidimensionnelles. Selon les plans de coupe, on parle de *coupe sagittale* (coupe menée suivant un plan vertical qui passe d'avant en arrière, divisant le corps en deux moitiés droite et gauche), de *coupe coronale ou frontale* (coupe menée suivant un plan de gauche à droite du corps et perpendiculaire à la coupe sagittale) et de *coupe transverse ou transversale* ou encore axiale (coupe menée selon un plan horizontal partageant la partie crâniale de la partie caudale). Ces trois coupes définissent les trois dimensions de l'espace.

1.1 Les techniques d'imagerie

Parmi les techniques d'imagerie, on distingue :

La *radiographie* qui consiste à envoyer des rayons X sur un objet placé devant une plaque photo, comme dans les ombres chinoises. Les rayons X sont des ondes électromagnétiques dont les fréquences sont comprises entre 10^{16} Hz et 10^{20} Hz. Cela correspond à des longueurs d'ondes de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-12} m et des énergies de photons comprises entre 40 et 4×10^5 eV. Sur le spectre des fréquences, les rayons X se situent entre l'ultraviolet et les rayons gamma (plus énergiques). Ils ont été découverts en 1895 par Wilhelm Röntgen (1845–1923) qui avait remarqué en plaçant différents objets sur une plaque que les rayons X impressionnaient les plaques photographiques. C'est ainsi qu'il réalisa la première radiographie de l'histoire, celle de la main de son épouse, Anna Bertha Röntgen.

Le *scanner* désigne tout d'abord l'appareil ou le dispositif permettant de fabriquer une image numérique. Les *scanners d'aéroports* sont des scanners corporels destinés à assurer la sécurité d'un lieu. Ils utilisent des ondes radio millimétriques qui sont des rayonnements térahertz appelés aussi « rayons T » peu dangereux, car rétrodiffusés par la peau,

mais permettant toutefois de voir à travers les vêtements. Dans le domaine médical, le mot *scanner* désigne à la fois l'instrument et l'examen (comme dans l'expression *passer un scanner*). L'idée essentielle qui a contribué au succès des scanners est simple. Elle consiste à faire tourner autour de l'objet simultanément la source et le détecteur. La technique est appelée dans ce cas *tomodensitométrie* ou *scanographie*, ou encore et plus couramment, *CT Scan* (*computerized tomography*).

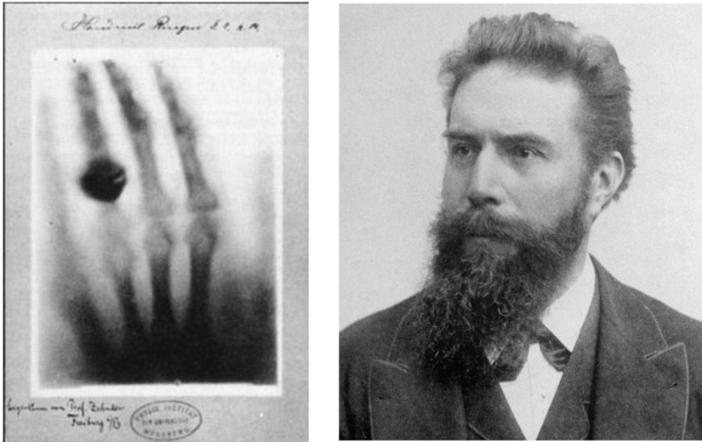


Fig. 1.1. Wilhelm Röntgen (1845-1923) et la première radiographie (1895).

La *scintigraphie* est une méthode d'imagerie fonctionnelle qui consiste à injecter un traceur appelé *radiopharmaceutique* dont on détecte les rayonnements. Les isotopes radioactifs constituent une faible dose de radioactivité et sont éliminés rapidement par le patient. Le traceur est choisi en fonction de son aptitude à se fixer sur tel ou tel organe du corps humain.

