

FLUORESCIENCES
LES MANUELS VISUELS
POUR LA LICENCE

Électro- magnétisme

ÉIelec

Christophe Cappe

LES FONDAMENTAUX

COURS AVEC EXEMPLES CONCRETS

165 QCM ET EXERCICES CORRIGÉS

180 ILLUSTRATIONS EN COULEURS

LES + EN LIGNE

DUNOD

Conception graphique de la couverture : Hokus Pokus Créations
Création graphique de la maquette intérieure : Marse

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--



© Dunod, 2019

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com

ISBN 978-2-10-078084-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Le selfie de l'auteur	V	
Mode d'emploi	VI	
Avant-propos	VIII	
Remerciements	1	
CHAPITRE 1	OUTILS MATHÉMATIQUES	2
	1 Éléments de calcul vectoriel	4
	2 Principaux systèmes de coordonnées	5
	3 Notions élémentaires sur les champs	9
	4 Opérateurs différentiels vectoriels	14
CHAPITRE 2	DISTRIBUTIONS DE CHARGES	24
	1 La charge électrique	26
	2 Distributions de charges	28
CHAPITRE 3	LE CHAMP ÉLECTROSTATIQUE	36
	1 La loi de Coulomb	38
	2 Le champ électrostatique	40
	3 Propriétés de symétrie du champ électrostatique	44
CHAPITRE 4	THÉORÈME DE GAUSS	54
	1 Théorème de Gauss	56
	2 Forme locale du théorème de Gauss	61
CHAPITRE 5	ÉNERGIE ET POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE	66
	1 Potentiel électrostatique	68
	2 Relation entre champ et potentiel	69
	3 Lignes de champ et équipotentielles	75
	4 Aspects énergétiques liés à l'électrostatique	78
CHAPITRE 6	CONDUCTEURS EN ÉQUILIBRE ÉLECTROSTATIQUE	90
	1 Propriétés générales	92
	2 Champ au voisinage d'un conducteur chargé	93
	3 Influence électrostatique	94
	4 Les condensateurs	96

LE DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE	104
1 Potentiel électrostatique créé par un dipôle	106
2 Généralisation	107
3 Champ électrostatique créé par un dipôle	112
4 Lignes de champ et équipotentielles	113
5 Dipôle plongé dans un champ électrostatique	114

COURANT ET RÉSISTANCE ÉLECTRIQUES	126
1 Le courant électrique	128
2 Distributions limites de courant	131
3 Milieux conducteurs ohmiques	132

FORCES MAGNÉTIQUES	142
1 Le champ magnétostatique	144
2 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique	146
3 Action d'un champ magnétostatique sur un conducteur parcouru par un courant	149

LE CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE	158
1 La loi de Biot et Savart	160
2 Propriétés du champ magnétostatique	165
3 Équations de passage du champ magnétostatique	169
4 Topographie du champ magnétostatique	171

LE DIPÔLE MAGNÉTOSTATIQUE	178
1 Moment dipolaire magnétique	180
2 Champ magnétostatique créé par un dipôle	180
3 Dipôle rigide dans un champ appliqué	182
4 Sources du magnétisme dans la matière	183
5 Le champ magnétique terrestre	186

Corrigés	195
Annexe	225
Lexique Français-Anglais	227
Index	230
Crédits iconographiques	232

Le selfie de l'auteur

Christophe Cappe



Je suis professeur agrégé de physique à l'université Rennes 1. J'enseigne en particulier l'électromagnétisme du vide et des milieux, la thermique et la mécanique dans les licences de Physique et de Physique-Chimie. J'interviens également dans les préparations disciplinaires aux concours de recrutement des enseignants (CAPES et Agrégation).

Mode d'emploi

Ouverture de chapitre

- QCM pour se tester sur les prérequis de Terminale.
- Un exemple concret pour introduire le sujet du chapitre.
- Ce que l'on maîtrisera à la fin du chapitre.

Le dipôle magnétostatique

CHAPITRE 11

Pour bien démarrer

Plusieurs expériences peuvent être réalisées :

1. Les lignes du champ magnétostatique créé par une spire circulaire d'axe (Oz) passant par un courant :
 - Cl. sont parallèles à l'axe (Oz) ;
 - Cl. sont inversées autour de la spire ;
 - Cl. sont courbées par un feuillet de papier ou un bouclier dans le sens choisi pour définir l'intensité du courant.
2. Une boussole, aimantée à petite aiguille aimantée peuvent tourner librement autour d'un axe vertical, en dirigeant vers :
 - Cl. la pôle Nord géographique ;
 - Cl. la pôle Nord magnétique ;
 - Cl. la pôle Sud magnétique.
3. Le spin d'un électron atomique :
 - Cl. est homogène à un moment cinétique ;
 - Cl. traduit classiquement le mouvement orbitulaire de l'électron autour du noyau ;
 - Cl. est une propriété purement quantifiée.
4. Le champ magnétique terrestre :
 - Cl. est dû à l'aimantation de la terre ;
 - Cl. est dû à des courants de convection dans le noyau de la terre ;
 - Cl. fluctue au cours du temps.

Alpages page 600

Objectifs de ce chapitre

- Connaître les conditions de l'approximation dipolaire.
- Exprimer le moment dipolaire magnétique d'une boucle plane de courant stationnaire.
- Utiliser l'expression du champ créé par un dipôle magnétostatique.
- Calculer les actions mécaniques subies par un dipôle magnétostatique rigide et son énergie potentielle d'interaction dans un champ appliqué stationnaire.
- Décrire classiquement l'origine de l'aimantation d'un milieu matériel.
- Décrire le champ géomagnétique réduit à sa composante dipolaire.

110

Le cours

- Le **cours** est illustré par des figures et de nombreux exemples.
- Les **focus** développent un sujet de recherche, une application, un thème d'actualité.
- Des repères historiques.
- Des encadrés « méthode ».

CHAPITRE 3 | Le champ électrostatique

1 | La loi de Coulomb

Définition

La loi de Coulomb stipule que la force d'interaction F_{12} exercée dans le vide par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2 est dirigée et égale à :

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

où $k = 8,987 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ est la constante de Coulomb, r_{12} est la distance entre les charges et \vec{u}_{12} est le vecteur unitaire orienté de q_1 vers q_2 .

Si les charges sont de même signe, la force est répulsive ; si elles sont de signes opposés, elle est attractive.

Figure 3.1 Force d'interaction entre deux charges ponctuelles.

Exemple - Interaction entre deux électrons

La force de répulsion électrostatique entre deux électrons distants de r est :

$$F_e = k \frac{e^2}{r^2}$$

La force d'attraction gravitationnelle entre ces deux électrons, de masse m_e , est :

$$F_g = G \frac{m_e^2}{r^2}$$

où G est la constante de gravitation universelle.

Le rapport $\frac{F_e}{F_g} = \frac{k e^2}{G m_e^2} \approx 4,18 \times 10^{42}$ est de l'ordre de 2×10^{42} ce qui montre que l'interaction électrique est beaucoup plus forte que celle de l'attraction gravitationnelle.

1.1 | Principe de superposition

Définition

Une distribution discrète de N charges ponctuelles q_i situées dans le vide exerce sur une charge ponctuelle q une interaction électrostatique F égale à la somme des interactions de chaque charge q_i avec q :

$$F = \sum_{i=1}^N F_{i2}$$

où F_{i2} est la force exercée par la charge q_i sur la charge q .

Figure 3.2 Force exercée par une distribution discrète de charges ponctuelles.

Méthode

L'utilisation du principe de superposition pour calculer la force exercée sur une charge ponctuelle, quel que soit le nombre de charges, se fait en deux étapes : 1. Calculer la force exercée par chaque charge q_i sur la charge q . 2. Additionner les forces exercées par chaque charge q_i sur la charge q pour obtenir la force totale F .

1 | La loi de Coulomb

2 | Sources du magnétisme dans la matière

Propriétés

L'intensité H d'un milieu diamagnétique ou paramagnétique, respectivement antiferromagnétique ou ferromagnétique, est proportionnelle au champ appliqué $H = \chi H_0$ où χ est la susceptibilité magnétique.

Tableau 11.1 Susceptibilités diamagnétiques (χ_D) et paramagnétiques (χ_P) (température et pression ordinaires)

Matériau	χ_D	χ_P
Cu	$-9,6 \times 10^{-6}$	1,1
Al	$-2,2 \times 10^{-5}$	1,7
Ag	$-2,4 \times 10^{-5}$	120
Al ₂ O ₃	$-6,5 \times 10^{-5}$	770

Focus

Le spin des électrons est une propriété intrinsèque de la matière. C'est la rotation de l'électron autour de son axe qui crée un moment magnétique. C'est ce moment magnétique qui est responsable de l'aimantation des matériaux.

Figure 11.4 Moment magnétique orbital d'un électron circulaire.

Justification

Alors que les électrons sont en mouvement dans un matériau, ils créent un courant électrique équivalent à celui d'un fil conducteur. Ce courant crée un champ magnétique qui agit sur les électrons voisins, ce qui explique l'aimantation des matériaux.

4.3 | Approche classique

Les courants de convection dans les métaux sont responsables de l'aimantation des matériaux. C'est le mouvement des électrons qui crée un champ magnétique qui agit sur les électrons voisins, ce qui explique l'aimantation des matériaux.

