J'intègre

Daniel Fredon

Mathématiques

Résumé du cours en fiches

PCSI • PTSI • PC • PSI • PT

- Le programme des deux années en 80 fiches
- Tous les théorèmes, définitions et formules

DUNOD

Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de première année de classes préparatoires scientifiques. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution.

Le livre est divisé en seize chapitres, consacrés chacun à une partie du programme. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et d'un . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent !

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par un . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par un .

Pour finir, signalons que cet ouvrage est conçu pour les étudiants des trois filières MPSI, PCSI et PTSI. Certains exercices, cependant, ne sont accessibles qu'aux élèves de MPSI. D'autres font appel à des connaissances qui dépassent le programme de PTSI (mais pourront être traités par ceux qui suivent l'option mathématique en vue d'entrer en PSI). De tels exercices sont rares et nous signalons ces subtilités dans leur titre.

Pour bien utiliser cet ouvrage :

Cet encadré vous indique un point important

Cet encadré met en avant un piège à éviter

Le stylo-plume vous signale l'étape de la rédaction finale.

Partie 1

Première période

Plan

1

Fonctions usuelles

Exercice 1.1 : Raisonnement par analyse-synthèse

1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

2. Déterminer les réels strictement positifs x tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Il s'agit de questions ouvertes : on demande de trouver les solutions d'un problème sans les donner. Une stratégie consiste à raisonner par analyse-synthèse. C'est un raisonnement en deux étapes :

- Première étape (analyse du problème) : on considère une solution x de l'équation et on essaie, à partir des relations données dans l'énoncé, d'en déduire la forme de x.
- Deuxième étape (synthèse) : l'étape précédente à montré que les solutions sont d'une certaine forme ; il ne reste plus qu'à vérifier, parmi ces solutions potentielles, lesquelles sont bien les solutions du problème.

La nécessité de cette deuxième étape apparaîtra clairement dans la résolution de la première question.

1. Analyse du problème : nous allons élever au carré pour nous ramener à une équation du second degré.

Soit x un réel tel que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$. Alors, en élevant au carré : $x(x-3) = 3x-5$, soit $x^2 - 6x + 5 = 0$. D'après le cours de Terminale les réels x vérifiant cette relation sont 1 et 5. Nous avons donc démontré :

si x est solution de l'équation **alors** $x = 1$ ou $x = 5$.

Nous n'avons pas démontré que les solutions sont 1 et 5, mais uniquement qu'elles ne peuvent valoir autre chose. Il reste à vérifier si elle conviennent effectivement : c'est l'objet de l'étape de synthèse.

Synthèse : on remplace successivement x par 5 puis 1 dans l'équation initiale, les calculs étant sans difficulté.

Il est facile de vérifier que 5 est bien solution. En revanche, pour $x = 1$, l'équation n'a pas de sens : elle fait intervenir des racines carrées de nombres négatifs. Ainsi, 1 n'est pas solution.

Conclusion : 5 est l'unique réel x tel que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

Pourquoi l'étape d'analyse a-t-elle produit une « fausse solution » (dite également *solution parasite*) ? Nous avons élevé deux expressions au carré. Or cette opération n'est pas réversible : s'il est vrai que $a = b$ entraîne $a^2 = b^2$, la réciproque est fausse en général. En élevant au carré, nous avons en fait résolu l'équation $x(x-3) = 3x-5$ qui se trouve avoir plus de solutions que l'équation de l'énoncé.

2. Analyse du problème : nous allons prendre les logarithmes afin de simplifier les puissances.

Soit x un réel strictement positif tel que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$. Alors, en prenant le logarithme : $x^x \ln(x) = x\ln(x^x) = x^2\ln(x)$.

On ne peut en déduire $x^x = x^2$ en simplifiant par $\ln(x)$: en effet, $\ln(x)$ pourrait être nul. Il faut donc ajouter une hypothèse pour poursuivre les calculs : $x \neq 1$.