La *fluoroscopie* est une technique de radioscopie instantanée dans laquelle l'image se forme sur un écran fluorescent. Utilisée pendant les opérations chirurgicales ou pour positionner un patient dans des examens particuliers (*e.g.* protonthérapie), la fluoroscopie permet de suivre en temps réel l'évolution des produits injectés.

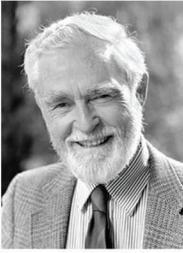
L'*angiographie* (littéralement « imagerie des vaisseaux ») concerne l'imagerie particulière des vaisseaux sanguins. Elle suppose l'injection d'un produit de contraste (iode, CO_2). Elle se décline en *artériographie* pour l'exploration des artères, *phlébographie* pour l'examen des veines et *coronarographie* pour l'exploration des coronaires.

L'*imagerie par résonance magnétique* (IRM) est une technique d'utilisation d'un champ magnétique intense (entre 2 et 10 tesla, Rappelons le champ terrestre est de l'ordre de 30 à 60 μT) et de son interaction sur le spin des protons. Elle permet d'obtenir des coupes sagittales, coronales ou transverses et est particulièrement utilisée en imagerie cérébrale.

L'*échographie* repose sur l'utilisation d'ultrasons (ondes entre 16 kHz et 10 MHz). Une sonde, placée sur le patient, émet des ultrasons qui sont réfléchis (échos) et récupérés par cette même sonde. Le couplage à un appareillage électronique permet d'analyser le signal reçu et de reconstituer l'image. Si l'onde est peu réfléchi, l'image sera noire. Au contraire, si l'onde est très réfléchi, l'image sera blanche, indiquant la présence de matériaux durs comme les os. Entre les deux, dans le cas de réflexion moyenne, l'image produit une gamme de gris.

1.2 Quelques repères historiques

- 1896. Découverte des X par Wilhelm Röntgen ;
- 1897. Premier service de radiologie par Antoine Bécclère (hôpital Tenon) ;
- 1917. Premier travaux de Johann Radon ;
- 1950. Premier scanner à main, doté d'un compteur Geiger, puis d'un compteur à scintillations ;
- 1956. Ronald Bracewell met en évidence les relations entre transformées de Fourier et de Radon ;
- 1958. Première Gamma caméra par Hal Oscar Anger ;
- 1962. Godfrey Hounsfield et Allan McLeod Cormack mettent au point des algorithmes utilisés par les scanners ;
- 1963. Premières applications de la tomographie médicale ;
- 1964. David Kuhl obtient les premières images tomographiques par rétroprojection ;
- 1970. Publication de la première image de tomodensitométrie X ;
- 1971. Premier CT Scan, suite aux recherches d'Allan McLeod Cormack et G. Hounsfield (Nobels en 1979) ;
- 1973. Premiers IRM. P. Lauterbur (chimiste), P. Mansfield (Physiciens), (Nobels en 2003) ;
- 1976. Premier PET Scan ;
- 1979. Premier SPECT Scan ;
- 2001. Premier couplage PET-CT commercialisé.



Ronald Bracewell
(1921-2007)



David E. Kuhl
(1929-2017)



Allan McLeod Cormack
(1924-1998)



Godfrey Hounsfield
(1919-2004)

Fig. 1.2. Grands acteurs de la tomographie.

1.3 La tomodensitométrie (CT)

La *tomodensitométrie*, appelée aussi *scanographie* ou *CT-scan* (*computerized tomography*) est une technique d'imagerie médicale qui consiste à envoyer sur un objet des rayons X et à mesurer les rayons sortants. L'émetteur des rayons effectue une rotation complète autour de l'objet en même temps que le récepteur mesurant l'absorption des rayons. La difficulté – que nous étudierons dans les prochains chapitres – est de reconstruire l'image bidimensionnelle de l'objet à partir des mesures effectuées. La même technique est utilisée pour des images tridimensionnelles en effectuant un très grand nombre de coupes planes.