Le champ magnétique terrestre (HMT)

Le champ magnétique terrestre est le résultat de la rotation de la Terre et de la convection dans le noyau externe. C'est un champ magnétique complexe qui varie au cours du temps.

Avant-propos

Les phénomènes électromagnétiques sont omniprésents, que ce soit dans la nature, à travers les éclairs ou les aurores boréales, dans les systèmes biologiques, à l'origine notamment de la cohésion de la molécule d'ADN ou de la propagation de l'influx nerveux, ou directement dans notre quotidien dans de larges domaines allant de l'électronique aux télécommunications.

Cet ouvrage est une première approche de l'électromagnétisme du vide, limitée à la description de phénomènes indépendants du temps. Il suit le fil de l'histoire qui a longtemps dissocié les phénomènes électriques des phénomènes magnétiques, du moins jusqu'à la théorie unificatrice de James Clerk Maxwell à la fin du XIX^e siècle. La première partie de l'ouvrage est ainsi consacrée à l'électrostatique, c'est-à-dire l'étude de champs électriques créés par des charges électriques immobiles. La seconde partie s'intéresse à la magnétostatique, c'est-à-dire l'étude de champs magnétiques créés par des aimants permanents ou des courants électriques stationnaires. Un premier chapitre introduit les propriétés mathématiques des champs de vecteurs dont la maîtrise est un préalable indispensable à la formalisation des phénomènes électromagnétiques en concepts et lois. Pour en faciliter la compréhension et l'utilisation, le lecteur trouvera tout au long de l'ouvrage des points méthodiques systématiquement suivis d'un exemple d'application, ainsi que des focus permettant de préciser certaines notions transversales à l'électromagnétisme.

Pour qu'un exercice d'électrostatique ou de magnétostatique ne se limite pas à une mise en œuvre purement mathématique des lois associées, chaque exercice a été soigneusement choisi pour sa modélisation physique d'une situation concrète tirée d'applications technologiques, d'expériences historiques ou encore de phénomènes naturels. Afin d'éviter d'alourdir l'énoncé de ces exercices, toutes les constantes utiles à leur résolution sont regroupées dans une table en fin d'ouvrage. Le lecteur y trouvera également un formulaire mathématique avec l'expression des différents opérateurs vectoriels dans les principaux systèmes de coordonnées.

Remerciements

Je remercie très chaleureusement Céline Reboul pour ses suggestions et sa relecture minutieuse de l'intégralité du manuscrit, ainsi que Franck Thibault, Guy Ropars et Gabriel Delhay de l'université Rennes 1 pour leurs critiques constructives et nombreux conseils. Je tiens enfin à remercier tout particulièrement Laëtitia Hérin et Eléna Chryssos pour leur confiance et leur important travail de composition et de mise en forme de l'ouvrage.

Outils mathématiques

Pour bien démarrer

Plusieurs réponses peuvent être correctes.

- 1. Pour que deux vecteurs aient leur produit scalaire nul, il suffit :**
 - a. qu'ils soient colinéaires ;
 - b. qu'ils soient orthogonaux ;
 - c. que l'un au moins soit nul.
- 2. Pour que deux vecteurs aient leur produit vectoriel nul, il suffit :**
 - a. qu'ils soient colinéaires ;
 - b. qu'ils soient orthogonaux ;
 - c. que l'un au moins soit nul.
- 3. Le champ de pesanteur est considéré comme localement uniforme. Localement :**
 - a. ses lignes de champ sont horizontales ;
 - b. il est défini uniquement par une valeur constante ;
 - c. il a toujours la même direction et le même sens.
- 4. Le champ de pression atmosphérique est un champ :**
 - a. scalaire ;
 - b. stationnaire ;
 - c. uniforme.
- 5. Dans le repère cartésien de base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on considère le champ $f(x) = x^2$.**
 - a. $\overline{\text{grad}}(f) = 2x$.
 - b. $\overline{\text{grad}}(f) = (2x)\vec{u}_x$.
 - c. $\overline{\text{grad}}(f) = (-2x)\vec{u}_x$.
- 6. Un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Le vecteur déplacement élémentaire du point M s'écrit de façon générale :**
 - a. $d\vec{\ell}_M = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$;
 - b. $d\vec{\ell}_M = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$;
 - c. $d\vec{\ell}_M = xdx\vec{u}_x + ydy\vec{u}_y + zdz\vec{u}_z$.

Réponses page 195

Objectifs de ce chapitre

- Connaître les expressions du vecteur déplacement élémentaire en repérage cartésien, cylindrique et sphérique et savoir retrouver les expressions des éléments de surface et volume correspondants.
- Savoir calculer pour un champ vectoriel quelconque sa circulation le long d'un contour et son flux à travers une surface.
- Savoir utiliser un opérateur différentiel vectoriel à l'aide d'un formulaire.
- Connaître les théorèmes de Stokes et de Green-Ostrogradsky.

CHAPITRE

1



Le champ de pesanteur qui explique la chute libre de ce parachutiste au voisinage de la Terre constitue un exemple de champ vectoriel. Les phénomènes électromagnétiques, dont il sera question dans les prochains chapitres, sont eux aussi décrits en tout point de l'espace et à chaque instant par un champ vectoriel, le champ électromagnétique. L'objet de ce premier chapitre est d'expliciter les propriétés mathématiques de ces champs de vecteurs, préalable indispensable à la compréhension du sens physique des lois de l'électromagnétisme.

1 Éléments de calcul vectoriel

1.1 Base orthonormée directe

Définition

$(\mathcal{B}) = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est une base orthonormée si et seulement si :

- $\vec{u}_x \perp \vec{u}_y \perp \vec{u}_z$ (vecteurs orthogonaux 2 à 2) ;
- $\|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = \|\vec{u}_z\| = 1$ (vecteurs unitaires).

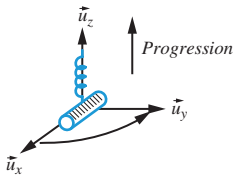


Figure 1.1 ▲
Règle du tire-bouchon de Maxwell.

Nous considérerons toujours dans cet ouvrage une base orthonormée directe telle que deux des vecteurs de la base définissent le sens positif du troisième selon la **règle du tire-bouchon de Maxwell** (figure 1.1).

En associant un point O de l'espace à cette base, nous obtenons alors un repère d'espace noté (\mathcal{R}) .

Règle du tire-bouchon de Maxwell : le manche du tire-bouchon étant placé sur \vec{u}_x , une rotation de $\pi/2$ vers \vec{u}_y fait progresser le tire-bouchon dans le sens de \vec{u}_z .

1.2 Coordonnées d'un point et composantes d'un vecteur

Soit $(\mathcal{B}) = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ une base orthonormée directe associée à un repère d'espace (\mathcal{R}) (figure 1.2).

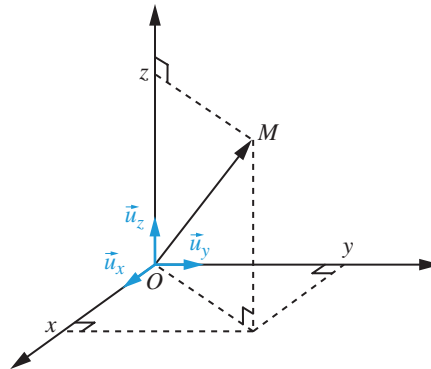


Figure 1.2
Coordonnées d'un point et composantes d'un vecteur.

Définition

- Un point M est repéré par ses **coordonnées** dans le repère (\mathcal{R}) : $M(x, y, z)$.
- Un vecteur $\vec{v} = \overline{OM}$ est défini par ses **composantes** dans la base (\mathcal{B}) :

$$\vec{v} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}_{(\mathcal{B})}$$

1.3 Calcul vectoriel

Soient $(\mathcal{B}) = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ une base orthonormée directe, et deux vecteurs $\vec{v}_1 = x_1\vec{u}_x + y_1\vec{u}_y + z_1\vec{u}_z$ et $\vec{v}_2 = x_2\vec{u}_x + y_2\vec{u}_y + z_2\vec{u}_z$. Notons $\theta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ l'angle tel que $0 \leq \theta \leq \pi$.

1.3.1 Produit scalaire

Définition

Le produit scalaire de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 est le scalaire, noté $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$, défini par : $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \times \|\vec{v}_2\| \times \cos \theta$.
L'expression analytique de ce produit scalaire est : $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Nous pouvons déduire de la définition et de l'expression analytique d'un produit scalaire l'expression de la norme d'un vecteur : $\vec{v} \cdot \vec{v} = x^2 + y^2 + z^2 \equiv \|\vec{v}\|^2$
d'où $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.3.2 Produit vectoriel

Définition

Le produit vectoriel de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 est le vecteur, noté $\vec{u} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, défini par :

- sa direction, orthogonale au plan formé par \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ;
- son sens, tel que le trièdre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{u})$ soit direct, *i.e.* donné par la règle du tire-bouchon à partir de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ;
- sa norme, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}_1\| \times \|\vec{v}_2\| \times \sin \theta$.

