1

Énoncés des 50 problèmes

Nous donnons ci-dessous les énoncés. Bien que *totalement indépendants* entre eux, ils ont été regroupés par thèmes principaux.

1.1 INÉGALITÉS FONCTIONNELLES

Un point de vue très fécond consiste à considérer les fonctions (d'une ou de plusieurs variables réelles par exemple) comme des éléments d'un espace vectoriel normé, ou parfois comme des points d'un espace affine normé. L'idée de base consiste à essayer de transposer à ces espaces, en général de dimension infinie, les résultats « habituels » dans $\mathbb{R}^n$ pour en déduire des résultats sur les fonctions auxquelles on s'était initialement intéressé. Un exemple classique est le théorème du point fixe de Picard qui permet, lorsqu'il est invoqué sur un espace vectoriel normé *complet* de fonctions, de montrer l'existence de solutions pour une équation différentielle (voir par exemple le problème 36). Ces espaces vectoriels où vivent les fonctions en question — $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}), \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n), \ldots$ — sont de dimension *infinie*. Deux différences essentielles apparaissent alors :

- ces espaces ne sont pas forcément complets, c'est justement cette propriété qui est cruciale pour l'application du théorème de point fixe de Picard,
- on dispose sur ces espaces de plusieurs normes qui n'ont aucune raison d'être équivalentes entre elles.

Dans cette première série de problèmes, il s'agit d'établir diverses relations entre normes sur des espaces de fonctions réelles d'une variable réelle. Le problème 5 est consacré à certaines inégalités de Sobolev pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Ces inégalités sont des outils très puissants pour l'étude des équations aux dérivées partielles, notamment celles de la physique mathématique : équation de la chaleur, équation de Schrödinger, équations de Navier-Stokes, etc. Nous renvoyons aussi aux commentaires à ce problème à la page 76.

Énoncé 1

Soit $u \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ avec $u(0) = u(1) = 0$.

1.1.1. Montrer que $\int_0^1 u^2(x)\,dx \leqslant 4\int_0^1 u'(x)^2\,dx$.

1.1.2. Notons $\Sigma = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R}), u(0) = u(1) = 0, \int_0^1 u'(x)^2 dx = 1\}$. On admet qu'il existe $v \in \Sigma$ tel que

$$\int_0^1 v^2(x)\,dx = \max_{w\in\Sigma}\int_0^1 w^2(x)\,dx. \qquad (\star)$$

Expliquer pourquoi l'existence d'un tel v n'est pas immédiate.

1.1.3. Montrer que seules *deux* fonctions $v \in \mathcal{C}^2([0,1]) \cap \Sigma$ peuvent vérifier $(\star)$. Calculer alors $c_0 \equiv \int_0^1 v^2(x)dx$.

1.1.4. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ avec $u(0) = u(1) = 0$ on a

$$\int_0^1 u^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 u'(x)^2\,dx.$$

1.1.5. Montrer cette inégalité sans faire l'hypothèse qu'il existe $v \in \Sigma$ vérifiant $(\star)$. En déduire alors qu'il existe $v \in \mathcal{C}^2([0,1]) \cap \Sigma$ vérifiant $(\star)$.

Énoncé 2

Soit u une application continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par u_k le nombre complexe $u_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)e^{-ikx}dx$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On note alors $Q(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k||u_k|^2 \in [0,+\infty]$.

2.1.1. Montrer que $Q(u)$ peut être effectivement égal à $+\infty$.

2.1.2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on désigne par $\varphi(t)$ le nombre $\int_0^{2\pi} |u(x+t) - u(x)|^2 dx$. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

2.1.3. Montrer que $\int_0^\infty \frac{\varphi(t)}{t^2}dt = \alpha Q(u)$ où α est une constante indépendante de u.

2.1.4. Montrer que si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ alors

$$Q^2(u) \leqslant \beta\int_0^{2\pi} u^2(x)dx\int_0^{2\pi}\left(\frac{du}{dx}\right)^2(x)dx \qquad (\star)$$

où β est une constante indépendante de u.

2.1.5. Quelle est la meilleure constante dans $(\star)$?

Énoncé 3

Soit u une application continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par u_k le nombre complexe $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)e^{ikx}dx$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On note alors $|u| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k|^2\right)^{1/2}$, $||u|| = (\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^2)|u_k|^2)^{1/2}$ et $[u] = (\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+|k|)|u_k|^2)^{1/2}$ (certains de ces nombres pouvant être infinis).

3.1.1. Montrer qu'il existe C_1 indépendant de u telle que $[u] \leqslant C_1|u|^{1/2}||u||^{1/2}$.

3.1.2. Montrer qu'il existe C_2 indépendant de u telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| \leqslant C_2|u|^{1/2}||u||^{1/2}.$$

3.1.3. Montrer que l'assertion suivante est fausse : il existe C_3 indépendant de u telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| \leqslant C_3[u]\,.$$

3.1.4. Montrer qu'il existe C_4 indépendant de u telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| \leqslant C_4[u]\left(\log\left(1+\frac{||u||}{[u]}\right)\right)^{1/2}.$$

Énoncé 4

À toute fonction f continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on note alors $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$), on associe la suite de ses coefficients de Fourier notés $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$. Soit alors A l'ensemble des fonctions f telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$.

4.1.1. Montrer que A, muni de la norme $||f||_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|$, est complet.

4.1.2. Montrer que A est une algèbre pour la multiplication.

4.1.3. Montrer que A est dense dans $\mathcal{C}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme et que $A \neq \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

4.1.4. Soit $\alpha \in]0,1]$. On dit que $f \in \mathcal{C}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ appartient à Lip_α si

$$[f]_\alpha = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

On munit l'espace Lip_α de la norme

$$||f||_\alpha = |\hat{f}(0)| + [f]_\alpha.$$

Montrer que pour tout $\alpha \in]\frac{1}{2},1]$, $Lip_\alpha \subset A$ et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall f \in Lip_\alpha, \quad ||f||_A \leqslant C||f||_\alpha.$$