Il existe plusieurs types de densitomètres. Les premiers modèles datent d'octobre 1971.

1. **scanners hélicoïdaux.** Développés dans les années 1990. Émission de rayons X en continu. La table avance à vitesse constante dans l'anneau. L'examen dure moins d'une seconde ;
2. **scanners multi-barrettes.** Les tomodensitomètres multidétecteurs (ou multi-barrettes), constitués de plusieurs rangées de détecteurs (barrettes), assurent des images plus fines, mais l'irradiation est plus importante ;
3. **scanners double sources.** Deux sources de rayons X à angle droit permettent une vitesse d'acquisition plus rapide.

Pour faire ressortir certains tissus, on couple cet examen à un produit de contraste. Ce produit a la propriété d'absorber très fortement les rayons X et par conséquent de rendre les tissus plus visibles. Présent dans le corps, il disparaît en quelques heures ou en quelques jours.

1.4 La tomographie par émission monophotonique (SPECT)

La tomographie par émission monophotonique (TEMP en français ou SPECT en anglais) est une méthode basée sur la scintigraphie. Elle consiste à injecter un radiopharmaceutique au patient (en général du xénon 133 ou de l'iode 123) qui s'accumule dans les organes qui le métabolise. On observe alors le rayonnement gamma (photon de hautes fréquences) de ces traceurs avec une *gamma caméra*. Comme la quantité de matière radioactive injectée au patient est faible, la sensibilité du collimateur doit être adaptée puisque le nombre de photons émis est faible. Pour amplifier le signal et mesurer avec plus de précision l'énergie des photons, on utilise des photomultiplicateurs. Les gamma caméras sont souvent couplées à des tomodensitomètres. La première gamma caméra a été inventée en 1957 par H.O. Anger. Les principaux algorithmes sont décrits dans [3].

1.5 La tomographie par émission de positons (PET)

La *tomographie par émission de positons* (TEP en français, PET en anglais) est une méthode d'imagerie fonctionnelle tridimensionnelle permettant de mesurer l'activité métabolique d'un organe. Elle consiste en l'injection d'un traceur radioactif (du Fluor 18 sous forme de glucose). Ce traceur émet des positons qui s'annihilent avec des électrons en émettant deux photons dans des directions diamétralement opposées. Ces photons sont récupérés par une couronne de détecteurs. L'ordinateur calcule le lieu de l'annihilation. Le premier tomographe a été construit au *Massachusetts General Institute* en 1965.

Depuis les années 2000, sur une idée de David Townsend de l'université de Genève, le PET scan qui donne des informations métaboliques est toujours couplé à un CT-Scan qui, lui, donne des informations anatomiques. Ces machines sont dorénavant le standard de référence des grands constructeurs (Philips, Siemens et General Electric).

1.6 L'imagerie par résonance magnétique (IRM)

Inventée dans les années 1970, l'*imagerie par résonance magnétique* (IRM) est une technique d'imagerie médicale qui consiste à placer le patient dans un champ magnétique intense. Ce champ créé par un aimant supraconducteur provoque l'alignement des moments magnétiques

Kullback-Leibler (Divergence de),
 126, 161
 Lagrange (Polynômes de), 69
 Lambert-Beer (Loi de), 21
 Landweber (Méthode de), 118
 Laplacien, 58
 Lauterbur (Paul), 16, 198
 Lax-Milgram (Lemme de), 111
 Lebesgue (Henri), 121
 Legendre (Transformée de), 180
 Libre parcours moyen, 183
 Ligne de partage des eaux
 (Segmentation), 226
 Limite centrale (Théorème de la),
 131
 Lippmann-Schwinger (Équation
 de), 106
 Log-vraisemblance, 156
 Loi bêta, 129
 Loi binomiale, 127
 Loi de Bernoulli, 127
 Loi de Cauchy, 128
 Loi de Gauss, 127, 154, 157, 172,
 179
 Loi de Poisson, 127, 154, 156, 171,
 179
 Loi de probabilité, 123
 Loi exponentielle, 128
 Loi faible des grands nombres, 131
 Loi gamma, 129, 155, 158, 180
 Loi uniforme, 127
 Lois *a posteriori*, 169, 174
 Lois *a priori*, 168, 174
 Lois de Jeffreys, 175
 Lois forte des grands nombres, 131
 Lois impropres, 175
 Lorentzienne, 128