L'expression analytique de ce produit vectoriel est : $\vec{u} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{vmatrix}$

Méthode

Pour retrouver l'expression analytique d'un produit vectoriel, écrire les composantes des vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 en colonne comme suit. Le passage d'une ligne à l'autre se fait par permutation circulaire des composantes.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ z_1x_2 - z_2x_1 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{vmatrix}$$

Le produit scalaire est distributif pour l'addition des vecteurs : $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3$.

Le produit vectoriel est anticommutatif : $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$.
Le produit vectoriel est distributif pour l'addition des vecteurs : $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$.

2 Principaux systèmes de coordonnées

2.1 Coordonnées cartésiennes

Un point M de l'espace peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ où $x, y, z \in]-\infty ; +\infty[$ (figure 1.3). Le vecteur position du point M s'écrit dans ce repérage : $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$.

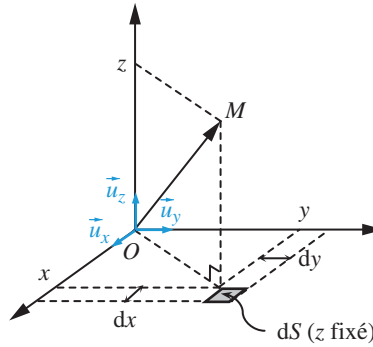


Figure 1.3 Repérage cartésien.

Pour une variation infinitésimale dx de la coordonnée x , à y et z fixés, le point M se déplace de dx selon \vec{u}_x . En envisageant de la même façon des variations infinitésimales dy puis dz des coordonnées respectives y et z , le déplacement total du point M est alors défini par le vecteur déplacement élémentaire :

$$d\vec{\ell}_M = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

Au cours de ce déplacement, le point M a décrit le volume élémentaire $dV_M = dx dy dz$. Un tel volume définit trois éléments de surface plans : l'élément de surface $dS_M = dy dz$ à x fixé, l'élément de surface $dS_M = dx dz$ à y fixé et enfin l'élément de surface $dS_M = dx dy$ à z fixé.

2.2 Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont liées aux coordonnées cartésiennes par $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$ d'où $\rho^2 = x^2 + y^2$.

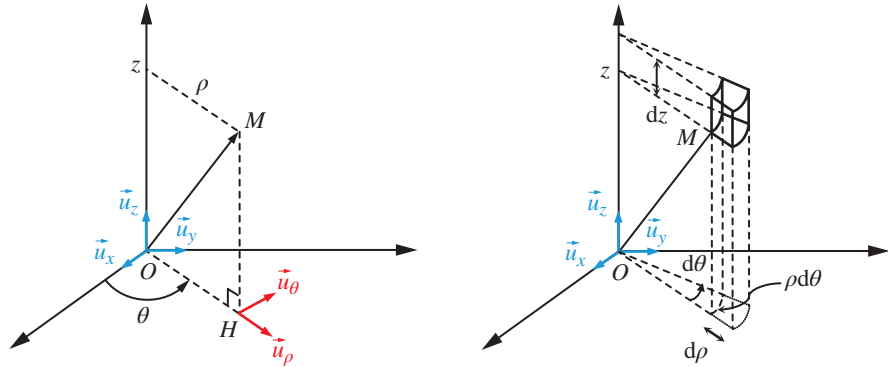
Un point M de l'espace peut être considéré comme un point d'un cylindre droit d'axe (O, \vec{u}_z) . On le repère par ses coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) où $\rho \in [0; +\infty[$ est le rayon du cylindre, $\theta \in [0; 2\pi[$ est l'angle orienté $(\vec{u}_x, \overline{OH})$ avec H le projeté orthogonal du point M sur le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, $z \in]-\infty; +\infty[$ est la cote du point M sur l'axe (O, \vec{u}_z) (figure 1.4).

Les coordonnées cylindriques sont définies dans le repère cylindrique $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ où \vec{u}_ρ est le vecteur radial colinéaire à \overline{OH} et \vec{u}_θ est le vecteur orthoradial obtenu par rotation du vecteur \vec{u}_ρ de $+\pi/2$ dans le sens des θ croissants. Dans ce repère, le vecteur position du point M s'écrit alors : $\overline{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$.

Les vecteurs \vec{u}_ρ et \vec{u}_θ forment une base dite locale (appelée base polaire), car ils varient avec la position du point M . On peut vérifier que $\vec{u}_\rho = (\cos \theta)\vec{u}_x + (\sin \theta)\vec{u}_y$ et $\vec{u}_\theta = -(\sin \theta)\vec{u}_x + (\cos \theta)\vec{u}_y$, ce qui implique que $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_\rho$.

Le système de coordonnées cylindriques trouve son intérêt dans le repérage d'une grandeur physique invariante par rotation autour d'un axe privilégié (problème à symétrie cylindrique).

Figure 1.4
Repérage
cylindrique.



Pour une variation infinitésimale $d\rho$ de la coordonnée ρ , à θ et z fixés, le point M se déplace de $d\rho$ selon \vec{u}_ρ . Pour une variation infinitésimale $d\theta$ de la coordonnée θ , à ρ et z fixés, le point M décrit une portion infinitésimale de cercle de rayon ρ et d'angle au centre $d\theta$: il se déplace donc de $\rho d\theta$ selon \vec{u}_θ . Enfin, pour une variation infinitésimale dz de la coordonnée z , à ρ et θ fixés, le point M se déplace de dz selon \vec{u}_z . Au final, le déplacement total du point M est alors défini par le vecteur déplacement élémentaire :

$$d\vec{l}_M = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

Au cours de ce déplacement, le point M a décrit le volume élémentaire $dV_M = \rho d\rho d\theta dz$. Un tel volume définit trois éléments de surface : l'élément de surface cylindrique $dS_M = \rho d\theta dz$ à ρ fixé, l'élément de surface plan $dS_M = d\rho dz$ à θ fixé et enfin l'élément de surface $dS_M = \rho d\rho d\theta$ à z fixé.

2.3 Coordonnées sphériques

Un point M de l'espace peut être considéré comme un point d'une sphère de centre O . On le repère par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) où $r \in [0 ; +\infty[$ est le rayon de la sphère, $\theta \in [0 ; \pi]$ est l'angle orienté $(\vec{u}_z, \overline{OM})$, $\varphi \in [0 ; 2\pi]$ est l'angle orienté $(\vec{u}_x, \overline{OH})$ avec H le projeté orthogonal du point M sur le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (figure 1.5).

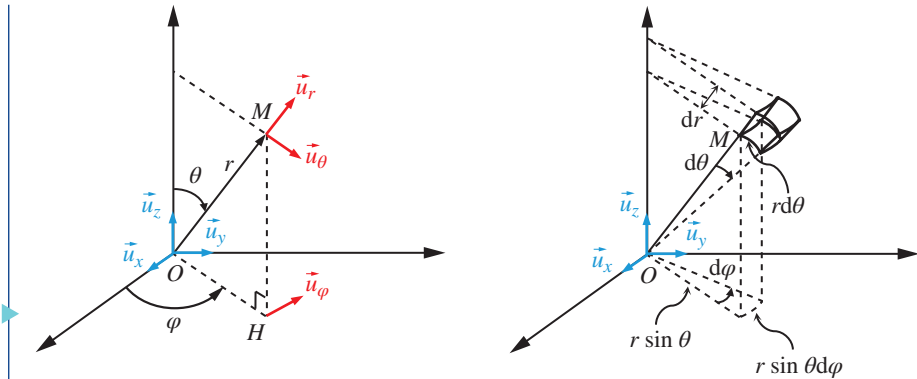
Les coordonnées sphériques sont définies dans le repère sphérique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ où \vec{u}_r est le vecteur radial, colinéaire à \overline{OM} , \vec{u}_θ appartenant au plan $(\vec{u}_z, \overline{OM})$ est le vecteur orthoradial obtenu par rotation du vecteur \vec{u}_r de $+\pi/2$ dans le sens des θ croissants et \vec{u}_φ appartenant au plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est le vecteur azimutal tel que $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta$. Dans ce repère, le vecteur position du point M s'écrit alors : $\overline{OM} = r\vec{u}_r$.

Le système de coordonnées sphériques trouve son intérêt dans le repérage d'une grandeur physique invariante par symétrie par rapport à un point privilégié (problème à symétrie sphérique).

Les coordonnées sphériques sont liées aux coordonnées cartésiennes par $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$ et $z = r \cos \theta$ d'où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Notons ici aussi que la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ est une base locale, dépendant de la position du point M .

Figure 1.5
Repérage
sphérique.



Pour une variation infinitésimale dr de la coordonnée r , à θ et φ fixés, le point M se déplace de dr selon \vec{u}_r . Pour une variation infinitésimale $d\theta$ de la coordonnée θ , à r et φ fixés, le point M décrit une portion infinitésimale de cercle de rayon r et d'angle au centre $d\theta$: il se déplace donc de $r d\theta$ selon \vec{u}_θ . Enfin, pour une variation infinitésimale $d\varphi$ de la coordonnée φ , à r et θ fixés, le point M décrit une portion infinitésimale de cercle de rayon $r \sin\theta$ et d'angle au centre $d\varphi$: il se déplace donc de $r \sin\theta d\varphi$ selon \vec{u}_φ . Au final, le déplacement total du point M est alors défini par le vecteur déplacement élémentaire :

$$d\vec{\ell}_M = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

Au cours de ce déplacement, le point M a décrit le volume élémentaire $dV_M = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$. Un tel volume définit trois éléments de surface : l'élément de surface sphérique $dS_M = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ à r fixé, l'élément de surface plan $dS_M = r \sin\theta drd\varphi$ à θ fixé et enfin l'élément de surface $dS_M = r drd\theta$ à φ fixé.

