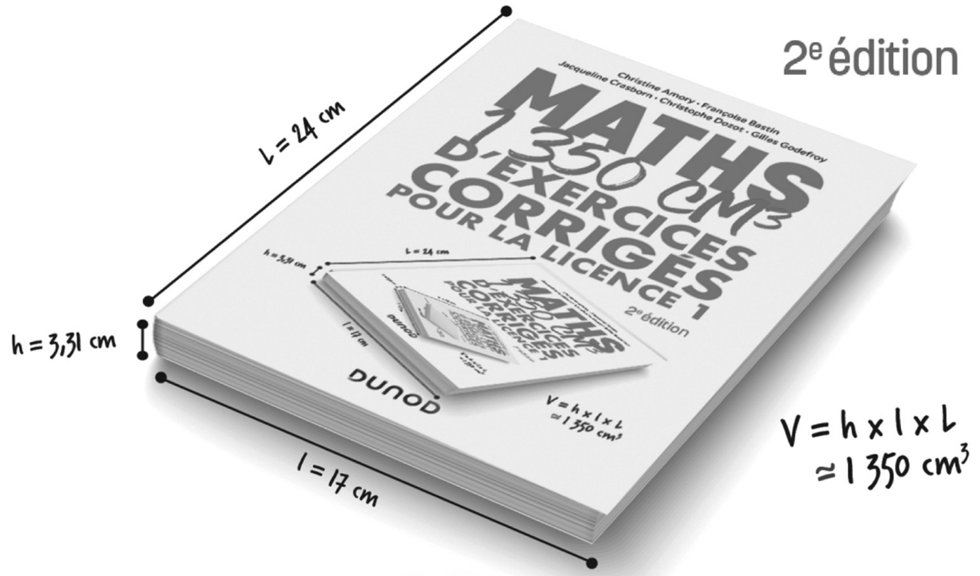
MATHS
1 350 CM³ D'EXERCICES CORRIGÉS
POUR LA LICENCE 1

Christine Amory · Françoise Bastin
Jacqueline Crasborn · Christophe Dozot · Gilles Godefroy

MATHS 1 350 CM³ D'EXERCICES CORRIGÉS POUR LA LICENCE 1

2e édition



DUNOD

Conception de la couverture : Clément Pinçon (WIP)
Illustrations : Rachid Maraï

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-084487-6

Introduction

Cet ouvrage contient de nombreux exercices qui portent sur diverses matières de base en mathématique nécessaires pour aborder des études en sciences. Il s'adresse à des étudiants entamant des études supérieures.

L'ouvrage débute par un « petit test ». Le lecteur le réalisera... ou non, selon son choix. L'objectif de ce test est de donner une idée au lecteur/utilisateur du niveau qu'il maîtrise. Il est basé sur de longues années de pratique.

L'ouvrage se poursuit avec un chapitre constitué de problèmes élémentaires. Nous entendons par là des questions relatives à la bien utile « règle de trois », à de petits problèmes qui se posent dans la vie courante, à des questions de logique de base, ... Nous avons fait en sorte que ces problèmes soient présentés selon une complexité croissante (contexte plus large, nécessitant une analyse, une modélisation et une identification des données utiles plus poussées), en termes de gestion des données et d'étendue des outils concernés pour les résoudre.

Les chapitres suivants sont tous organisés selon la même structure : un rappel de la théorie et des notations qui y sont utilisées, des exercices de base résolus en détail, une liste d'exercices pour s'entraîner (semblables aux exercices de base) et leurs solutions, des exercices plus élaborés, résolus également.

Précisons ce que nous entendons par « plus élaborés ». Il s'agit en fait d'exercices qui demandent davantage de réflexion et présentent tous un aspect qui les rend plus complexes à résoudre. Certains concernent des résultats théoriques, d'autres des applications contextualisées. Ils brassent tous plusieurs compétences et outils.

En fin d'ouvrage apparaît une annexe constituée de deux parties. L'une reprend quelques notations ; on sait tous que selon les pratiques, elles peuvent grandement différer ! L'autre reprend des informations complémentaires sur des mathématiciens célèbres, des compléments d'informations quant au contexte dans lequel certains problèmes sont apparus, et parfois des notes sur l'histoire de leur résolution. Afin de ne pas alourdir la présentation de l'exercice, nous avons préféré les rassembler dans une annexe.