Supposons $x \neq 1$. On a alors $\ln(x) \neq 0$, donc $x^x = x^2$.
En considérant à nouveau les logarithmes il vient : $x\ln(x) = 2\ln(x)$.
Comme on a supposé ici $x \neq 1$, on peut encore simplifier par $\ln(x)$, d'où $x = 2$.
Autrement dit, nous venons de démontrer : si x est un réel strictement positif distinct de 1 vérifiant $x^{(x^x)} = (x^x)^x$, alors $x = 2$.
Ainsi, il y a ou plus deux solutions éventuelles au problème : 1 et 2.

Synthèse : calculs sans astuce, attention cependant à la place des parenthèses.

Il est clair que 1 convient bien. De même, $2^{(2^2)} = 2^4 = 16$ et $(2^2)^2 = 4^2 = 16$, donc 2 convient également.

Conclusion : il existe deux réels strictement positifs x tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$: ce sont 1 et 2.

Si l'on oublie l'étape de synthèse dans la première question, on aboutit à un résultat faux : il y a une solution parasite.

D'autre part, si l'on ne fait pas attention lors de la simplification par $\ln(x)$ dans la deuxième question, on n'obtient que la solution $x = 2$.

Autrement dit, le manque de rigueur dans le raisonnement mathématique peut aboutir à trouver de « fausses solutions » ou au contraire à en oublier de vraies !

Pour éviter cela, il faut :

- prendre garde, dans le type de raisonnement présenté ici, à ne pas oublier l'étape de synthèse ;
- s'assurer que tous les calculs sont licites (ne pas diviser par zéro, ne pas prendre la racine carrée ou le logarithme d'un nombre négatif...) et, au besoin, distinguer des cas comme dans la deuxième question.

Exercice 1.2 : Étude de fonction

1. Étudier et tracer la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

2. En déduire les couples (a,b) d'entiers tels que $2 \leqslant a < b$ et $a^b = b^a$.

3. Quel est le plus grand : e^π ou π^e ?

1. La démarche pour étudier une fonction est toujours la même :

- déterminer le domaine de définition et de dérivabilité ;
- calculer la dérivée ;
- étudier les limites de la fonction aux bornes de son (ou ses) intervalle(s) de définition ;
- calculer les valeurs de la fonction aux points où la dérivée s'annule ;
- résumer tout ceci dans le tableau de variations.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

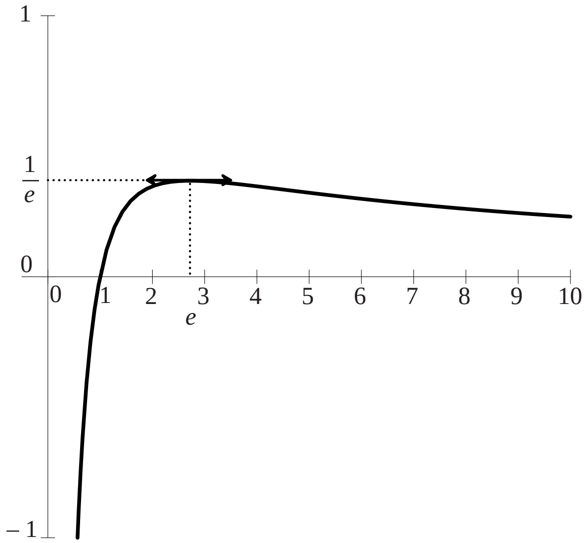
On a de plus, d'après les limites comparées vues en Terminale :

$$\begin{cases} f(1) & = & 0 \\ f(e) & = & e^{-1} \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) & = & 0 \end{cases}$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

puis sa représentation graphique :



2. L'énoncé de la question commence par « en déduire » : il s'agit donc de faire apparaître la fonction f, ce qui suggère d'introduire un logarithme.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Si un couple (a,b) convient on a alors, en prenant les logarithmes :

$$b\ln(a) = a\ln(b).$$

Comme a et b ne sont pas nuls on en déduit

$$\frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b}, \textit{ i.e. } \quad f(a) = f(b).$$

Or, d'après le tableau de variations, f ne peut prendre qu'au plus deux fois une même valeur et, si c'est le cas, elle la prend une fois sur $]1,e[$ et l'autre fois sur $]e,+\infty[$. Il est donc nécessaire que $1 < a < e < b$.
On sait que $e = 2{,}7$ à $0{,}1$ près ; ainsi, a étant entier, il ne peut valoir que 2.