2.4 Bilan

Le tableau suivant propose une synthèse des résultats établis. Nous pouvons remarquer que tout élément de surface s'exprime comme le produit de deux des composantes du vecteur déplacement élémentaire et que l'élément de volume s'exprime comme le produit des trois composantes.

Tableau 1.1 Synthèse des principaux systèmes de coordonnées.

Repérage	Cartésien	Cylindrique	Sphérique
$d\vec{\ell}_M$	$dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$	$d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$	$dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$
dS_M	$dydz$ ($x = C^{ste}$)	$\rho d\theta dz$ ($\rho = C^{ste}$)	$r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ ($r = C^{ste}$)
dS_M	$dx dz$ ($y = C^{ste}$)	ρdz ($\theta = C^{ste}$)	$r \sin\theta dr d\varphi$ ($\theta = C^{ste}$)
dS_M	$dx dy$ ($z = C^{ste}$)	$\rho d\rho d\theta$ ($z = C^{ste}$)	$r dr d\theta$ ($\varphi = C^{ste}$)
dV_M	$dx dy dz$	$\rho d\rho d\theta dz$	$r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

Exemple – Calculs de surfaces et volumes

Établissons à partir des éléments différentiels précédents les expressions de la surface d'une sphère de centre O et de rayon R , puis du volume d'un cylindre d'axe Oz , de rayon R et de hauteur h .

En repérant tout point M sur la sphère par ses coordonnées sphériques (R, θ, φ) , sa surface est :

$$S = \oiint_{M \in \text{sphère}} dS_M = R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2.$$

De même, en repérant tout point M dans le cylindre par ses coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) , son volume est :

$$V = \iiint_{M \in \text{cylindre}} dV_M = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \pi R^2 h.$$

3 Notions élémentaires sur les champs

Sauf mention contraire, nous nous limiterons dans cet ouvrage à des champs stationnaires.

Définition

- On appelle champ d'une grandeur physique G , définie dans un domaine \mathcal{D} de l'espace, à un instant t donné, l'ensemble des valeurs de G aux différents points M de ce domaine à cet instant. Nous le noterons de façon générale $G(M, t)$. La connaissance des valeurs du champ sur les limites du domaine \mathcal{D} , appelées conditions aux limites, sera fondamentale pour déterminer complètement le champ.
- Si la grandeur physique est un scalaire, définie par la donnée d'un seul nombre, on parle de **champ scalaire**. En revanche, si la grandeur est vectorielle, définie par trois composantes dans une base donnée, on parle de **champ vectoriel**.
- Si le champ est indépendant de la position de M , il est dit **uniforme** : $G = G(t)$. Si le champ est indépendant du temps, il est dit **permanent** ou **stationnaire** : $G = G(M)$.

Exemples

- Considérons une barre métallique, de longueur ℓ selon un axe Ox , calorifugée sur sa face extérieure, et dont les extrémités sont reliées à deux thermostats de températures différentes T_1 en $x = 0$, et $T_2 < T_1$ en $x = \ell$. En régime permanent, la température dans la barre, en tout point M d'abscisse x , est de la forme $T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ell} x$. Il existe donc un champ de température dans la barre. Ce champ est scalaire car un thermocouple plongé dans la barre indiquerait une température ne dépendant que de sa position.
- Considérons un écoulement d'eau dans une conduite cylindrique. L'ensemble des vitesses prises à chaque instant en tout point de la conduite par les différentes particules de fluide constitue un champ vectoriel $\vec{v}(M)$ appelé champ des vitesses : la particule de fluide qui se trouve au point M à l'instant considéré a une vitesse représentable par une orientation (sens et direction) et un module.

Définition

Soit un champ vectoriel $\vec{a}(M)$.

On appelle **ligne de champ** une courbe tangente en chaque point M au vecteur \vec{a} , orientée positivement dans le sens du champ (figure 1.6). L'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur une courbe fermée donnée est appelée **tube de champ**.

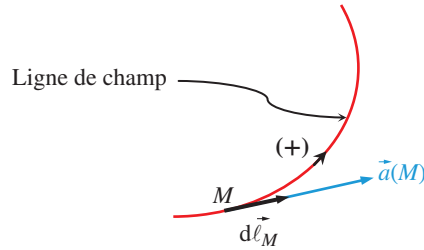


Figure 1.6
Ligne de champ.

L'orientation positive d'une courbe impose le sens du vecteur déplacement élémentaire $d\vec{\ell}_M$ en M . Ce vecteur étant porté par la tangente en M à la ligne de champ, alors $\vec{a}(M) \wedge d\vec{\ell}_M = \vec{0}$. Cette relation permet d'établir l'équation d'une ligne de champ.

Exemple – Écoulement dans une conduite

Reprenons l'exemple de l'écoulement permanent d'eau dans une longue conduite horizontale d'axe (O, \vec{u}_z) . En repérage cylindrique, le champ des vitesses est de la forme $\vec{v}(M) = v_z(\rho)\vec{u}_z$. Les lignes de champ (aussi appelées lignes de courant) sont donc des droites parallèles à l'axe de la conduite. Dans ce cas, la conduite elle-même constitue un tube de champ.

3.1 Circulation d'un champ vectoriel

Soit une courbe (Γ) , orientée positivement de manière arbitraire d'un point A à un point B . Une telle courbe est appelée **contour**. En tout point M d'un contour, le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{\ell}_M$, tangent à (Γ) au point M , est orienté dans le sens positif choisi de (Γ) (figure 1.7).

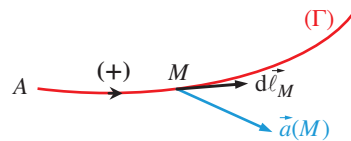


Figure 1.7
Définition d'un contour.

Le « rond » sur le signe de l'intégrale signifie que le contour (Γ) considéré est fermé.

Définition

Soit un champ vectoriel $\vec{a}(M)$.

On appelle **circulation élémentaire** de \vec{a} le long de (Γ) le produit scalaire : $dC(\vec{a}) = \vec{a}(M) \cdot d\vec{\ell}_M$.

La circulation de \vec{a} le long de (Γ) est obtenue en faisant la somme de toutes les circulations élémentaires depuis le point A jusqu'au point B :

$$C_{(\Gamma)}(\vec{a}) = \int_{A \rightarrow B} \vec{a}(M) \cdot d\vec{\ell}_M$$

En particulier, si sa circulation est nulle le long de tout contour fermé, le champ \vec{a} est dit à

circulation conservative : $C_{(\Gamma)}(\vec{a}) = \oint_{M \in (\Gamma)} \vec{a}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = 0$.

Propriété

La circulation d'un champ à circulation conservative est indépendante du chemin suivi entre deux points donnés.

Justification

Considérons deux contours quelconques (Γ_1) et (Γ_2) orientés positivement d'un point A à un point B (figure 1.8). Notons $C_{(\Gamma_1)}(\vec{a})$ et $C_{(\Gamma_2)}(\vec{a})$ respectivement la circulation du champ vectoriel \vec{a} le long de ces contours.

La circulation de \vec{a} le long du contour orienté fermé $(\Gamma) = (\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$ est donc $C_{(\Gamma_2)}(\vec{a}) - C_{(\Gamma_1)}(\vec{a})$ compte tenu des orientations respectives de chaque contour. Le champ \vec{a} étant à circulation conservative, alors $C_{(\Gamma)}(\vec{a}) = \oint_{(\Gamma)} \vec{a} \cdot d\vec{\ell} = 0 \equiv C_{(\Gamma_2)}(\vec{a}) - C_{(\Gamma_1)}(\vec{a})$, soit $C_{(\Gamma_2)}(\vec{a}) = C_{(\Gamma_1)}(\vec{a})$.

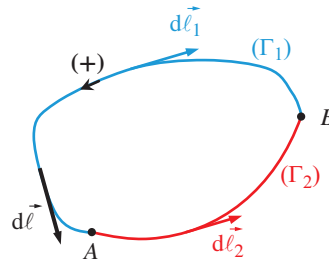


Figure 1.8
Décomposition d'un contour fermé.

Dans le cas particulier où le champ vectoriel est une force $\vec{F}(M)$, sa circulation le long de la trajectoire suivie par une particule matérielle entre deux points A et B a une signification physique précise : c'est le travail de la force appliquée à la particule entre ces deux points.

Exemple – Champ des vitesses d'un cyclone

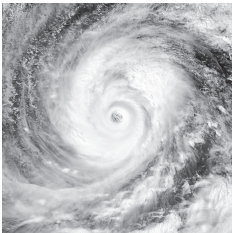
Repérons tout point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) dans le repère cylindrique $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On modélise un cyclone par un écoulement d'air dont le champ des vitesses s'écrit $\vec{v}(M) = \Omega \rho \vec{u}_\theta$ à l'intérieur de l'œil du cyclone, assimilé à un long cylindre d'axe (O, \vec{u}_z) de rayon R , et $\vec{v}(M) = \frac{\Omega R^2}{\rho} \vec{u}_\theta$ à l'extérieur de l'œil du cyclone. Ω est la norme d'un vecteur $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$, appelé vecteur tourbillon.