Présentons brièvement chacun des chapitres qui suivent celui consacré aux problèmes élémentaires (premier chapitre).

Le deuxième chapitre reprend des bases à maîtriser et, notamment, des manipulations de système métrique.

Le troisième chapitre présente une étude générale des fonctions. Il débute par les notions et définitions de base et se poursuit par des exercices utilisant des outils fondamentaux tels que les limites, la dérivation et la primitivation.

Le quatrième chapitre présente une étude de base du calcul intégral.

Le cinquième chapitre traite d'équations différentielles. Il est essentiellement consacré aux équations différentielles linéaires à coefficients constants, outil très important en sciences, qui permet déjà de multiples modélisations.

Le dernier chapitre (annexe) contient quelques précisions de notations ainsi que quelques informations bibliographiques et historiques.

Dans la bibliographie, outre les ouvrages consultés, nous citons les sites sur lesquels nous avons puisé des idées ou des informations. Nous nous excusons par avance auprès des auteurs/concepteurs si nous avons omis de citer l'un ou l'autre.

Nous tenons à remercier très vivement toutes les personnes qui sont intervenues d'une manière ou d'une autre dans la genèse et la conception de cet ouvrage, ainsi que Madame Laetitia Herin pour sa disponibilité et son aide.

La vraie science est une ignorance qui se sait.
Montaigne.

Peu importe votre lenteur d'aller, à condition que vous ne vous arrêtiez pas.
Confucius.

Les dix commandements en mathématique

1. **Bien organisé tu seras.**
2. **Les notions apprises tu approfondiras.**
3. **Conditions nécessaire et suffisante jamais tu ne confondras.**
4. **Des fonctions élémentaires les caractéristiques tu connaîtras.**
5. **À la question tu répondras, la marche à suivre te guidera.**
6. **À la cohérence de ta phrase mathématique attentif tu seras.**
7. **À calcul et raisonnement, sens critique toujours tu allieras.**
8. **Avant d'appliquer un théorème, les hypothèses tu vérifieras.**
9. **Gagner en autonomie et efficacité tu devras.**
10. **Aux cours tu écouteras, à la maison tu travailleras.**

Table des matières

Test préliminaire

Ce petit test est destiné à attirer l'attention du lecteur sur certains points fondamentaux qui donnent lieu parfois à de « mauvaises interprétations », ainsi que sur la grande importance de la lecture complète des énoncés et sur la bonne compréhension de tous les termes.

La résolution des questions est facilitée par le fait que pour chacune d'entre elles, un seul item proposé contient une réponse correcte.

Énoncés

Niveau 1

1. La racine carrée de $(-2)^2$ est égale à
- (a) ± 2
- (b) 2
- (c) -2
- (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

2. Le sinus du réel 7
- (a) n'existe pas
- (b) est un nombre négatif plus grand que -1
- (c) est un nombre défini à un multiple de 2π près
- (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

3. Quand on dit que la radiation en UV a augmenté de 60 %, cela signifie que la radiation a été
- (a) multipliée par $3/5$
- (b) divisée par $8/5$
- (c) divisée par $5/8$
- (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

4. Un terrain carré a une aire égale à 81 m^2. Son périmètre est alors égal à
- (a) 20,25 m
- (b) 36 m
- (c) 40,50 m
- (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

5. La valeur absolue de la somme de deux réels est égale à
- (a) la somme des valeurs absolues de chacun d'eux
- (b) la différence des valeurs absolues de chacun d'eux
- (c) la somme des carrés de chacun d'eux
- (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

Niveau 2

1. Si r est un nombre réel, alors la racine carrée de r^2 est égale à
   (a) r
   (b) $-r$
   (c) $\sqrt{r}$
   (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

2. Le cosinus du carré d'un nombre réel est égal au
   (a) carré du cosinus du réel
   (b) double du cosinus du réel
   (c) double du produit du sinus et du cosinus du réel
   (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

3. Un rectangle a une aire de 60 m^2. Sa longueur est 4 m plus grande que sa largeur. Le périmètre du rectangle vaut alors
   (a) 6 m
   (b) 28 m
   (c) 32 m
   (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