Il reste à trouver un entier $b > e$ (donc $b \geqslant 3$) tel que $f(b) = \dfrac{\ln(2)}{2}$. Des essais successifs montrent que $b = 4$ convient.
D'autre part, f étant strictement décroissante sur $]e,+\infty[$, elle ne peut prendre plusieurs fois la même valeur : 4 est donc le seul entier b tel que $f(b) = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et $b > e$.
La seule solution possible au problème est donc $(a,b) = (2,4)$.

Enfin, nous allons vérifier que ce couple convient bien. Le premier exercice montre qu'une telle vérification n'est pas superflue !

Réciproquement, on a bien $2^4 = 4^2 (= 16)$: le problème possède donc une unique solution, $(a,b) = (2,4)$.

3. De manière analogue nous allons introduire un logarithme.
Pour comparer deux réels strictements positifs il suffit de comparer leurs logarithmes car la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Autrement dit, il s'agit de comparer $\ln(e^\pi) = \pi$ et $\ln(\pi^e) = e\ln(\pi)$: c'est là que la fonction f intervient en faisant apparaître les quotients $\frac{1}{e} = \frac{\ln(e)}{e} = f(e)$ et $\frac{\ln(\pi)}{\pi} = f(\pi)$.

On sait que $e < \pi$ donc, comme f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, $f(e) > f(\pi)$. Autrement dit :

$$\frac{1}{e} > \frac{\ln(\pi)}{\pi}.$$

En multipliant par e et π, qui sont strictement positifs, il vient :

$$\pi > e\ln(\pi).$$

En appliquant la fonction exponentielle, qui est strictement croissante, on obtient enfin :

$$e^\pi > \pi^e.$$

Dans cette dernière question, π ne joue aucun rôle : on aurait pu le remplacer par n'importe quel réel $x > e$.

Exercice 1.3 : Fonctions circulaires réciproques

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, $\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $u = \sin(\mathrm{Arctan}(x))$ et $v = \cos(\mathrm{Arctan}(x))$. Déterminer le signe de v puis, à l'aide de $\frac{u}{v}$ et $u^2 + v^2$, déterminer des expressions de u et v en fonction de x sans utiliser de fonctions trigonométriques.

1. Il y a plusieurs manières d'aborder un tel problème :
a) directement par la définition des fonctions circulaires réciproques. Il suffit alors d'essayer d'utiliser les formules de trigonométrie usuelles.

b) utiliser la trigonométrie d'une autre manière : pour montrer que deux réels a et b sont égaux, on peut commencer par montrer que $\sin(a) = \sin(b)$, puis conclure en déterminant un intervalle contenant a et b sur lequel la fonction sinus ne prend pas plusieurs fois la même valeur.

c) par l'étude d'une fonction bien choisie. Cependant, les fonctions Arcsin et Arccos ne sont dérivables que sur $]-1,1[$, alors qu'elles sont définies sur $[-1,1]$, et leur dérivée fait intervenir une racine carrée ; autrement dit, il faut être très prudent sur le domaine d'étude.

Nous allons utiliser successivement ces trois méthodes.

a) Posons $\theta = \text{Arcsin}(x)$ et $\varphi = \text{Arccos}(x)$.
Alors, par définition :

$$\sin(\theta) = x \quad \text{et} \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\cos(\varphi) = x \quad \text{et} \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Pour trouver une relation entre θ et φ on peut utiliser des formules de trigonométrie : on a

$$\begin{aligned} x &= \sin(\theta) \\ &= \cos(\pi/2 - \theta) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \cos(\pi/2 - \theta) &= x \\ &= \cos(\varphi). \end{aligned}$$