Calculons la circulation de $\vec{v}(M)$ le long d'un cercle (Γ) de rayon ρ , centré sur l'axe (O, \vec{u}_z) et orienté dans le sens des θ croissants.

- Pour $\rho \leq R$: $C_{(\Gamma)}(\vec{v}) = \oint_{M \in (\Gamma)} \vec{v}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = \int_0^{2\pi} \Omega \rho \vec{u}_\theta \cdot \rho d\theta \vec{u}_\theta = 2\pi \Omega \rho^2$.
- Pour $\rho \geq R$: $C_{(\Gamma)}(\vec{v}) = \int_0^{2\pi} \frac{\Omega R^2}{\rho} \vec{u}_\theta \cdot \rho d\theta \vec{u}_\theta = 2\pi \Omega R^2$.

3.2 Flux d'un champ vectoriel

Soit un contour (Γ) fermé et soit une surface (Σ) quelconque s'appuyant sur ce contour (figure 1.9).



On convient d'orienter tout élément de surface dS_M entourant un point M de (Σ) par un vecteur unitaire \vec{n}_M , perpendiculaire à dS_M et dont le sens est donné par la règle du tire-bouchon de Maxwell : un tire-bouchon dont le manche tourne dans le sens positif de (Γ) perce (Σ) dans le sens de \vec{n}_M au point M considéré. On appelle alors **vecteur élément de surface** le vecteur $d\vec{S}_M = \vec{n}_M dS_M$.

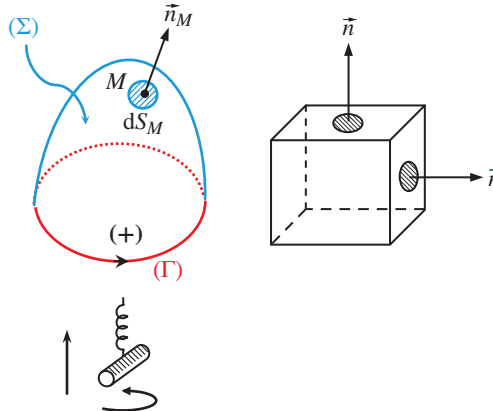


Figure 1.9
Surface ouverte
(à gauche) et surface
fermée (à droite).

Une surface ouverte s'appuie toujours sur un contour fermé, alors qu'une surface fermée engendre un volume et ne peut donc s'appuyer sur un contour fermé. Dans le cas d'une surface fermée, on oriente conventionnellement le vecteur normal \vec{n}_M de l'intérieur vers l'extérieur.

Définition

Soit un champ vectoriel $\vec{a}(M)$.

On appelle **flux élémentaire** de \vec{a} à travers un élément de surface dS_M de (Σ) le produit scalaire $d\Phi(\vec{a}) = \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_M$.

Le flux de \vec{a} à travers (Σ) est obtenu en faisant la somme des flux élémentaires à travers chacune des surfaces élémentaires constituant (Σ) : $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{a}) = \iint_{M \in (\Sigma)} \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_M$.

En particulier, si son flux est nul à travers toute surface (Σ) fermée, le champ \vec{a} est dit à **flux conservatif** : $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{a}) = \iint_{M \in (\Sigma)} \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_M = 0$.

Propriété

Le flux d'un champ à flux conservatif est le même à travers toute surface ouverte qui s'appuie sur un contour fermé donné.

Justification

Considérons deux surfaces quelconques (Σ_1) et (Σ_2) s'appuyant sur un même contour fermé (figure 1.10). Notons $\Phi_{(\Sigma_1)}(\vec{a})$ et $\Phi_{(\Sigma_2)}(\vec{a})$ respectivement le flux du champ vectoriel \vec{a} à travers chacune de ces surfaces.

Le flux total de \vec{a} à travers la surface fermée $(\Sigma) = (\Sigma_1) \cup (\Sigma_2)$ orientée vers l'extérieur est donc $\Phi_{(\Sigma_1)}(\vec{a}) - \Phi_{(\Sigma_2)}(\vec{a})$ compte tenu des orientations respectives de chaque surface. Le champ \vec{a} étant à flux conservatif, on obtient donc $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{a}) = \oiint_{(\Sigma)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = 0 \equiv \Phi_{(\Sigma_1)}(\vec{a}) - \Phi_{(\Sigma_2)}(\vec{a})$, soit $\Phi_{(\Sigma_1)}(\vec{a}) = \Phi_{(\Sigma_2)}(\vec{a})$.

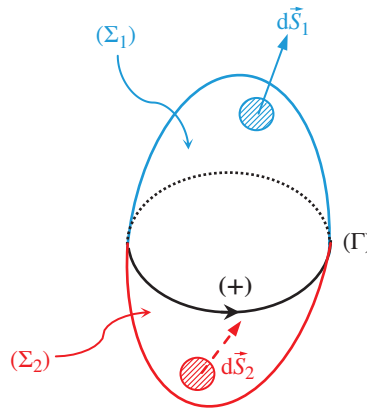
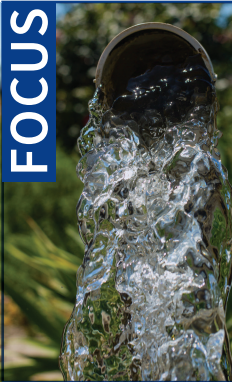


Figure 1.10
Décomposition
d'une surface
fermée.



FOCUS

La notion de flux en physique

En physique, le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface traduit la quantité d'une grandeur physique qui traverse par unité de temps la surface. Ainsi, le débit volumique d'un écoulement à travers la section d'une conduite est le volume de fluide qui traverse la section par unité de temps. On montre que ce débit est le flux du champ des vitesses du fluide à travers la section. De même, l'intensité du courant électrique dans un fil est le débit de charges à travers une section du fil, c'est-à-dire la quantité de charges électriques qui traverse la section par unité de temps. L'intensité du courant correspond au flux à travers la section d'un champ de vecteurs appelé vecteur densité de courant électrique (voir chapitre 8). On parle aussi de flux d'un champ électrique ou d'un champ magnétique, même s'il ne peut s'agir pour ces deux cas de l'écoulement d'une quantité physique à travers une surface.

Exemple – Champ gravitationnel terrestre

Repérons tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère sphérique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. En modélisant la Terre par une sphère de centre O , de rayon R_T et de masse M_T répartie de façon homogène, le champ gravitationnel à l'intérieur de la Terre est $\vec{G}_T(M) = -\frac{GM_T}{R_T^3} r \vec{u}_r$ ($r \leq R_T$) où G désigne la constante de gravitation universelle et

$$\vec{G}_T(M) = -\frac{GM_T}{R_T^3} r \vec{u}_r \quad (r \leq R_T)$$

$$\vec{G}_T(M) = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{à l'extérieur } (r \geq R_T).$$

Calculons le flux de $\vec{G}_T(M)$ à travers une sphère (Σ) de rayon r et de centre O . L'élément de surface $d\vec{S}_M$ entourant un point M de la sphère est orienté par convention vers l'extérieur et est perpendiculaire en M à la surface. Il est donc orienté selon le vecteur unitaire \vec{u}_r , porté par le rayon OM de la sphère.

$$\text{– Pour } r \leq R_T : \Phi_{(\Sigma)}(\vec{G}_T) = \iint_{M \in (\Sigma)} \vec{G}_T(M) \cdot d\vec{S}_M = \iint_{M \in (\Sigma)} -\frac{GM_T}{R_T^3} r \vec{u}_r \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r.$$

$$\text{Par séparation des variables, on arrive finalement à : } \Phi_{(\Sigma)}(\vec{G}_T) = -\frac{GM_T}{R_T^3} r^3 \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -4\pi GM_T \left(\frac{r}{R_T}\right)^3.$$

$$\text{– Pour } r \geq R_T : \Phi_{(\Sigma)}(\vec{G}_T) = \iint_{M \in (\Sigma)} -\frac{GM_T}{r^2} \vec{u}_r \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r = -4\pi GM_T.$$

4 Opérateurs différentiels vectoriels

4.1 Le gradient

Considérons, une nouvelle fois, l'exemple de la barre calorifugée dont les extrémités sont portées à des températures différentes. En régime permanent, la variation infinitésimale de température entre deux points M et M' infiniment proches, d'abscisses respectives x et $x + dx$, est $dT = T(x + dx) - T(x) \cong \frac{dT}{dx}(x)dx$ où $\frac{dT}{dx}(x)$ désigne la dérivée de la fonction $T(x)$ évaluée au point M .

Quittons maintenant le cas unidimensionnel de la barre pour considérer le champ de température existant par exemple dans une pièce d'habitation chauffée. Entre un point M repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) et un point M' infiniment proche de coordonnées $(x + dx, y + dy, z + dz)$, la variation correspondante de température s'écrit désormais :

$$dT = T(x + dx, y + dy, z + dz) - T(x, y, z) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, y, z)dx + \frac{\partial T}{\partial y}(x, y, z)dy + \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z)dz.$$

Cette expression, appelée **différentielle totale** de la fonction $T(x, y, z)$, peut aussi être vue comme le produit scalaire du vecteur déplacement élémentaire $d\vec{\ell}_M = \overline{MM'} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$ et d'un certain champ de vecteurs de composantes $\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$ évaluées en M dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Un tel champ est appelé gradient du champ de température et noté $\overline{\text{grad}}(T)$.