 Mansfield (Peter), 16
 Markov (Chaîne de), 148
 Markov (Processus de), 146, 228
 Matrice de passage, 112
 Matrice de transition, 150
 Maximum de vraisemblance, 155
 Metropolis (Nicholas), 151
 Metropolis-Hastings (Algorithme
 de), 151

 MLEM (Maximum Likelihood
 Expectation
 Maximization), 164
 Moindres carrés, 73
 Moment magnétique, 192
 Monte-Carlo (Intégration par), 141
 Monte-Carlo (Simulation par), 181
 Morozov (Critère de), 116
 Morphing, 216
 Mouvement brownien, 147

 NURBS (Non Uniform Rational
 Basis Splines), 72
 Nyquist (Points de), 76
 Nyquist (Théorème de), 75

 Orey (Théorème de), 150
 OSEM (Ordered Subsets EM), 23,
 166
 Otsu (Méthode de), 218

 Padé (Approximation de), 69
 PET Scan, 16, 18
 Phlébographie, 15
 Pixel, 207
 Précession de Larmor, 193
 Probabilité stationnaire, 149
 Problème inverse, 99
 Problème mal posé, 101

 Réduction de variance, 142
 Régression linéaire, 73, 135
 Régularisation, 107
 Régularisation de Tikhonov, 110,
 111
 Rétroprojection, 45
 Rétroprojection filtrée, 46, 78
 Radioactivité bêta, 19
 Radiographie X, 14
 Radiopharmaceutique, 19
 Radon (Johann), 16
 Radon (Transformée de), 25,
 28–32, 34, 35, 37, 39, 40,
 49, 53, 55, 57, 60
 RAMLA (Row Action Maximum
 Likelihood Algorithm),
 166
 Rayon spectral, 87
 Recuit simulé, 230

Rejet de von Neumann (Méthode de), 140
 Relaxation (Méthode de), 94
 Riesz (Noyau de), 57
 Riesz (Potentiel de), 57
 Rodrigues (Formule de), 55
 Röntgen (Wilhelm), 14
 SART (Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique), 23
 Scanners, 14, 17
 Scanographie, 15
 Scattering inverse, 100
 Scintigraphie, 15, 18
 Seuillage, 218
 Shepp-Logan (fantôme de), 40
 Shepp-Logan (Filtre de), 48, 77
 Sinogramme, 43
 SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique), 23
 SMART (Simultaneous Multiplicative Algebraic Reconstruction Technique), 23
 Sobel-Feldmann (Opérateurs de), 214
 SPECT Scan, 16, 18
 Splines, 72
 Stejskal-Tanner (Formule de), 204
 Temps de relaxation, 194
 Tomodensitométrie, 15, 17
 Tomographie, 13
 Tomographie computationnelle, 21
 Tomographie d'émission, 14
 Tomographie de transmission, 14
 Tomographie par émission de positons, 13, 18
 Tomographie par émission monophotonique, 13, 18
 Townsend David, 18
 Tribu, 122
 Troncature spectrale (Méthode de), 115
 Ulam (Stan), 151
 Valeur singulière (Décomposition en), 115
 Valeur singulière d'une matrice, 111
 Variable aléatoire, 122
 Variance, 123
 Vecteur gaussien, 137
 Voxel, 207
 Wiener (Processus de), 147
 Wilson (Matrice de), 88