De plus, $\pi/2 - \theta \in [0, \pi]$. Or la fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ donc ne prend jamais deux fois la même valeur sur cet intervalle ; on a donc $\pi/2 - \theta = \varphi$, *i.e.* $\theta + \varphi = \pi/2$ ou encore

$$\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Afin de conclure on a dû utiliser les encadrements de θ et φ donnés par la définition des fonctions circulaires réciproques. D'une manière générale on a toujours besoin de ces encadrements pour étudier un problème faisant intervenir ces fonctions.

b) On a, d'après les formules de trigonométrie usuelles et les relations du cours suivantes :

$$\sin(\arccos(x)) = \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

la relation :

$$\sin(\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x)) = x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 = 1.$$

Ceci ne suffit pas pour déterminer la valeur de $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x)$; en effet, le sinus prend une infinité de fois la valeur 1, il faut donc encadrer $\text{Arcsin}(x)$ $+\text{Arccos}(x)$ pour trouver sa valeur.

Par définition,

$$-\pi/2 \leqslant \text{Arcsin}(x) \leqslant \pi/2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \text{Arccos}(x) \leqslant \pi.$$

On a donc

$$-\pi/2 \leqslant \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) \leqslant 3\pi/2.$$

Or, sur l'intervalle $[-\pi/2, 3\pi/2]$, la fonction sinus ne prend qu'une fois la valeur 1 : c'est au point $\pi/2$. On a donc :

$$\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

On notera ici encore une fois l'usage d'un argument d'encadrement.

c) Pour $x \in [-1,1]$ posons $f(x) = \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x)$.
La fonction f ainsi définie est dérivable sur $]-1,1[$, car Arcsin et Arccos le sont, mais rien ne permet de dire *a priori* qu'elle l'est sur $[-1,1]$; nous sommes donc contraints à ne l'étudier que sur $]-1,1[$.
Pour $x \in]-1,1[$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \text{Arcsin}'(x) + \text{Arccos}'(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après les formules du cours ; la fonction f est donc constante sur $]-1,1[$.
Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) \\ &= \text{Arcsin}(0) + \text{Arccos}(0) \\ &= 0 + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, on vérifie à la main les cas particuliers exclus de l'étude ci-dessus :

$$\begin{aligned} f(1) &= \operatorname{Arcsin}(1) + \operatorname{Arccos}(1) \\ &= \frac{\pi}{2} + 0 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(-1) &= \operatorname{Arcsin}(-1) + \operatorname{Arccos}(-1) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \pi \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\text{pour tout } x \in [-1,1], \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Dans cette dernière approche, nous avons échappé à l'argument d'encadrement vu dans les deux premières mais il a fallu néanmoins distinguer des cas pour une raison de domaine de dérivabilité.

Avec les fonctions Arcsin et Arccos il y a **toujours** des justifications à apporter : domaine de définition, domaine de dérivabilité ou encadrement des valeurs prises.

2. Laissons-nous guider par l'énoncé. Nous allons même déterminer le signe strict de v : en effet, il est demandé ensuite de diviser par v qui doit donc être distinct de 0.

Pour étudier le signe de v, il suffit de savoir dans quel intervalle Arctan prend ses valeurs… Ce qui fait partie de sa définition.

Pour tout réel x on a, par définition, $\operatorname{Arctan}(x) \in]-\pi/2,\pi/2[$, et donc $\cos(\operatorname{Arctan}(x)) > 0$. Ainsi, $v > 0$, et en particulier $v \neq 0$, donc u/v a un sens.
D'autre part :

$$\frac{u}{v} = \tan(\operatorname{Arctan}(x)) = x.$$

Enfin, pour tout réel θ, $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$. Avec $\theta = \operatorname{Arctan}(x)$ on obtient

$$u^2 + v^2 = 1.$$

Comme, par définition, $u = vx$ on obtient, en remplaçant dans l'égalité précédente :

$$(vx)^2 + v^2 = 1$$

soit

$$v^2(1 + x^2) = 1.$$

Comme $1 + x^2 \neq 0$ on en tire

$$v^2 = \frac{1}{1 + x^2}$$

et enfin

$$v = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Or $v > 0$, donc

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Enfin, $u = vx$, donc

$$u = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Comme souvent en trigonométrie, nous avons calculé les carrés des expressions demandées. Pour revenir à u et v il était donc nécessaire de déterminer leur signe, sans quoi on ne peut dire mieux que $|v| = \sqrt{v^2}$.