4. Soient a, b deux réels non égaux à 1. S'ils vérifient l'égalité $ab = 1$ alors
   (a) l'un des deux est toujours strictement compris entre 0 et 1
   (b) l'un est plus plus grand que 1 et l'autre plus petit que 1
   (c) les deux nombres sont de même signe
   (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

5. Si x est un réel strictement positif, alors la valeur absolue de $-2x + x^2$ vaut toujours
   (a) $2x - x^2$
   (b) $x^2 - 2x$
   (c) $2x + x^2$
   (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

Niveau 3

1. Si x désigne un réel, alors l'inégalité $x^2 > |x|$ est
   (a) équivalente à dire que la valeur du réel x est strictement supérieure à 1
   (b) une condition suffisante pour que le réel x soit strictement supérieur à 1
   (c) une condition nécessaire au fait que le réel x soit strictement supérieur à 1
   (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

2. Pour que le carré d'un nombre réel soit plus petit ou égal à celui-ci,
   (a) il suffit que le réel soit plus petit ou égal à 1
   (b) il est nécessaire que le réel soit plus petit ou égal à 1
   (c) il suffit que le réel soit positif
   (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte
3. La somme des carrés de deux réels est toujours
   (a) plus grande ou égale au produit de ces réels
   (b) plus grande ou égale à la somme de ces réels
   (c) plus petite ou égale au produit de ces réels
   (d) plus petite ou égale à la somme de ces réels
4. L'expression $\cos(\arcsin(-1/3))$
   (a) n'a pas de sens
   (b) est égale à $2\sqrt{2}/3$
   (c) est égale à $-2\sqrt{2}/3$
   (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte
5. L'expression $\arcsin(\sin(6\pi/7))$ est égale à
   (a) $-\pi/7$
   (b) $\pi/7$
   (c) $6\pi/7$
   (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

Solutions

Niveau 1

1. La réponse correcte est (b), à savoir $\sqrt{(-2)^2} = 2$.
   De fait, la racine carrée d'un réel positif (ici $(-2)^2 = 2^2$) est **le** réel positif dont le carré est le nombre de départ.
2. La réponse correcte est (d).
   De fait, le sinus d'un réel est un réel toujours défini. Comme le nombre 7 est compris entre 2π et $2\pi + \pi/2$, son sinus est positif.
3. La réponse correcte est (c).
   De fait, augmenter un nombre de 60 % revient à lui ajouter $6/10 = 3/5$ de sa valeur, ou encore à le multiplier par $1 + 3/5 = 8/5$, donc à le diviser par $5/8$.
4. La réponse correcte est (b).
   De fait, puisque l'aire du carré vaut 81 m^2, la longueur de son côté est égale à 9 m et par suite son périmètre mesure $4 \times 9 = 36$ m.

5. La réponse correcte est (d).
Voici des contre-exemples pour les autres items.
Pour (a) : $|r+(-r)| = 0$ et $|r| + |-r| = 2|r| > 0$ quel que soit le réel non nul r.
Pour (b) : $|r+r| = 2|r| > 0$ et $|r| - |r| = 0$ quel que soit le réel non nul r.
Pour (c) : $|r+r| = 2|r|$ et $r^2 + r^2 = 2r^2 = 2|r|^2 = 2|r|$ si et seulement si $r = 0$ ou $|r| = 1$.

Niveau 2

1. La réponse correcte est (d).
De fait, la racine carrée de r^2 est égale à la valeur absolue de r, donc pas toujours égale à r ou à $-r$ (cela dépend du signe de r). Et enfin, l'expression $\sqrt{r}$ n'est définie que si r est positif !

2. La réponse correcte est (d).
Voici des contre-exemples pour les autres items.
Pour (a) : on a $\cos(\pi) = -1$ et $\cos^2(\sqrt{\pi}) \geq 0$.
Pour (b) : pour tout réel dont le cosinus est strictement plus grand que $1/2$, le double de ce cosinus est strictement plus grand que 1 et n'est donc égal au cosinus d'aucun réel.
Pour (c) : d'une part, on a $\sin(\pi) = 0$. D'autre part, on a $\cos(\pi^2) \neq 0$: en effet, puisque $\pi^2 \in \left]3\pi, 3\pi + (\pi/2)\right[$ et que la fonction cosinus est strictement croissante sur cet intervalle, on a $\cos(\pi^2) < \cos(3\pi + (\pi/2)) = 0$.