Définition

Soit U un champ scalaire. On appelle **gradient** de U , noté $\overline{\text{grad}}(U)$, le champ vectoriel tel que $dU = \overline{\text{grad}}(U) \cdot d\vec{\ell}$. Cette relation définit de façon intrinsèque le gradient d'un champ scalaire car elle est indépendante du système de coordonnées choisi.

En coordonnées cartésiennes, le gradient du champ U s'écrit sous la forme :

$$\overline{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$$

Il ne faut surtout pas chercher à exprimer le gradient d'un champ scalaire dans d'autres systèmes de coordonnées en l'extrapolant à partir de son expression en coordonnées cartésiennes. Il faudra toujours se reporter au formulaire en annexe et de même pour les opérateurs présentés par la suite.

Sens physique

Pour en appréhender le sens physique, détaillons pour cela quelques propriétés du gradient d'un champ scalaire U .

- $\overline{\text{grad}}(U)$ est dirigé selon le signe des dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ et $\frac{\partial U}{\partial z}$ donc $\overline{\text{grad}}(U)$ est dirigé dans le sens des U croissants.

- Pour un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ le long d'une surface équi- U ou surface de niveau de U , c'est-à-dire une surface sur laquelle U a une valeur constante, $dU = 0$ donc $\overline{\text{grad}}(U) \perp d\vec{\ell}$: $\overline{\text{grad}}(U)$ est normal aux surfaces équi- U .
- En notant θ l'angle entre $\overline{\text{grad}}(U)$ et $d\vec{\ell}$ au point considéré, nous pouvons écrire par définition du produit scalaire : $dU = \overline{\text{grad}}(U) \cdot d\vec{\ell} = \|\overline{\text{grad}}(U)\| \cdot \|d\vec{\ell}\| \cdot \cos\theta$. $\|\overline{\text{grad}}(U)\|$ et $\|d\vec{\ell}\|$ étant donnés, nous en déduisons que la variation maximale de U est obtenue pour $\theta = 0$, soit pour un déplacement $d\vec{\ell}$ dans la direction de $\overline{\text{grad}}(U)$. Ainsi, la direction de $\overline{\text{grad}}(U)$ est celle le long de laquelle le champ U varie le plus intensément.

Propriété

Le gradient d'un champ scalaire U traduit le caractère non-uniforme de ce champ. Il est orienté dans le sens de croissance de U , sa direction, normale aux surfaces de niveau de U , correspondant à la plus grande variation spatiale de U .

Exemple – Gradient de pression au sein d'un liquide

Dans un liquide de masse volumique μ , au repos dans le champ de pesanteur \vec{g} supposé uniforme relativement à un référentiel considéré comme galiléen, existe un champ de pression de la forme $p(M) = p_0 - \mu g z$, où le point M est repéré par sa cote z sur un axe vertical ascendant (O, \vec{u}_z) .

Il existe donc un gradient de pression au sein du liquide, vertical et descendant, perpendiculaire en M au plan $z = C^{ste}$ qui constitue une surface de niveau de la pression : $\overline{\text{grad}}(p) = \frac{dp}{dz} \vec{u}_z = -\mu g \vec{u}_z$. Ce gradient est un champ uniforme. Dans l'eau ($\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), la norme du gradient de pression est de l'ordre de $10^4 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}$. Ceci signifie que tout déplacement dans le sens de $\overline{\text{grad}}(p)$ conduira à une augmentation de la pression dans l'eau de 1 bar tous les 10 mètres parcourus, résultat bien connu en plongée sous-marine.



4.2 La divergence

Définition

Soit un champ vectoriel \vec{a} dont le flux sortant d'une surface fermée définissant un volume élémentaire dV est $d\Phi$. On appelle **divergence** de \vec{a} , noté $\text{div}(\vec{a})$, le champ scalaire tel que $d\Phi \equiv \text{div}(\vec{a})dV$.

Cette relation dont on exclut toute démonstration constitue la définition intrinsèque de l'opérateur divergence. Elle permet d'exprimer cet opérateur dans différents systèmes de coordonnées. On se reportera pour le calcul de la divergence de tout champ vectoriel au formulaire situé en annexe.

Exemple – Champ gravitationnel terrestre

Reprenons l'exemple du champ gravitationnel terrestre et calculons la divergence de ce champ en tout point M de l'espace.

La divergence d'un champ vectoriel $\vec{a} = a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta + a_\varphi \vec{u}_\varphi$ s'écrit en repérage sphérique

(voir formulaire) : $\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(a_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(a_\varphi)}{\partial \varphi}$.

Pour calculer aisément la divergence du champ, on identifie au préalable ses composantes non nulles dans la base sphérique puis leurs dépendances selon les coordonnées sphériques du point M . Pour le champ gravitationnel terrestre, nous avons simplement $\vec{G}_T(M) = G_{T,r}(r)\vec{u}_r$,

aussi $\text{div}(\vec{G}_T) = \frac{1}{r^2} \frac{d(G_{T,r}r^2)}{dr}$.

– Pour $r \leq R_T$: $G_{T,r}(r) = -\frac{GM_T}{R_T^3}r$ soit $\text{div}(\vec{G}_T) = \frac{1}{r^2} \left(-\frac{GM_T}{R_T^3} \right) \frac{d(r^3)}{dr} = -\frac{3GM_T}{R_T^3}$.

– Pour $r \geq R_T$: $G_{T,r}(r) = -\frac{GM_T}{r^2}$ soit $\text{div}(\vec{G}_T) = \frac{1}{r^2} \frac{d(-GM_T)}{dr} = 0$.

Il peut être tentant, comme son nom l’indique, d’associer la divergence d’un champ vectoriel au caractère divergent (ou convergent) de ses lignes de champ. Dans notre exemple, les lignes de champ sont radiales et convergent vers le point O , bien que la divergence du champ gravitationnel soit nulle à l’extérieur de la Terre (figure 1.11). La divergence d’un champ vectoriel n’est donc pas toujours une mesure de la divergence de ses lignes de champ.

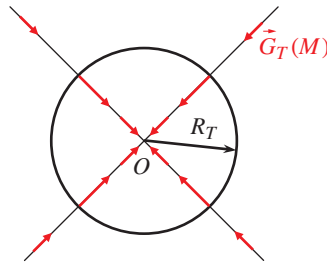


Figure 1.11 Lignes du champ gravitationnel terrestre.

Théorème de Green-Ostrogradsky

Propriété

Le **théorème de Green-Ostrogradsky** dit que le flux d’un champ vectoriel \vec{a} sortant d’une surface fermée (Σ) est égal à l’intégrale de sa divergence, étendue au volume (τ) délimité par (Σ) :

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \text{div}(\vec{a}) dV$$

On peut comprendre l’origine de ce théorème en décomposant (τ) en parallélépipèdes élémentaires de volume dV . Par définition, le flux sortant de chacun de ces volumes, orientés par convention vers l’extérieur, est $d\Phi = \text{div}(\vec{a})dV$. Or, le flux sortant d’une face de l’un compense le flux sortant de la face adjacente de l’autre (figure 1.12). En sommant tous les flux sortants de tous les volumes élémentaires constituant (τ), le résultat net est donc égal au flux sortant à travers la surface fermée (Σ).

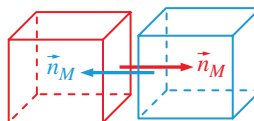


Figure 1.12 Les flux sortants à travers deux faces élémentaires adjacentes se compensent.



■ **Mikhaïl Ostrogradsky** (1801-1862) est un physicien et mathématicien russe connu pour avoir établi le théorème de la divergence.

Si \vec{a} est à flux conservatif alors par définition, $\oiint_{(\Sigma)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = 0$ pour toute surface fermée (Σ) , ce qui implique que $\text{div}(\vec{a}) = 0$ en tout point de l'espace et ce réciproquement.

Exemple – Champ gravitationnel terrestre

Nous pouvons vérifier à ce stade la validité du théorème de Green-Ostrogradsky pour le champ gravitationnel terrestre dont nous avons calculé la divergence en tout point de l'espace, ainsi que le flux sortant à travers toute sphère (Σ) de rayon r et de centre O .