Exercice 1.4 : Arctangente

1. Étant donné un réel strictement positif a on considère la fonction

$$f_a : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{a + x}{1 - ax}\right).$$

Étudier cette fonction sur chacun des intervalles $]-\infty,1/a[$ et $]1/a,+\infty[$.

2. Même question, mais avec $a < 0$.

3. Déduire des deux questions précédentes que, pour tous réels a et b $(a \neq 0)$:

$$\text{Arctan}(a) + \text{Arctan}(b) = \text{Arctan}\left(\frac{a + b}{1 - ab}\right) + k\pi$$

$$\text{avec } \begin{cases} k = 0 \text{ si } ab < 1 \\ k = 1 \text{ si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ k = -1 \text{ si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}$$

Cet exercice présente à nouveau des problèmes d'ensembles de définition mais cette fois avec la fonction Arctan.

1. Il s'agit ici d'une dérivée composée ; rappelons la formule :

$$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$$

ou encore, en faisant intervenir la variable notée x :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1/a\}$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) \mathrm{Arctan}'\left(\frac{a+x}{1-ax}\right).$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) &= \frac{(1-ax)+a(a+x)}{(1-ax)^2}\\ &= \frac{1+a^2}{(1-ax)^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Arctan}'\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) &= \left(1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2\right)^{-1}\\ &= \frac{(1-ax)^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2}\\ &= \frac{(1-ax)^2}{1+(ax)^2+a^2+x^2}\\ &= \frac{(1-ax)^2}{(1+a^2)(1+x^2)}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{1/a\},\ f_a'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \mathrm{Arctan}'(x).$$

Le raisonnement suivant est **faux** : « f_a et Arctan ont même dérivée donc il existe une constante K telle que $f_a = K + \mathrm{Arctan}$ ». En effet, l'égalité ci-dessus n'est pas valable sur un intervalle mais sur les deux intervalles disjoints $]-\infty, 1/a[$ et $]1/a, +\infty[$.

L'énoncé correct est : « si f et g sont deux fonctions dérivables sur un **intervalle** I et si $f'(x) = g'(x)$ pour tout x de I alors $f - g$ est constante ».

Ainsi, nous devons effectuer deux études de fonction : l'une sur l'intervalle $]-\infty, 1/a[$ et l'autre sur $]1/a, +\infty[$.

j'intègre

Mathématiques

Résumé du cours en fiches

PCSI • PTSI • PC • PSI • PT

Vous devez revoir votre cours de mathématiques afin de préparer un devoir écrit ou une interrogation orale ?

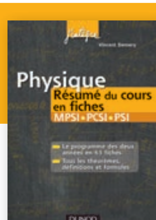
Cet ouvrage va vous aider à réviser en un clin d'œil toutes les notions des programmes de mathématiques de première et deuxième années (filières PCSI, PTSI, PC, PSI et PT).

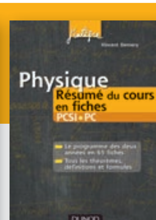
- Toutes les notions du programme sont présentées en 80 fiches synthétiques. Elles regroupent les définitions, les théorèmes ainsi que les formules de manière synthétique.
- L'année concernée (1re ou 2e année) est clairement indiquée au début de chaque fiche.
- Des encarts proposent des conseils, des rappels de méthode et signalent les erreurs à éviter.

DANIEL FREDON

Ancien maître de conférences à l'université de Limoges et interrogateur en classes préparatoires aux lycées Gay-Lussac et Turgot de Limoges.

Vous trouverez également dans la série « Résumé du cours en fiches » :





9 782100 549238
6909568
ISBN 978-2-10-054923-8

DUNOD
www.dunod.com