3. La réponse correcte est (c).
De fait, désignons par L la mesure de la longueur du rectangle. Vu l'hypothèse sur la mesure de sa largeur, l'expression du fait que son aire est égale à 60 m^2 s'écrit $L\,(L-4) = 60$. Les deux solutions de cette équation du second degré sont de signes opposés ; la solution positive est égale à 10. Il s'ensuit que le périmètre du rectangle est égal à $2 \times 10 \;+\; 2 \times 6 \;=\; 32$ m.

4. La réponse correcte est (c).
De fait, le produit étant positif, les deux nombres doivent nécessairement être de même signe. On peut aussi remarquer que si les deux nombres sont négatifs, les propositions (a) et (b) sont inexactes.

5. La réponse correcte est (d).
De fait, les expressions (a) et (b) peuvent prendre des valeurs strictement négatives, donc ne peuvent être égales à la valeur absolue d'un réel. Comme $x > 0$, on a en effet d'une part $2x - x^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq 2$ et d'autre part $x^2 - 2x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 2$. Enfin, si $x \geq 2$, on a $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$ et $x^2 - 2x \neq x^2 + 2x$, donc (c) est également une réponse incorrecte.

Niveau 3

1. La réponse correcte est (c).
De fait, si x est un réel strictement supérieur à 1, alors il est égal à sa valeur absolue et strictement plus petit que son carré.

2. La réponse correcte est (b).
De fait, si r est un réel tel que $r^2 \leq r$, alors r est positif et l'inégalité précédente implique $r \leq 1$.

3. La réponse correcte est (a).
De fait, si x et y désignent deux réels, on a $|x| \geq |y|$ ou $|y| \geq |x|$. Dès lors, dans le premier cas, on obtient

$$x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 \geq |x|^2 \geq |xy| \geq xy$$

et dans le second cas, on obtient

$$x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 \geq |y|^2 \geq |xy| \geq xy.$$

4. La réponse correcte est (b).
De fait, la fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$, est à valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$ et le cosinus d'un réel de l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ est positif. Avec $r = \arcsin(-1/3) \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a donc $0 \leq \cos(r) = \sqrt{1 - \sin^2(r)}$, ce qui donne

$$\cos(\arcsin(-1/3)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(-1/3))} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

5. La réponse correcte est (b).
De fait, on a $\arcsin(\sin(x)) = x$ si et seulement si $x \in \left[-\pi/2, \pi/2\right]$, donc

$$\begin{aligned}
\arcsin\left(\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right) &= \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{6\pi}{7}\right)\right) \\
&= \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{7}
\end{aligned}$$

car $\pi/7 \in \left[-\pi/2, \pi/2\right]$.

Chapitre 1 Problèmes élémentaires

1 Rappels théoriques

Ce chapitre utilise des notions rudimentaires de calcul (« règle de trois », mise en équation de base, utilisation de notions élémentaires de géométrie plane). Les notations sont standards.

2 Exercices de base résolus

Cette section répartit les exercices en niveaux de complexité croissante.

2.1 Niveau 1

Énoncés

1. Pendant les soldes, un pull est vendu à 49 euros. Il est mentionné que les prix affichés tiennent compte d'une remise de 30%. Quel était le prix de vente du pull avant la remise ?

2. Sur une carte à l'échelle $1/2\,500$, la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4 cm. À quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?

3. À la météo, on annonce une nuit de pluie. Le lendemain, sur la terrasse, on mesure une hauteur de 1 mm d'eau par mètre carré. À combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?

4. Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente d'un quinzième. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir $1,280\ \mathrm{m}^3$ de glace ?