– Pour $r \leq R_T$, le flux sortant est $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{G}_T) = \oiint_{M \in (\Sigma)} \vec{G}_T(M) \cdot d\vec{S}_M = -4\pi\mathcal{G}M_T \left(\frac{r}{R_T}\right)^3$ et

$\text{div}(\vec{G}_T) = -\frac{3\mathcal{G}M_T}{R_T^3}$. Alors, en notant (τ) le volume que définit la sphère de rayon r :

$$\iiint_{M \in (\tau)} \text{div}(\vec{G}_T(M)) dV_M = \iiint_{M \in (\tau)} -\frac{3\mathcal{G}M_T}{R_T^3} dV_M = -\frac{3\mathcal{G}M_T}{R_T^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \Phi_{(\Sigma)}(\vec{G}_T)$$

– Pour $r \geq R_T$, le flux sortant est $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{G}_T) = -4\pi\mathcal{G}M_T$ et $\text{div}(\vec{G}_T) = 0$. On décompose alors l'intégrale en volume en deux termes, le premier terme correspondant à une intégrale sur le volume d'une sphère de rayon R_T :

$$\begin{aligned} \iiint_{M \in (\tau)} \text{div}(\vec{G}_T(M)) dV_M &= \iiint_{r \leq R_T} \text{div}(\vec{G}_T(M)) dV_M + \iiint_{r \geq R_T} \text{div}(\vec{G}_T(M)) dV_M \\ &= -\frac{3\mathcal{G}M_T}{R_T^3} \times \frac{4}{3}\pi R_T^3 + 0 = \Phi_{(\Sigma)}(\vec{G}_T) \end{aligned}$$

Attention à ne pas aller trop vite dans le calcul de l'intégrale en volume : $\text{div}(\vec{G}_T) = 0$ uniquement pour $r \geq R_T$. Or, on intègre sur l'ensemble des points M qui appartiennent au volume de la sphère, y compris les points tels que $r \leq R_T$ d'où la décomposition de l'intégrale.

4.3 Le rotationnel

Définition

Soit un champ vectoriel \vec{a} dont la circulation le long d'un contour fermé définissant une surface élémentaire orientée $d\vec{S}$ est dC . On appelle **rotationnel** de \vec{a} , noté $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})$, le champ vectoriel tel que $dC \equiv \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\vec{S}$.

Cette relation constitue la définition intrinsèque de l'opérateur rotationnel. Elle permet d'exprimer cet opérateur dans différents systèmes de coordonnées. On se reportera pour le calcul du rotationnel de tout champ vectoriel au formulaire situé en annexe.

Exemple – Champ des vitesses d'un cyclone

Revenons à l'exemple du champ des vitesses dans un cyclone et calculons le rotationnel de ce champ en tout point M de l'espace.

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{a} = a_\rho \vec{u}_\rho + a_\theta \vec{u}_\theta + a_z \vec{u}_z$ s'écrit en repérage cylindrique

(voir formulaire) :
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right] \vec{u}_\rho + \left[\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right] \vec{u}_\theta + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z.$$

Tout comme nous l'avons fait pour la divergence, il faut, avant de se lancer dans le calcul du rotationnel du champ, identifier au préalable ses composantes non nulles dans la base cylindrique puis leurs dépendances selon les coordonnées cylindriques du point M . Pour le champ des vitesses dans un cyclone, nous avons simplement $\vec{v}(M) = v_\theta(\rho) \vec{u}_\theta$, aussi

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \left[\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho v_\theta)}{d\rho} \right] \vec{u}_z.$$

– Pour $\rho \leq R : v_\theta(\rho) = \Omega \rho$, soit $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \left[\frac{1}{\rho} \frac{d(\Omega \rho^2)}{d\rho} \right] \vec{u}_z = 2\Omega \vec{u}_z.$

– Pour $\rho \geq R : v_\theta(\rho) = \frac{\Omega R^2}{\rho}$, soit $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \left[\frac{1}{\rho} \frac{d(\Omega R^2)}{d\rho} \right] \vec{u}_z = \vec{0}.$

Il peut aussi être tentant ici d'associer le rotationnel d'un champ vectoriel au caractère tournant (ou tourbillonnaire) de ses lignes de champ. Dans notre exemple, les lignes de champ sont des cercles d'axe (O, \vec{u}_z) et s'enroulent autour du point O bien que le rotationnel du champ des vitesses soit nul à l'extérieur de l'œil du cyclone (figure 1.13). Le rotationnel d'un champ vectoriel n'est donc pas toujours une mesure de la tendance à l'enroulement de ses lignes de champ.

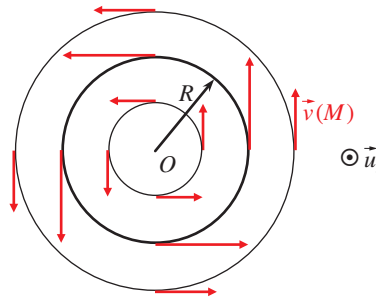
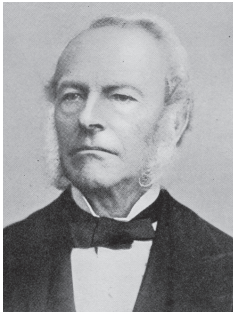


Figure 1.13

Lignes du champ des vitesses d'un cyclone.



■ **George Gabriel Stokes** (1819-1903), mathématicien et physicien britannique, est notamment connu pour ses travaux sur les fluides visqueux.

Théorème de Stokes

Définition

Le **théorème de Stokes** dit que la circulation d'un champ vectoriel \vec{a} le long d'un contour (Γ) fermé est égale au flux du rotationnel de \vec{a} à travers une surface (Σ) quelconque s'appuyant sur (Γ) :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{a} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\vec{S}$$

On peut comprendre l'origine de ce théorème en décomposant (Σ) en rectangles élémentaires, tous orientés dans le même sens, et de surface $d\vec{S}$. Par définition, la circulation le long de chacun de ces rectangles est $dC = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\vec{S}$. Or, la circulation le long d'une portion de l'un compense la circulation le long de la portion

adjacente de l'autre (figure 1.14). En sommant toutes les circulations le long de tous les contours élémentaires constituant (Σ) , le résultat net est donc égal à la circulation le long du contour fermé (Γ) .

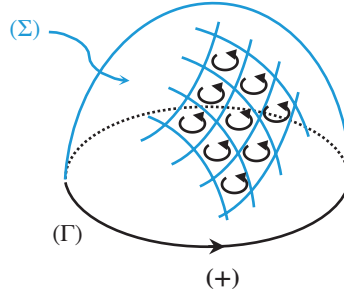


Figure 1.14
Les circulations le long de deux portions de contour élémentaire adjacentes se compensent.

Si \vec{a} est à circulation conservative alors par définition $\oint_{(\Gamma)} \vec{a} \cdot d\vec{\ell} = 0$ pour tout contour fermé (Γ) , ce qui implique que $\text{rot}(\vec{a}) = \vec{0}$ en tout point de l'espace et ce réciproquement.

Exemple – Champ des vitesses d'un cyclone

Nous pouvons vérifier à ce stade la validité du théorème de Stokes avec le champ des vitesses d'un cyclone, dont nous avons calculé le rotationnel en tout point M de l'espace, ainsi que la circulation le long d'un cercle (Γ) de rayon ρ et d'axe (O, \vec{u}_z) . Il faut, pour cela, calculer le flux de $\text{rot}(\vec{v})$ à travers une surface (Σ) s'appuyant sur le cercle (Γ) . Le plus simple est de considérer comme surface celle du disque définie par (Γ) . En tout point M de ce disque, le vecteur surface élémentaire s'écrit $d\vec{S}_M = \rho d\rho d\theta \vec{u}_z$ compte tenu de l'orientation de (Γ) .

– Pour $\rho \leq R$, la circulation est $C_{(\Gamma)}(\vec{v}) = 2\pi\Omega\rho^2$ et $\text{rot}(\vec{v}) = 2\Omega\vec{u}_z$. On obtient immédiatement :

$$\iint_{M \in (\Sigma)} \text{rot}(\vec{v}(M)) \cdot d\vec{S}_M = \iint_{M \in (\Sigma)} 2\Omega\vec{u}_z \cdot dS_M \vec{u}_z = 2\Omega \iint_{M \in (\Sigma)} dS_M = 2\pi\Omega\rho^2 = C_{(\Gamma)}(\vec{v})$$

– Pour $\rho \geq R$, la circulation est $C_{(\Gamma)}(\vec{v}) = 2\pi\Omega R^2$ et $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$. On décompose alors l'intégrale de surface en deux termes, le premier terme correspondant au flux de $\text{rot}(\vec{v})$ à travers un disque de rayon R :

$$\iint_{M \in (\Sigma)} \text{rot}(\vec{v}(M)) \cdot d\vec{S}_M = \iint_{\rho \leq R} \text{rot}(\vec{v}(M)) \cdot d\vec{S}_M + \iint_{\rho \geq R} \text{rot}(\vec{v}(M)) \cdot d\vec{S}_M = 2\pi\Omega R^2 + 0 = C_{(\Gamma)}(\vec{v})$$

4.4 Combinaison d'opérateurs

Appliquer l'opérateur gradient, divergence ou rotationnel sur un champ conduit, comme nous venons de le voir, à un nouveau champ. Appliquer, à nouveau, l'un de ces opérateurs à ce champ permet d'obtenir des résultats extrêmement importants en analyse vectorielle.

Définition

- Le **laplacien** scalaire d'un champ scalaire U est un nouveau champ scalaire, noté ΔU , et défini par :

$$\Delta U = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}(U))$$

En coordonnées cartésiennes, le laplacien scalaire du champ U s'écrit sous la forme :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

- Le laplacien vectoriel d'un champ vectoriel \vec{a} est un nouveau champ vectoriel, noté $\Delta \vec{a}$, et défini par :

$$\Delta \vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{a})) - \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{a}))$$

En coordonnées cartésiennes, le laplacien vectoriel du champ \vec{a} s'écrit sous la forme :

$$\Delta \vec{a} = (\Delta a_x)\vec{u}_x + (\Delta a_y)\vec{u}_y + (\Delta a_z)\vec{u}_z$$

$$\Delta a_{i=x,y,z} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial z^2}$$
 est le laplacien scalaire de la composante cartésienne a_i

du champ \vec{a} .