Solution

1. Soit P le prix du pull avant la remise. Puisque le prix de 49 euros résulte d'une remise de 30%, on a

$$P - \frac{30}{100}P = 49$$

c'est-à-dire

$$\frac{7}{10}P = 49.$$

Cela donne finalement

$$P = 70 \text{ euros}.$$

2. Selon l'échelle, 1 cm sur la carte correspond à 2 500 cm = 0,025 km dans la réalité. Dès lors, 4 cm correspondent à $4 \times 0,025 = 0{,}1$ km.
   La distance réelle entre deux points distants de 4 cm sur une carte à l'échelle $1/2\,500$ est donc de 0,1 km.
3. Comme 1 mm $= 10^{-3}$ m, le volume d'eau sur la terrasse est égal à $10^{-3} \times 1 = 10^{-3}$ m^3= 1 dm^3 = 1 litre.
   Ainsi, 1 mm d'eau par m^2 correspond à 1 litre par m^2.
4. Soit x la quantité demandée en litres ; la transformation de cette eau en glace va donner un volume de $x + \frac{x}{15} = \frac{16}{15}x$ litres. Comme 1 $\mathrm{m}^3 = 10^3$ l, la quantité d'eau demandée doit donc vérifier l'égalité
   $$\frac{16}{15}x = 1\,280.$$
   Cette équation a pour solution
   $$x = \frac{1\,280}{16} \times 15 = 1\,200.$$
   Il faut donc 1 200 litres d'eau pour obtenir $1{,}280$ m^3 de glace.

2.2 Niveau 2

Énoncés

1. Un laborantin doit préparer 18 ml d'une solution qui contient 3 % de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10 % de glucose et l'autre seulement 1 %. Combien de millilitres de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?
2. Deux petits bateaux téléguidés partent du même point sur un lac. Leur vitesse est respectivement égale à 3 et 4 mètres par minute. Si l'un se dirige vers le nord et l'autre vers l'est, combien de temps faut-il attendre pour que la distance entre les deux soit supérieure à 10 mètres ?
3. Un enfant collectionne des cartes et en possède déjà 100. Sur chaque carte figurent soit 2 étoiles, soit 3 étoiles. Il a compté en tout 256 étoiles. Si les cartes avec 2 étoiles coûtent $1{,}5$ euros et celles avec 3 étoiles coûtent 2 euros, quel montant l'enfant a-t-il déjà dépensé ?
4. Lindsay a trois fois l'âge que Nacer avait quand elle avait l'âge actuel de Nacer. Quand Nacer aura l'âge de Lindsay, ils auront ensemble 112 ans. Quels sont les âges actuels de Nacer et de Lindsay ?

Solution

1. Soit x le nombre de millilitres de la solution contenant 10 % de glucose. Le nombre de millilitres de la solution contenant 1 % de glucose est donc $(18 - x)$. Cela étant,

on a

$$\frac{10}{100}\,x + \frac{1}{100}\,(18 - x) = \frac{3}{100}\ \times\ 18$$

ce qui est équivalent à

$$10x + 18 - x = 54 \Leftrightarrow 9x = 36 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ainsi, le laborantin doit prendre 4 ml de la solution contenant 10 % de glucose et 14 ml de la solution à 1 % pour obtenir 18 ml de solution à 3 %.

2. Supposons que les deux bateaux partent de l'origine d'un repère orthonormé. Après t minutes, l'un se trouvera au point de coordonnées $(0, 3t)$ et l'autre au point de coordonnées $(4t, 0)$. La distance en mètres entre ces deux points est donnée par $\sqrt{16t^2 + 9t^2} = 5t$ et elle sera supérieure à 10 mètres si $t > 2$. Ainsi, au-delà de 2 minutes la distance entre les deux bateaux est supérieure à 10 mètres.

3. Pour trouver la réponse à la question posée, on cherche le nombre de cartes à deux étoiles et celui à trois étoiles. En effet, si x est le nombre de cartes à deux étoiles et y le nombre de cartes à trois étoiles, le montant dépensé est égal à

$$1,5x + 2y \text{ euros.}$$

Cela étant, utilisons les données. Puisque l'enfant possède 100 cartes, on a $x + y = 100$. Par ailleurs, comme il a en tout 256 étoiles, on a $2x + 3y = 256$. Pour trouver x et y, il faut donc résoudre le système de deux équations à deux inconnues suivant

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 2x + 3y = 256. \end{cases}$$

On a successivement

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + y = 100 \\ 2x + 3y = 256 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 100 - x \\ 2x + 3(100 - x) = 256 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 100 - x \\ 2x + 300 - 3x = 256 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 100 - x \\ -x = 256 - 300 = -44 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 44 \\ y = 100 - 44 = 56. \end{cases}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que le montant dépensé est égal à

$$1,5 \times 44\ +\ 2 \times 56\ =\ \frac{3}{2} \times 44\ +\ 112\ =\ 66 + 112\ =\ 178 \text{ euros.}$$

4. Soient x et y les âges actuels respectifs de Lindsay et de Nacer, comptés en années. Lindsay étant plus âgée que Nacer, la différence entre leurs âges est $x - y$. Dès lors, on peut donner les informations de l'énoncé à propos des âges sous la forme

	Lindsay	**Nacer**
Actuellement	x	y
Il *y* a *(x-y)* ans	$x-(x-y)=y$	$y-(x-y)=2y-x$
Dans *(x-y)* ans	$x+(x-y)=2x-y$	$y+(x-y)=x$

Ainsi, la traduction de l'énoncé en équations donne le système (S)

$$\begin{cases} x = 3(2y-x) \\ (2x-y)+x = 112. \end{cases}$$

C'est un système de deux équations linéaires à deux inconnues qui se résout directement :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3y \\ 3x - y = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3y \\ 3x - \dfrac{2}{3}x = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 48 \\ y = 32. \end{cases}$$

Ainsi, actuellement, Nacer a 32 ans et Lindsay a 48 ans.

2.3 Niveau 3

Énoncés

1. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la méthode suivante.

Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?

2. Kevin et Camille prennent le train chaque matin pour se rendre à leur travail. Kevin parcourt une distance de 20 km tandis que Camille n'en parcourt que 15. Les deux trajets sont cependant de même durée car la vitesse moyenne du train de Kevin est de 25 km/h plus élevée que celle du train de Camille. Quelles sont les vitesses moyennes de chaque train ?

3. En imprimerie, une des classifications standards des formats de papier s'appelle le système ISO A. Les feuilles A4 bien connues font partie de ce système, de même que les A3, A5, etc. On passe du type A4 au type A5 en divisant le plus grand des côtés du rectangle par 2 ; on procède ainsi successivement pour passer d'un type à l'autre.

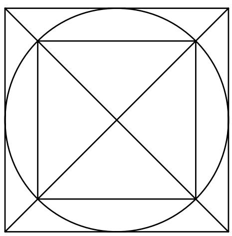
Vous préparez un envoi postal standard dont le poids ne doit pas excéder 100 g. Le papier employé est de la catégorie commerciale « 80 g/m^2 », ce qui signifie qu'un mètre carré de papier pèse 80 g. Sachant qu'une feuille A0 a une aire de 1 m^2 et que l'enveloppe utilisée pèse 20 g, combien de pages A4 pouvez-vous glisser dans l'enveloppe ?

4. Une ligne droite de 1 300 m relie les points A et B. Lee part du point A dans la direction du point B à la vitesse constante de 6 km/h. Kayla part une minute plus tard du point B dans la direction de A, à la vitesse constante de 12 km/h. Combien de temps après son départ Lee rencontrera-t-il Kayla ?

Solution

1. Si c est la longueur d'un côté du carré inscrit (jardin), alors l'aire du jardin vaut c^2. Un diamètre du cercle a la même longueur qu'une diagonale du carré inscrit mais également la même longueur qu'un côté du carré circonscrit. Par application du théorème de Pythagore[1] dans un des triangles rectangles formés par une diagonale et deux côtés consécutifs du carré inscrit, on a $D^2 = 2c^2$ si D est la longueur d'un diamètre du cercle.

Dès lors, l'aire du carré circonscrit vaut $D^2 = 2c^2$ et l'aire de la promenade, différence entre l'aire du carré circonscrit et celle du carré inscrit, vaut $2c^2 - c^2 = c^2$. Ainsi, l'aire du jardin est égale à l'aire de la promenade.