Ce qu'il faut retenir

- La **circulation** d'un champ vectoriel \vec{a} le long d'un contour (Γ) orienté d'un point A à un point B est $C_{(\Gamma)}(\vec{a}) = \int_{\substack{M \in (\Gamma) \\ A \rightarrow B}} \vec{a}(M) \cdot d\vec{\ell}_M$, et son **flux** à travers une surface (Σ) est $\Phi_{(\Sigma)}(\vec{a}) = \iint_{M \in (\Sigma)} \vec{a}(M) \cdot d\vec{S}_M$.
- Le **gradient** d'un champ scalaire U est le champ vectoriel noté $\overline{\text{grad}}(U)$ tel que $dU = \overline{\text{grad}}(U) \cdot d\vec{\ell}$. Un gradient est toujours perpendiculaire aux surfaces de niveau de U et orienté dans le sens de croissance de U .
- Le flux d'un champ vectoriel \vec{a} sortant d'une surface fermée (Σ) est égal à l'intégrale de sa divergence, étendue au volume (τ) délimité par (Σ) (**théorème de Green-Ostrogradsky**) : $\oiint_{(\Sigma)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \text{div}(\vec{a}) \, dV$. Si le champ est à flux conservatif, alors son flux à travers (Σ) est nul donc $\text{div}(\vec{a}) = 0$ et ce réciproquement.
- La circulation d'un champ vectoriel \vec{a} le long d'un contour (Γ) fermé est égale au flux du rotationnel de \vec{a} à travers une surface (Σ) quelconque s'appuyant sur (Γ) (**théorème de Stokes**) : $\oint_{(\Gamma)} \vec{a} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(\Sigma)} \overline{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\vec{S}$. Si le champ est à circulation conservative, alors sa circulation le long (Γ) est nulle donc $\overline{\text{rot}}(\vec{a}) = \vec{0}$ et ce réciproquement.

Plusieurs réponses peuvent être correctes.

1. **Le gradient du champ de température dans une pièce est :**
 - a. perpendiculaire à une surface de niveau de la température ;
 - b. dirigé vers les températures croissantes ;
 - c. un champ scalaire.
2. **On considère que la température T croît radialement de 30 K en moyenne par kilomètre de profondeur dans la Terre assimilée à une sphère de centre O , origine du repère sphérique. Le gradient de température exprimé en K/m dans la Terre s'écrit :**
 - a. $\overline{\text{grad}}(T) = 0,03\vec{u}_\rho$;
 - b. $\overline{\text{grad}}(T) = -0,03\vec{u}_r$;
 - c. $\overline{\text{grad}}(T) = 30\vec{u}_r$.
3. **On considère un cylindre d'axe (O, \vec{u}_z) , de hauteur h et de rayon R . Dans le repère cylindrique,**
 - l'élément de surface orienté qui entoure un point M de la surface latérale s'écrit :**
 - a. $d\vec{S}_M = (Rd\theta dz)\vec{u}_\rho$;
 - b. $d\vec{S}_M = -(Rd\theta dz)\vec{u}_\rho$;
 - c. $d\vec{S}_M = (Rd\rho dz)\vec{u}_\rho$.
4. **Le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée quelconque est :**
 - a. toujours positif ;
 - b. dépend de l'orientation de la surface ;
 - c. toujours nul si la surface est fermée.
5. **Un champ de vecteurs à circulation conservative est :**
 - a. de divergence toujours nulle.
 - b. de gradient toujours nul.
 - c. de rotationnel toujours nul.

Réponses page 195

Exercices

Corrigés page 195

1 Vecteurs déplacement élémentaire

- a. On note $(\mathcal{B}_{car}) = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ la base cartésienne et $(\mathcal{B}_{cyl}) = (\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base cylindrique attachée à un point M donné de l'espace. Exprimer les vecteurs \vec{u}_ρ et \vec{u}_θ dans la base cartésienne. En déduire l'expression du vecteur déplacement élémentaire $d\vec{OM} = d\vec{\ell}_M$ du point M dans la base cylindrique en différenciant directement le vecteur position \vec{OM} exprimé dans cette base.
- b. Répondre aux mêmes questions en considérant cette fois la base sphérique $(\mathcal{B}_{sph}) = (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ attachée au point M .

2 Calcul de surfaces et de volumes

- a. Calculer la surface d'une calotte sphérique de rayon R et de hauteur h .
- b. Calculer le volume d'un cône de hauteur h et de base de rayon R .

3 Expression du gradient dans différents systèmes de coordonnées

À partir de la définition intrinsèque du gradient, exprimer le gradient d'un champ scalaire U en repérage cylindrique puis en repérage sphérique.

4 Gradient d'indice dans une fibre optique

On considère une fibre optique constituée de deux cylindres concentriques d'axe (O, \vec{u}_z) . Tout point dans la fibre est repéré par ses coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

L'indice de réfraction de la partie centrale de rayon $a = 25 \mu\text{m}$, appelée cœur, varie continûment avec la distance ρ à l'axe optique. Celui de la partie externe, appelée gaine, est constant, de valeur $n_2 = 1,445$.

On modélise l'indice dans le cœur par le profil

$$n(\rho) = n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{\rho}{a}\right)^2} \quad \text{où } n_1 = 1,460 \text{ et où } \Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}.$$

Exprimer le gradient d'indice dans le cœur de la fibre. Vérifier qu'il est bien perpendiculaire aux surfaces équi-indice que l'on précisera et orienté vers les indices croissants. Calculer sa valeur maximale.

5 Opérateurs en repérage cylindrique

On repère tout point M par ses coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) dans le repère $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. En se reportant au formulaire, calculer :

- a. $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\vec{u}_z\right)$.
- b. $\text{div}(\rho\vec{u}_\rho)$.
- c. $\Delta(\ln\rho)$.

6 Opérateurs en repérage sphérique

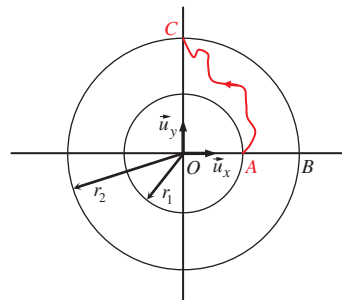
On repère tout point M par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. En se reportant au formulaire, calculer :

- a. $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u}_\varphi)$.
- b. $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)$.
- c. $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)$.

7 Champ à circulation conservative

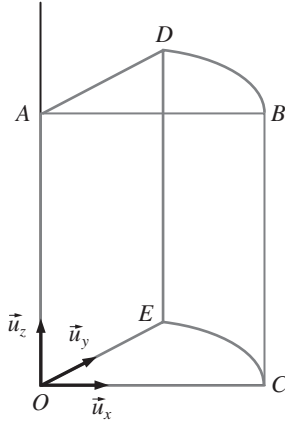
On repère tout point M par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

Soit le champ vectoriel $\vec{a}(M) = \frac{k}{r^2}\vec{u}_r$ où k est une constante positive. Montrer que le champ \vec{a} est à circulation conservative. Utiliser ce résultat pour calculer la circulation du champ \vec{a} le long du trajet orienté AC représenté ci-dessous.



8 Flux à travers une surface fermée

On repère tout point M par ses coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) dans le repère $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Soit le champ vectoriel $\vec{a}(M) = k\rho\vec{u}_\theta$ où k est une constante positive. Calculer le flux sortant à travers la surface fermée constituée d'un quart de cylindre droit, d'axe (O, \vec{u}_z) , de hauteur h et de rayon R . Pourquoi pouvait-on s'attendre à un tel résultat ?



Conseil La surface fermée considérée est constituée de 5 surfaces ouvertes. Les orienter correctement et calculer le flux du champ \vec{a} à travers chacune d'elle.

9 Champ à flux conservatif

On repère tout point M par ses coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) dans le repère $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Soit le champ vectoriel $\vec{a}(M) = \frac{1}{2}k\rho\vec{u}_\theta$.

- Calculer le champ vectoriel $\vec{b} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a})$. Justifier que \vec{b} est à flux conservatif.
- En considérant un contour (Γ) fermé et une surface (Σ) s'appuyant sur (Γ) , montrer à l'aide du théorème de Stokes que le flux de \vec{b} à travers (Σ) est égal à la circulation de \vec{a} le long de (Γ) : $\iint_{(\Sigma)} \vec{b} \cdot d\vec{S} = \oint_{(\Gamma)} \vec{a} \cdot d\vec{\ell}$.
- Calculer la circulation du champ \vec{a} le long d'un cercle orienté de rayon R , de centre O et d'axe (O, \vec{u}_z) . Vérifier la validité de la relation intégrale précédente en calculant le flux de \vec{b} à travers la surface du disque qui s'appuie sur le cercle orienté.
- Calculer de même le flux de \vec{b} à travers un hémisphère de rayon R s'appuyant sur le cercle orienté. Commenter le résultat.