2. Notons t le temps en h du trajet, v_c la vitesse moyenne du train de Camille et v_k la vitesse moyenne du train de Kevin en km/h. La mise en équation des données conduit au système suivant

$$\begin{cases} v_k t = 20 \\ v_c t = 15 \\ v_k = 25 + v_c. \end{cases}$$

1. Voir l'annexe.

Il se résout facilement de la manière suivante

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_k t & = & 20 \\ v_c t & = & 15 \\ v_k & = & 25 + v_c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} v_k & = & 20/t \\ v_c & = & 15/t \\ 20/t & = & 25 + (15/t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} t & = & 1/5 \\ v_k & = & 20 \times 5 = 100 \\ v_c & = & 15 \times 5 = 75. \end{array}\right.$$

La vitesse moyenne du train de Camille est donc 75 km/h et celle du train de Kevin 100 km/h.

3. L'aire d'une feuille $A(i+1)$ vaut la moitié de l'aire d'une feuille Ai puisqu'on divise la longueur d'un des côtés par 2. Comme l'aire d'une feuille $A0$ vaut 1 m^2, l'aire d'une feuille $A4$ vaut $1 \times (1/2)^4 = 1/16$ m^2.

Sachant que 1 m^2 de papier pèse 80 g, une feuille $A4$ pèse donc $80 \times 1/16 = 5$ g.

Comme l'enveloppe pèse 20 g, le nombre de feuilles $A4$ dans l'enveloppe est égal à

$$\frac{100 - 20}{5} = 16.$$

Ainsi, on pourra mettre 16 feuilles $A4$ dans l'enveloppe.

4. Une vitesse de 6 km/h correspond à 6 000 m/60 min = 100 m/min et donc celle de 12 km/h correspond à 200 m/min.

Soit t le temps en minutes mis par Lee pour rencontrer Kayla. Le temps en minutes mis par Kayla pour rencontrer Lee est donc $t - 1$. La distance en mètres parcourue par Lee vaut $100t$ et celle parcourue par Kayla vaut $200(t-1)$. Ensemble ils parcourent 1 300 m. Dès lors, le problème se traduit par l'équation suivante qu'il faut résoudre. On a successivement

$$100t + 200(t-1) = 1\,300 \Leftrightarrow 300t - 200 = 1\,300 \Leftrightarrow 300t = 1\,500 \Leftrightarrow t = 5.$$

Ainsi Lee rencontrera Kayla 5 minutes après son départ.

3 Exercices pour s'entraîner

Énoncés

Niveau 1

1. Un tonneau rempli à moitié d'eau pèse 56 kg. Rempli aux deux tiers d'eau, il pèse un centième de tonne de plus. Quelle est la capacité en hectolitres de ce tonneau et quelle est la masse en grammes du tonneau vide ?

2. Au mois d'août 2009, à l'occasion des championnats du monde d'athlétisme à Berlin, le Jamaïcain Usain Bolt établissait un nouveau record du monde du 100 m en parcourant la distance en 9,58 secondes. À quelle vitesse moyenne exprimée en kilomètres par heure cela correspond-il ?

3. Un missile est lancé en mer sous un angle de 45 degrés et vole en ligne droite à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une altitude de 4,5 km ?

Niveau 2

1. Un terrain carré est bordé intérieurement par une allée de largeur constante dont la superficie vaut 464 mètres carrés. Lorsqu'on fait le tour du terrain, on note une différence de 32 mètres entre le parcours effectué au bord intérieur de l'allée et celui correspondant au bord extérieur. Quelle est la superficie totale du terrain ?
2. La moyenne des résultats à un contrôle est 9,8/20. Si on ne tient pas compte de la plus mauvaise note 5/20 obtenue par un seul étudiant, on obtient une moyenne de 10/20. Combien d'étudiants ont effectué ce contrôle ?
3. Un touriste observe un monument depuis le sol. Il évalue une première fois l'angle d'élévation du monument et trouve 60°. Il recule de 100 m et son évaluation donne alors 45°. Quelle est approximativement la hauteur du monument ?

Remarque. Le touriste est supposé très petit par rapport au monument ; dans le calcul, on peut donc négliger sa taille.

Niveau 3

1. Une compagnie de télévision par câble dessert 5 000 foyers et fait payer 20 euros par mois. Une étude de marché montre que chaque diminution de 1 euro amène 500 nouveaux abonnnés. Si $R(x)$ est le revenu total par mois quand le prix mensuel est x euros
   (a) déterminer la fonction R.
   (b) sans se servir de la dérivation, déterminer la valeur de x qui donne le revenu mensuel maximal.
2. Trois vannes coulant ensemble dans un bassin le rempliraient en un certain nombre d'heures. La première seule mettrait le double de temps ; la deuxième 6 heures de plus que les trois ensemble ; la troisième seule, 15 heures de plus. En combien de temps le bassin pourrait-il être rempli par chacune des trois vannes ? Et par les trois réunies ?
3. Pour réparer des dégâts dans une pelouse, un jardinier compte ensemencer d'herbe un terrain triangulaire dont les côtés mesurent 10 mètres, 6 mètres et 7 mètres. Sachant qu'il faut compter 500 g pour 25 m^2, combien de grammes de semences doit-il acheter ?

Solution

Niveau 1

1. La capacité du tonneau est de $0,6$ hl et vide, il pèse $26\,000$ g.
2. La vitesse moyenne vaut $37,578$ km/h.

3. Le temps mis pour atteindre cette altitude vaut $4\,500\ \sqrt{2}/75 = 60\ \sqrt{2}$ secondes, donc approximativement 85 secondes.

Niveau 2

1. La superficie du terrain est égale à 1 089 mètres carrés.

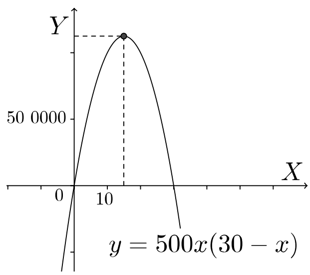
2. Vingt-cinq étudiants ont fait le contrôle.

3. La hauteur du monument est de 236,6 mètres.

Niveau 3

1. (a) Le revenu total par mois est la fonction $R : x \mapsto R(x) = 500x(30 - x)$ si x est le prix mensuel en euros par foyer.

(b) Le revenu mensuel est maximum si $x = 15$. Graphiquement, on a une parabole de concavité vers le bas, de sommet $(15, 112\,500)$ qui passe par les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(30, 0)$.



2. Il faut 3 heures pour remplir le bassin avec les vannes réunies, 6 heures pour la première seule, 9 heures pour la seconde seule et 18 heures pour la troisième seule.

3. Pour réparer les dégâts dans la pelouse, il doit acheter 413,25 grammes de semences.

Chapitre 2

Outils de base

1 Rappels théoriques

1.1 Nombres réels

Faisons une première remarque de vocabulaire et de notation : on désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des naturels, encore appelés entiers positifs, par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers, encore appelés entiers relatifs, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des complexes[1].

Cela étant, nous supposons que les connaissances de base sur les nombres réels sont connues. Insistons tout de même sur certains points qui, trop souvent, sont sources d'erreurs.

– Quand on multiplie les deux membres d'une inégalité par un réel négatif non nul, il faut changer le sens de l'inégalité.
– La racine carrée d'un nombre réel positif est *le réel positif* dont le carré est le nombre de départ. La notation employée est le symbole $\sqrt{\ }$. Si a est un nombre réel, on a donc $\sqrt{a^2} = |a|$ et non $\sqrt{a^2} = \pm a$!

1.2 Équations et inéquations

Une équation polynomiale du premier (resp.[2] second) degré en l'inconnue complexe z est une équation du type

$$az + b = 0 \qquad (\text{resp. } az^2 + bz + c = 0)$$

où a est un complexe non nul et b, c des complexes. L'équation du premier degré possède une unique solution, à savoir le complexe

$$-\frac{b}{a}$$

et l'équation du second degré possède toujours deux solutions, à savoir

$$\frac{-b + z_0}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b - z_0}{2a}$$

où z_0 est un complexe dont le carré est égal à $b^2 - 4ac$; cette expression est appelée discriminant ou réalisant. Rappelons que la somme des deux solutions est donc égale à $-b/a$ et que leur produit est égal à c/a. Par ailleurs, insistons sur le fait qu'on ne peut manipuler des inégalités que si les coefficients et la variable sont des réels !

1. Cet ensemble sera défini dans la sous-section 1.7 de ce chapitre.
2. L'abréviation resp. est utilisée pour respectivement.